

Министерство науки и высшего образования РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XXI Международной научной конференции

Выпуск 21

Смоленск
Издательство СмолГУ
2020

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета СмолГУ*

Редакционная коллегия: *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *И.В. Тихонов*, д-р физ.-мат. наук, проф.

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XXI Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. – Вып. 21. – 445 с.
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XXI Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 22–23 мая 2020 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

© Авторы, 2020
© Издательство СмолГУ, 2020

СЕКЦИЯ 1

Системы компьютерной математики

А. Андрун, А.А. Парамонов, О.В. Тихонова
Российский технологический университет МИРЭА

УДК 621.371

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ ДЛЯ СОВРЕМЕННЫХ СПОСОБОВ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Ключевые слова: *цифровая система связи; высокоэффективный сигнал; сигналы SOQPSK; сигнал FBMC.*

Проникновение компьютерных технологий в цифровые системы передачи информации позволило шагнуть далеко вперед в вопросах эффективной модуляции сигналов. Основное требование к современным сигналам – низкий уровень внеполосных излучений и высокая энергетическая эффективность. Рассмотренные в статье перспективные сигналы SOQPSK и FBMC полностью удовлетворяют указанным требованиям. Формирование такого рода сигналов стало возможным лишь при применении цифровых преобразований исходных данных.

Введение

Теория и техника передачи цифровой информации к настоящему времени ушли далеко вперед от классического представления, что наивысшую помехоустойчивость передачи обеспечивает когерентный прием сигналов ФМ-2. Появилось огромное количество новых сигнальных форматов и сигнально-кодовых конструкций. Активная деятельность ученых и инженеров в этом направлении не теряет темпа. Разумеется, не существует сигнала, наилучшего для применения в любых системах передачи информации. Так, основное требование, предъявляемое к системам передачи информации с космического аппарата, – использование сигналов с постоянной огибающей, обладающих очень высокой скоростью спада спектра внеполосных излучений. Это объясняется относительно небольшой мощностью, которую в состоянии излучить бортовой передатчик и, следовательно,

небольшим линейным участком его амплитудной характеристики. Именно для таких применений представляется перспективным сигнал SOQPSK. Напротив, для перспективных систем сотовой связи поколения 5G требуется сигнал, позволяющий передавать большие объемы информации с высокой скоростью в заданной полосе частот, причем его спектр должен быть весьма близким к прямоугольному, а уровень внеполосных излучений должен быть очень низким. Этим требованиям хорошо удовлетворяет сигнал FBMC. Заметим, что оба сигнальных формата чрезвычайно сложны даже в описании, а их реализация возможна лишь с применением цифровых алгоритмов.

1. Сигнал SOQPSK

Аббревиатура SOQPSK расшифровывается как Shaped Offset Quadrature Phase Shift Keying – сигнал ФМ-4 со сдвигом квадратур, подвергнутых дополнительной фильтрации. Этим названием отражается связь сигнала с сигналом OQPSK, подобно тому, как и сигнал MSK связан с сигналом OQPSK.

Структурная схема формирователя сигнала SOQPSK приведена на рисунке 1.

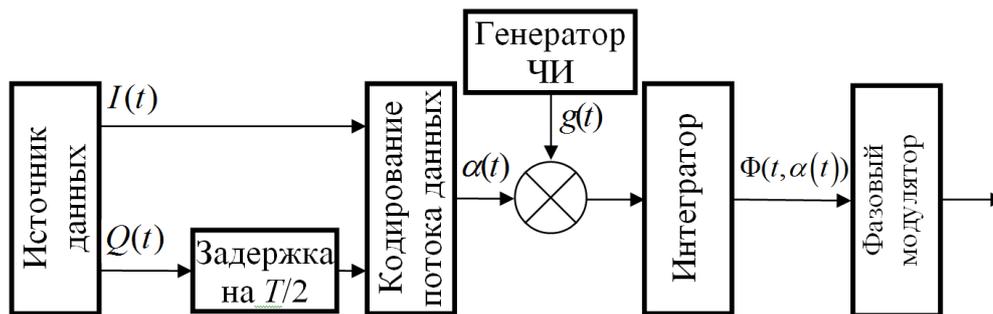


Рис.1. Структурная схема формирователя сигнала SOQPSK

При разработке формата SOQPSK были использованы три приема, способствующие сужению спектра. Во-первых, предусмотрено специальное кодирование первичного потока данных. Во-вторых, передача происходит в двух квадратурных каналах. И, наконец, применяется дополнительная фильтрация фазового импульса (ФИ), приводящая к более плавному изменению фазы сигнала. Формирование сигнала SOQPSK происходит в два этапа.

Этап 1. Первичный поток данных подвергается троичному решетчатому кодированию в соответствии с правилом

$$\alpha_i = (-1)^{i+1} \frac{d_{i-1} (d_i - d_{i+1})}{2}. \quad (1)$$

Полученная таким путем последовательность используется в дальнейшем как модулирующая.

В результате такого перекодирования элементы

последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ принимают значения $-1, 0, 1$, причем на соседних тактовых интервалах никогда не происходит смена символа -1 на символ 1 и наоборот (то есть при модуляции не происходит резких изменений фазы), а доля нулей в этой последовательности велика. Фазовая модуляция сигнала символом $\alpha_i = 0$ не вызывает изменения фазы сигнала, то есть передача этого символа заключается в передаче отрезка немодулированной несущей, что ведет к сужению спектра сигнала.

Выражение (1) описывает решетчатое кодирование первичного потока данных. Каждое состояние α определяется тремя последовательными передаваемыми символами, то есть всего таких состояний – 8.

Как указывалось выше, формат сигнала SOQPSK предусматривает передачу информации в двух квадратурных каналах, сдвинутых друг относительно друга на один тактовый интервал T (T – длительность одного информационного символа d_i). Таким образом, длительность каждого символа в синфазном и квадратурном каналах удваивается. В дальнейшем будем ее обозначать как T_s .

Из выражения (1) видно, что каждый символ α_i сконструирован из трех символов d_{i-1}, d_i, d_{i+1} первичного алфавита, причем знак символа α_i зависит от того, четным или нечетным оказывается номер символа i . Отсюда следует необходимость применения относительного кодирования при передаче.

Этап 2. Для максимального сужения спектра сигнала SOQPSK предусмотрено сглаживание его фазовых траекторий. С этой целью использован не просто известный частотный импульс (ЧИ) в виде приподнятого косинуса, но к нему еще дополнительно применена функция окна:

$$g(t) = n(t)w(t),$$

где

$$n(t) = \frac{A \cos(\pi \rho B t / T_s)}{1 - 4(\rho B t / T_s)^2} \cdot \frac{\sin(\pi B t / T_s)}{\pi B t / T_s}, \quad (2)$$

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } T_1 > |t / T_s| \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(|t / T_s| - T_1)}{T_2} & \text{для } T_1 < \left| \frac{t}{T_s} \right| < T_1 + T_2 \\ 0 & \text{для } |t / T_s| > T_1 + T_2 \end{cases}. \quad (3)$$

Как следует из выражений (2) и (3), в ЧИ могут варьироваться

параметры ρ , B , T_1 , T_2 и A . Последний из них имеет смысл нормировочного коэффициента. Подбирая этот коэффициент, можно сделать так, что набег фазы сигнала за один тактовый интервал составит ровно $\pi/2$. Результаты оптимизации четырех остальных параметров привели к трем наиболее распространенным разновидностям сигнала SOQPSK, получившим обозначения SOQPSK-A, SOQPSK-B и SOQPSK-TG. Соответствующие параметры сигналов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры сигналов SOQPSK

Параметр	ρ	B	T_1	T_2	A	d_{\min}^2
SOQPSK-A	1.0	1.35	1.4	0.6	2.6983	1.51; 2.68
SOQPSK-B	0.5	1.45	2.8	1.2	1.45	-
SOQPSK-TG	0.7	1.25	1.5	0.5	2.5	1.6; 2.58

На рисунках 2 – 4 приведены функции частотного и фазового импульсов для рассматриваемых форматов сигналов. На этих графиках сплошными линиями обозначены частотные импульсы, а пунктирными – фазовые импульсы.

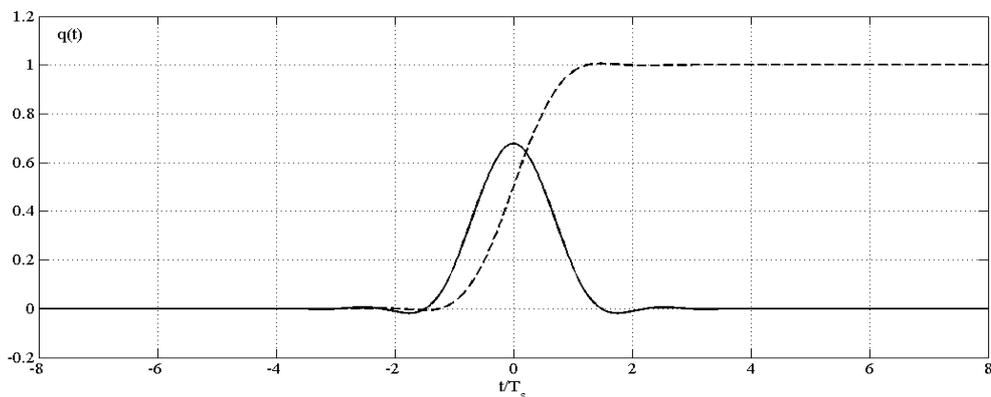


Рис. 2. Частотный и фазовый импульсы сигнала SOQPSK-A

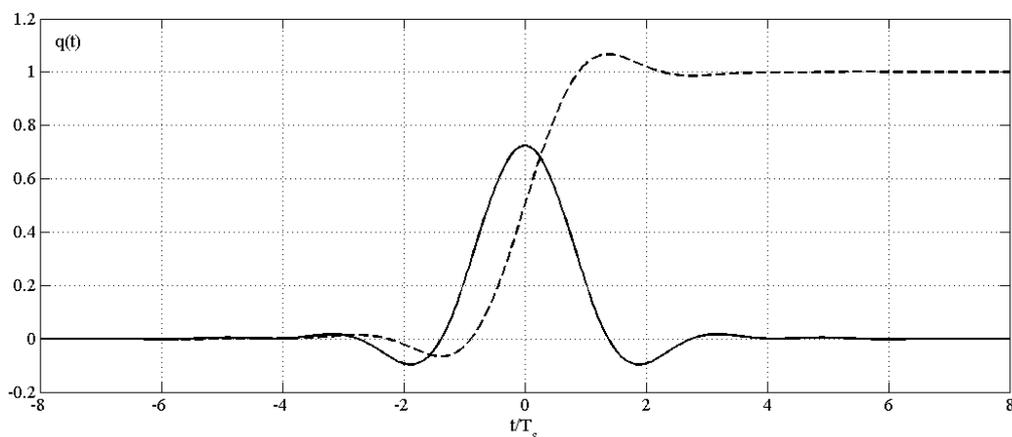


Рис. 3. Частотный и фазовый импульсы сигнала SOQPSK-B

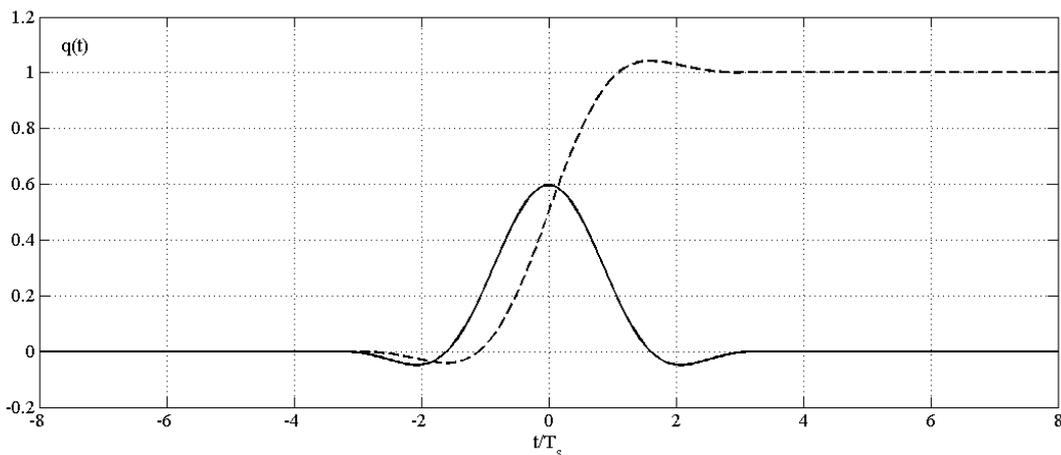


Рис. 4. Частотный и фазовый импульсы сигнала SOQPSK-TG

Реализация фазы сигнала SOQPSK-A для случайной последовательности информационных символов представлена на рисунке 5. Результаты получены путем компьютерного моделирования сигнала. Как видим, фаза сигнала меняется весьма плавно, что определяет компактность его спектра.

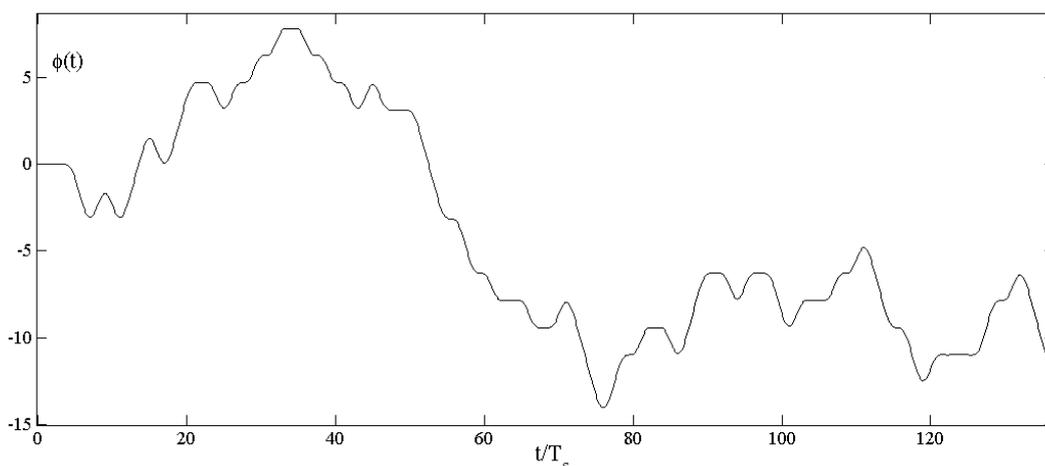


Рис. 5. Изменение фазы сигнала SOQPSK-A во времени

2. Сигнал FBMC

Аббревиатура FBMC расшифровывается как Filter-bank based multi-carrier – мульти несущая на основе банка фильтров. FBMC представляет собой комбинацию мультиплексирования и модуляции с функцией разбиения широкополосного канала на несколько узкополосных каналов, которые называются подканалами. Сложные процедуры модуляции в системах FBMC распределяются по нескольким несущим.

В отличие от сигнала SOQPSK процедура формирования сигнала FBMC плохо поддается математической формализации, поэтому с использованием пакета MathLab проиллюстрируем эту процедуру, начиная с формирования потока данных одного подканала. Исходная битовая последовательность $\{1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1\}$

из 16 двоичных символов разбивается по порядку на четные и нечетные составляющие (рис. 6). Будем рассматривать эти составляющие как действительную и мнимую части спектра некоторого сигнала s .

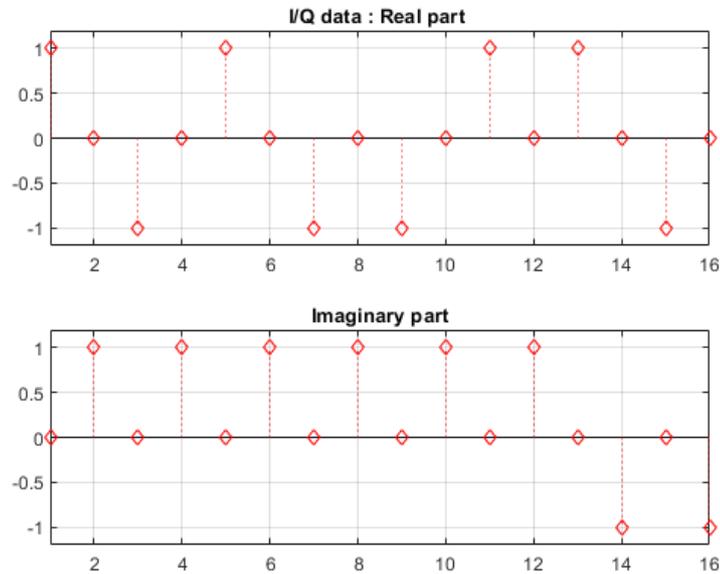


Рис. 6. Исходная битовая последовательность, разбитая на два потока

Формирование сигнала FVMS происходит в несколько этапов.

Этап 1. Применим обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) к сигналу S с помощью встроенной функции MathLab

$$x = \text{ifft}(s).$$

Этап 2. Полученный комплексный сигнал X во временной области последовательно дублируем 4 раза (рис. 7)

$$X4 = [x, x, x, x].$$

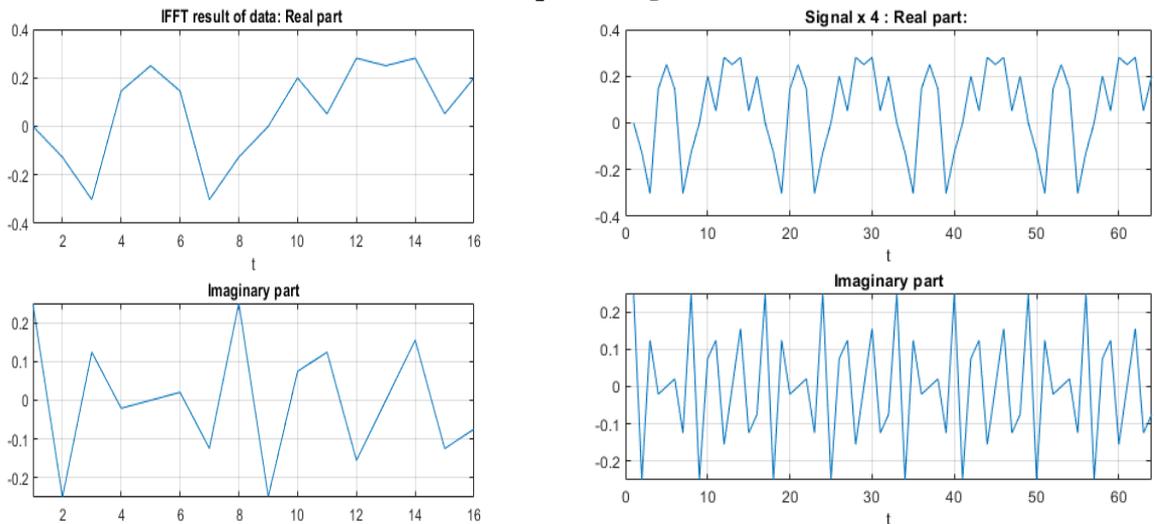


Рис. 7. Действительная и мнимая составляющие сигналов x и $X4$

Этап 3. Применим фильтр-прототип к сигналу X4, путем умножения с импульсной характеристикой фильтра, приведенной на рисунке 8.

$$y = X4 * h.$$

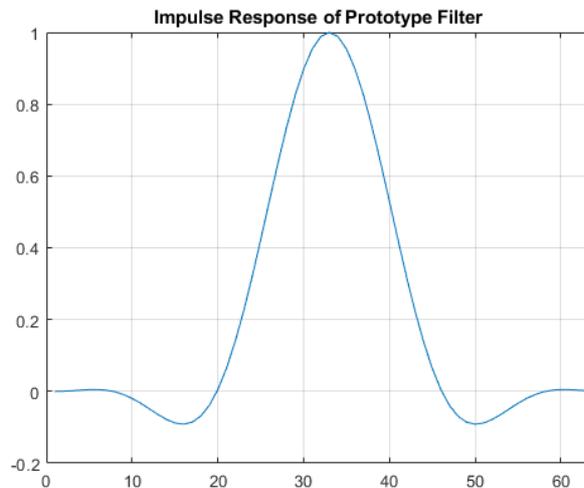


Рис.8. Импульсная характеристика фильтра

Результатом является сигнал y во временной области.

Этап 4. Применяя быстрое преобразование Фурье (БПФ) и добавляя нули с обеих сторон, увеличиваем диапазон спектра сигнала до 128 точек, поручаем сигнал:

$$yfft = [0 \text{ ftt}(y) 0].$$

Этап 5. Еще раз применяем ОБПФ к yfft, получая сигнал во временной области:

$$yTx = \text{ifft}(yfft).$$

Этап 6. К полученному сигналу применим БПФ с окном 8182 и получаем сигнал yTTx, действительная и мнимая часть которого приведена на рисунке 9.

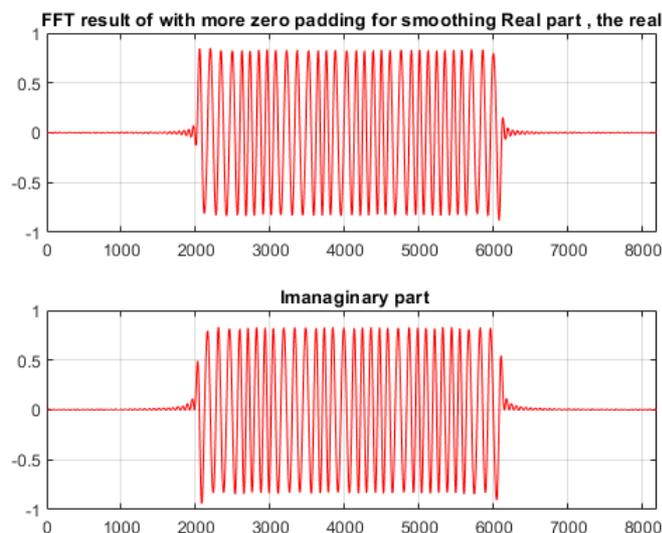


Рис. 9. Сигнал yTTx – окончательный результат процесса FBMC

$$y_{TTx} = \text{fft}(y_{Tx}, 8192).$$

Действительная часть спектра y_{TTx} — это тот физический сигнал во временной области, который направляется на антенну для передачи после преобразования с увеличением частоты.

Заключение

Рассмотренные в работе сигналы передачи цифровой информации SOQPSK и FBMC по спектральным свойствам заметно превосходят подавляющее большинство используемых в настоящее время сигналов. Формирование рассмотренных современных сигнальных форматов стало возможным лишь в последнее время как в результате развития теории сигналов, так и благодаря появлению высокоскоростных вычислителей и устройств памяти. Практическое применение этих высокоэффективных сигналов позволяет значительно повысить пропускную способность канала связи.

Однако реализация всех потенциальных возможностей этих сигналов возможна лишь при использовании оптимальных или близких к ним цифровых алгоритмов приема. Разработка и реализация таких алгоритмов – существенно более сложная задача, чем формирование сигналов.

Литература

1. Hill T. J. An Enhanced, Constant Envelope, Interoperable Shaped Offset QPSK (SOQPSK) Waveform for Improved Spectral Efficiency // Proc. Int. Telemetry Conf. (ITC'00). San Diego, California, October 2000.
2. Абенев Р.Р., Рогожников Е.В., Покаместов Д.А., Крюков Я.В., Демидов А. Я. Проблемы оценки канала в системе с частотным мультиплексированием с использованием банка фильтров // Вестник СибГУТИ. – 2018. № 1 – С. 72-77.

A.Androon, A.A.Paramonov, O.V.Tikhonova
Russian Technological University MIREA

COMPUTER METHODS FORMING SIGNALS FOR MODERN WAYS TRANSMISSION INFORMATION

Keywords: *Digital Communication System; High Performance Signal; SOQPSK signals; FBMC signal.*

Abstract. *The penetration of computer technology into digital system of transfer data allows us to step forward to investigated about the effects of signal modulation. The basic requirements for modern signals are: low level out-of-bands emissions and high energy efficiency. The promising SOQPSK and FBMC signals discussed in this article are fully satisfy these requirements. The Formation of these signals become possible only with the use of digital transformations of the source data.*

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ДЕКОДИРОВАНИЯ СТИРАНИЙ С ВЫБОРОМ

Ключевые слова: *системы цифровой связи; помехоустойчивое кодирование; блочное кодирование; код Хемминга, декодирование стираний.*

В данной работе представлены результаты исследования алгоритма исправляющего ошибки, основанного на алгоритме декодирования стираний. Также в работе показано сравнение исправляющей способности двух различных вариантов нового алгоритма со стандартными алгоритмами Хемминга и стираний.

1. Введение. Одна из главных задач систем цифровой связи – повышение способности системы сохранять свои функции неизменными или изменяющимися в допустимых пределах при действии помех. Одним из методов, позволяющих достигнуть данной цели, является помехоустойчивое кодирование.

Помехоустойчивое кодирование – это процесс обработки информации, благодаря которому в дальнейшем появится возможность обнаружить и исправить ошибки, которые могут добавиться к сообщению при прохождении через канал связи, содержащий шум.

Блочный кодер делит непрерывную информационную двоичную последовательность, поступающую на его вход, на блоки длиной k символов. Затем полученные сообщения преобразуются (кодируются) в более длинные (длиной $n = k + r$) кодовые комбинации, которые, как было сказано ранее, состоят из исходных k информационных символов и r проверочных, предназначенных в дальнейшем исправить возникающие ошибки. Рассматриваемые в данной статье алгоритмы основываются на алгоритме кодирования Хемминга.

2. Декодирование стираний. Декодирование стираний основано на определении в принятом слове, которое закодировано блочным кодом «ненадёжных» бит, на позициях которых ставятся пробелы (стирания). То есть «ненадёжные» биты пустые и не принимают значений ни нулей, ни единиц.

Надёжность битов, прошедших через канал с помехами, может определяться разными способами. Поскольку при передаче данных производится модуляция и при прохождении через канал связи сообщение подвергается воздействию помех, то в приёмную часть поступает не набор нулей и единиц, а дробные числа. Вероятность

правильности демодуляции определяется отклонением принятого значения от порогового. В самом простом случае «ненадёжными» считаются биты, имеющие наименьшее отклонение. Такие биты «стираются». То есть их значение удаляется и они становятся «пустыми» (стёртыми). Остальные биты проходят через демодулятор и принимают соответствующее значение (0 или 1). Пример работы декодирования стираний рассмотрим на блочном коде Хемминга (7,4).

Пусть есть код Хемминга (7,4) с порождающим и проверочным многочленами:

$$g(x) = x^3 + x + 1,$$

$$h(x) = x^4 + x^2 + x + 1.$$

Пусть последовательность информационных символов

$$u = [1010] = x + x^3.$$

Тогда кодированная последовательность:

$$k = g(x) \bullet u = (x^2 + x + 1)(x + x^3) = x^6 + x^3 + x^2 + x = [1001110].$$

Суть декодирования стираний в том, что сумма бит на позициях принятого слова, соответствующих ненулевым коэффициентам проверочного многочлена $h(x)$, по модулю 2 всегда равна 0. Это позволяет однозначно определять значение «стёртых» бит. Исправление или запись в «стёртые» биты происходит путём циклического сдвига последовательности. Всего сдвигов должно быть n либо число, кратное n , где n – длина кодового слова.

В таблице 1, приведённой ниже, на примере кодированной последовательности k показан алгоритм декодирования стираний. «Стёртые» биты обозначены символом «*». В момент исправления стирания запись в стёртый бит 0 или 1 обозначена символом «→».

Путём циклического сдвига, зная, что сумма битов по модулю два, на позициях h_0, h_1, h_2, h_4 всегда равна 0, можно однозначно исправить «испорченный» бит.

Таблица 1

h_0	h_1	h_2		h_4		
1	* →0	0	*	1	*	0
0	1	0	0	* →1	1	*
* →1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0

Декодирование стираний является более эффективным, чем обычное декодирование. Если обычное декодирование исправляет $t = \frac{d-1}{2}$ ошибок, то декодирование стираний исправляет $d-1$ стирание где d – кодовое расстояние. Декодирование стираний осуществляется с помощью циклического сдвига битов декодируемого сообщения.

Принимая во внимание, что код Хэмминга может исправить одну ошибку (кодовое расстояние $d = 3$, соответственно $t = \frac{d-1}{2} = 1$) в кодированном слове, и что алгоритм стираний может исправить в два раза больше то есть две ошибки, количество «ненадёжных» бит было ограничено двумя.

Также следует отметить, что для успешного декодирования необходимо изначально правильно определить «ненадёжные» биты, так как в случае неправильного их определения алгоритм к уже имеющимся добавит новые ошибки. Для упрощения расчётов отклонения значения принятых бит от порогового рассматриваются двоичные символы -1 и 1, а не 0 и 1 (то есть используется модулированная последовательность).

3. Алгоритм декодирования стираний с выбором. Стандартный алгоритм декодирования стираний может исправить $d-1$ стёртых бит. В случае с кодом Хемминга это два бита. В случае, если стёртыми окажутся не два, а три бита, возникнут два варианта развития событий. Первый — три стёртых бита будут исправлены с помощью циклического сдвига кодовой последовательности (см. таблицу 1). Второй — три стёртых бита будут составлять такую комбинацию, что на позициях принятого слова, соответствующих ненулевым коэффициентам проверочного многочлена, всегда будут находиться как минимум два стёртых бита из трёх. Это приведёт к невозможности принять однозначное решение при декодировании, и стёртые биты исправлены не будут. Данная комбинация показана в таблице 2.

Таблица 2

h_0	h_1	h_2		h_4		
*	0	0	1	*	1	*
*	*	0	0	1	*	1
1	*	*	0	0	1	*
*	1	*	*	0	0	1
1	*	1	*	*	0	0
0	1	*	1	*	*	0
0	0	1	*	1	*	*
*	0	0	1	*	1	*

Для решения данной проблемы был предложен следующий алгоритм. Для наглядности все его этапы будут рассмотрены на примере исправления комбинации из таблицы 2.

1. Пусть при передаче из-за воздействия помех вместо слова $k=[1001110]$, а точнее, вместо модулированного слова $k=[1-1-1111-1]$ была принята комбинация $r=[0.32 -0.8 -0.94 1.21 0.28 0.95 0.1]$, в которой «ненадёжные» биты были определены на нулевой, четвёртой и шестой позициях (чем меньше значение по модулю, тем менее «надёжен» бит). При невозможности исправить три стирания стандартным способом нужно рассмотреть два варианта. Первый: если в один из стёртых бит (неважно в какой) была записана 1, второй: если в этот же бит был записан 0. Тогда получаем два предполагаемых слова с двумя стёртыми битами, которые гарантированно правятся стандартным алгоритмом стираний.

Таблица 3

В нулевой бит записан 1

h_0	h_1	h_2		h_4		
<u>1</u>	0	0	1	*→1	1	*
*→0	<u>1</u>	0	0	1	1	1
1	0	<u>1</u>	0	0	1	1
1	1	0	<u>1</u>	0	0	1
1	1	1	0	<u>1</u>	0	0
0	1	1	1	0	<u>1</u>	0
0	0	1	1	1	0	<u>1</u>
<u>1</u>	0	0	1	1	1	0

Первое слово: $k_1=[1001110]$

Таблица 4

В нулевой бит записан 0

h_0	h_1	h_2		h_4		
<u>0</u>	0	0	1	*→0	1	*
*→1	<u>0</u>	0	0	1	0	1
1	1	<u>0</u>	0	0	1	0
0	1	1	<u>0</u>	0	0	1
1	0	1	1	<u>0</u>	0	0
0	1	0	1	1	<u>0</u>	0
0	0	1	0	1	1	<u>0</u>
<u>0</u>	0	0	1	0	1	1

Второе слово: $k_2 = [0001011]$.

2. Два предполагаемых слова модулируются (0 заменяется на -1, 1 сохраняется).

$$k_1 = [1 -1 -1111 -1],$$

$$k_2 = [-1 -1 -11 -111].$$

3. Находим из предполагаемых векторов ближайший к принятому вектору. В качестве метрики используем евклидово расстояние.

$$d(k, r) = \sqrt{(k_1 - r_1)^2 + (k_2 - r_2)^2 + \dots + (k_n - r_n)^2}, \quad (1)$$

$$d(k_1, r) = 1.51029798, \quad d(k_2, r) = 2.06905757.$$

Чем больше предполагаемое слово похоже на принятый вектор, тем меньше будет евклидово расстояние. В данном случае слово k_1 оказывается самым близким к принятой комбинации. Соответственно, принимается решение, что передавалась последовательность k_1 . Далее вектор k_1 демодулируется и декодируется в соответствии с правилами алгоритма.

Рассмотренный алгоритм стираний с выбором способен исправить три стёртых бита. Поскольку он опирается на код Хемминга (7,4), то исправить четыре стёртых бита будет уже довольно проблематично, так как, во-первых, из-за малой длины слова на позициях, соответствующих ненулевым коэффициентам проверочного многочлена, почти всегда будут находиться стёртые биты, а, во-вторых, четыре «плохих» бита означают, что при передаче исказилось больше половины слова и однозначное восстановление исходных данных невозможно. Однако, если взять более длинную кодовую последовательность, например код Хемминга (15,11), то, объединив стандартный алгоритм декодирования стираний с алгоритмом декодирования с выбором, можно добиться исправления четырёх «плохих» бит. Исправление будет проходить по следующему принципу.

1. Сначала определяются четыре наименее надёжных бита, по отношению к которым применяется стандартный алгоритм декодирования стираний. После данного алгоритма возможны три ситуации: были исправлены все биты, был исправлен один бит из четырёх, не исправился ни один бит.

2. В случае, если были исправлены все стёртые биты, принятое слово считается исправленным и передаётся дальше по системе связи. Если не был исправлен ни один бит, то стёртые биты определяются путём демодуляции принятого слова. Если же был исправлен один бит из четырёх, то остаются ещё три стёртых бита, к которым применяется алгоритм декодирования стираний с выбором.

Поскольку ситуация, когда с помощью обычного алгоритма декодирования стираний восстанавливаются все стёртые биты, похожа

на пример, рассмотренный в таблице 1, а алгоритм в случае, когда не исправится ни один бит, довольно прост, то остановимся подробно на варианте, при котором стандартный алгоритм стирания исправляет один стёртый бит, и рассмотрим его на конкретном примере.

Пусть есть код Хемминга (15,11) с порождающим многочленом

$$g(x) = x^4 + x + 1$$

и проверочным многочленом

$$h(x) = x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x^1 + 1.$$

1. Исходное слово

$$u = [0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0],$$

а закодированное слово $k = [0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1].$

После воздействия шума, вместо модулированного кодового слова

$$k = [-11\ -111\ -11\ -111\ -11\ -111]$$

получается некий вектор

$$r = [0.476625\ 1.36834\ -0.622631\ 1.51141\ 1.23524\ -0.681592\ 1.70993\ -0.869092\ 0.172055\ 1.22036\ -0.209379\ 1.09832\ -1.37705\ 0.671123\ 1.66196].$$

Ненадёжные биты будут определены на нулевой, второй, восьмой и десятой позиции. Применяем к комбинации со стёртыми битами стандартный алгоритм декодирования стираний.

Таблица 5

Стандартный алгоритм стираний для четырёх бит

h_0	h_1	h_2	h_3		h_5		h_7	h_8			h_{11}			
*	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1
1	*	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1
1	1	*→0	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0
0	1	1	0	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1
1	0	1	1	0	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*
*	1	0	1	1	0	1	*	1	1	0	1	0	*	1
1	*	1	0	1	1	0	1	*	1	1	0	1	0	*
*	1	*	1	0	1	1	0	1	*	1	1	0	1	0
0	*	1	*	1	0	1	1	0	1	*	1	1	0	1
1	0	*	1	*	1	0	1	1	0	1	*	1	1	0
0	1	0	*	1	*	1	0	1	1	0	1	*	1	1
1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1	0	1	*	1
1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1	0	1	*
*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1	0	1
1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1	0
0	1	*	1	1	0	1	0	*	1	*	1	0	1	1

Как видно из таблицы 5, стандартный алгоритм декодирования стираний исправил стёртый нулевой бит. К оставшимся трём стёртым битам применяется алгоритм декодирования стираний с выбором.

2. Формируются два предполагаемых слова: в одном на позиции h_2 , где располагается стёртый бит, записывается 0, в другом – 1.

$$k_1 = [01\bar{0}11010*1*1011] \text{ и } k_2 = [01\bar{1}11010*1*1011].$$

Оба предполагаемых слова декодируются с исправлением оставшихся бит, затем модулируются и для каждого из них вычисляется евклидова метрика:

$$d(k_1, r) = 1.89974,$$

$$d(k_2, r) = 3.26237.$$

Соответственно, выбор делается в пользу слова с меньшей метрикой. В данном случае это $k_1 = [0101101011010111]$.

3. От полученного слова отделяются проверочные символы, и получаем исходное информационное слово, которое и передавалось. Таким образом, при использовании комбинации стандартного алгоритма декодирования стираний и алгоритма с выбором получается алгоритм, способный исправить четыре стёртых бита. То есть четыре ошибки в слове, которое было закодировано обычным кодом Хемминга.

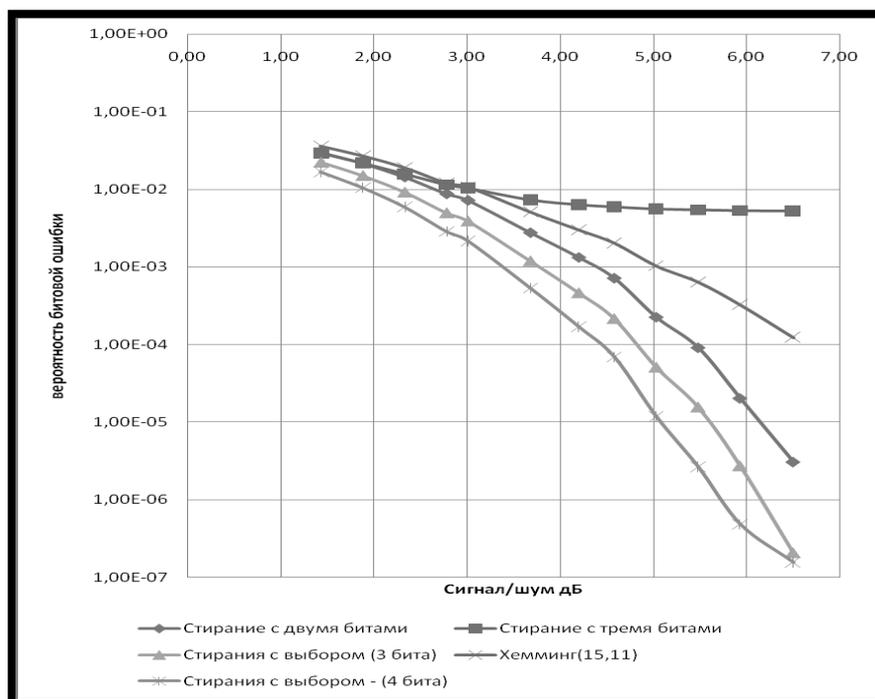


Рис. 1. Кривые помехоустойчивости для последовательности, основанной на коде Хемминга (15,11)

Следует заметить, что при использовании любых алгоритмов, опирающихся на стирания, крайне важно правильно определить «ненадёжные» биты, поскольку в противном случае произойдёт ещё большее искажение принятой последовательности. Также можно

отметить: если передаваемый бит может исказиться так сильно, что его значение поменяет знак на противоположный (с плюса на минус или наоборот), и при этом его модуль не будет настолько мал, чтобы попасть в «ненадёжные» биты, то при декодировании также последует искажение принятого слова. Вероятность появления подобных ошибок тем выше, чем выше уровень шума в канале и чем длиннее передаваемая последовательность.

4. Математическое моделирование

Для проверки эффективности различных методов декодирования был проведен ряд вычислительных экспериментов на математической модели. Далее приведены результаты математического моделирования для последовательности, закодированной кодом Хемминга, и четырёх алгоритмов декодирования: Хемминга, декодирования стираний с двумя стёртыми битами, декодирования стираний с тремя стёртыми битами, декодирования стираний с выбором для трёх бит и для четырёх бит.

Как видно из графиков, наиболее выгодным с точки зрения помехоустойчивости является алгоритм декодирования стираний с выбором, исправляющий четыре стёртых бита. При вероятности битовой ошибки 10^{-4} он имеет преимущество над кодом Хемминга на 2 дБ и около 1 дБ над стандартным алгоритмом декодирования стираний. Это обусловлено тем, что данный алгоритм способен исправлять комбинации из четырёх ошибок при том, что процесс кодирования может быть абсолютно таким же, как и у обычного кода Хемминга. Для сравнения на графиках приведены кривые помехоустойчивости для обычного алгоритма стираний с тремя «стёртыми» битами. Без алгоритма, выбирающего наиболее вероятную комбинацию, три стёртых бита исправляются гораздо хуже, чем два стёртых бита или один бит с помощью декодирования Хемминга.

То, что кривые помехоустойчивости для алгоритмов декодирования стираний с выбором для трёх и четырёх бит при увеличении отношения сигнал / шум начинают сходиться, обусловлено недостаточным количеством испытаний. В дальнейшем планируется исследование предложенного алгоритма с большим количеством тестовых последовательностей, а также проверка его работы на кодовых последовательностях большей длины.

Литература

1. Склар Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.; пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
2. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
3. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: справочник / Под ред. чл.-кор. РАН Ю.Б. Зубарева. – М.: Горячая линия-Телеком, 2004. – 126 с.

4. Сборник научных статей по материалам IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем» («Радиоинфоком-2019»), г. Москва, РТУ МИРЭА: сборник научных статей. – М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2019. – С. 88–93.

A.A. Bondar

Russian Technological University MIREA

RESEARCH OF THE ALGORITHM FOR DECODING ERASURES WITH A CHOICE

Keywords: *digital communication systems; noise-resistant coding; block coding; Hamming code, decoding erasures.*

Abstract. *The question of improving the quality of the digital communication system through the use of noise-resistant block coding. A study of algorithm for Hamming coding, the decoding algorithm of the erasure based on Hamming coding. The algorithm is based on decoding of the Erasure and performing the selection of the most likely option of generated several prospective sequences. Also the paper shows a comparison of the correcting ability of two different variants of the new algorithm with standard Hamming and Erasure algorithms.*

Р. Р. Вишняков

Российский технологический университет МИРЭА

УДК 51-74

КОМБИНИРОВАННАЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В СОСТАВЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА RF SYSTEMS DESIGNER

Ключевые слова: *оптимизация; алгоритм; программа; экстремум; численный способ оптимизации; аналитический способ оптимизации.*

В статье рассматривается решение задачи оптимизации комбинацией численных методов, примененное в разработанном автором программном комплексе RF Systems Designer. Предлагаемая комбинация методов оптимизации позволяет определять глобальный экстремум функции многих переменных, что является распространенной прикладной задачей. Так, с помощью программы, реализованной на языке программирования MATLAB, использующей комбинацию численных методов оптимизации, предлагается решение задачи оптимизации электрических характеристик проектируемых

линейных трактов приемных и передающих устройств. Корректность представленного алгоритма, методов оптимизации, а также работы программы подтверждается приведенным примером сравнения результатов, полученных с помощью разработанной программы и аналитическим способом.

1. Постановка задачи. На сегодняшний день развитие математической теории оптимизации, ее теоретических и вычислительных аспектов позволяют решать практически любые прикладные оптимизационные задачи. Так, в работе [1] ставится прикладная задача оптимизации для решения задачи проектирования линейных трактов приемных и передающих устройств. В данной постановке необходимо оптимизировать функцию многих переменных, являющуюся решением задачи векторной оптимизации. В общем виде данную функцию можно определить выражением (1), которое согласуется с методом векторной оптимизации свертки критериев.

$$F(\Lambda) = \sum_{i=1}^R \alpha_{i,k} \cdot \lambda_i, \quad (1)$$

где $F(\Lambda)$ – целевая функция оптимизации;

Λ – вектор оптимизируемых параметров, $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R\}$;

λ_i – нормированное значение i -го параметра;

R – количество параметров;

$\alpha_{i,k}$ – весовой коэффициент k -го ранга i -го параметра.

При этом параметры λ_i являются характеристиками линейного тракта и в общем случае являются функциями многих функций и переменных. Например, λ_i может являться значением коэффициент шума линейного тракта и может быть определен выражением (2) [2]:

$$F_{\Sigma} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{K_1} + \frac{F_3 - 1}{K_1 \cdot K_2} + \dots + \frac{F_N - 1}{K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_N} = F_1 + \sum_{i=2}^N \frac{F_i - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} K_j}, \quad (2)$$

где F_{Σ} – коэффициент шума тракта;

F_i – коэффициенты шума функциональных узлов тракта;

K_i – коэффициенты передачи по мощности функциональных узлов.

При этом входящие в выражение (2) переменные также могут являться функциями многих функций и переменных:

$$F_i = f(I_i(U_i), P_{in,i}, t(P_{in,i}, I_i(U))); \quad (3)$$

$$K_i = f(I_i(U_i), P_{in,i}, t(P_{in,i}, I_i(U))). \quad (4)$$

Очевидно, что даже при учете всего одного параметра λ_i тракта в целевой функции (1) задача оптимизации становится непростой ввиду сложного, нелинейного поведения оптимизируемой функции. Поэтому решение оптимизационной задачи целесообразно искать с помощью численных методов, поскольку оптимизация аналитическими методами

весьма трудозатрата и не является универсальным решением при произвольном виде целевой функции.

2. Разработка алгоритма комбинированного метода оптимизации.

Среди численных методов можно выделить следующие методы оптимизации [3-8]:

- 1) Метод покоординатного спуска (метод Гаусса);
- 2) Симплексный метод (метод Нелдера–Мида или метод деформируемого многогранника);
- 3) Метод вращающихся направлений (метод Розенброка);
- 4) Метод Хука–Дживса;
- 5) Методы сопряженных направлений (метод Пауэлла);
- 6) Метод статистического градиента;
- 7) Метод наилучшей пробы;
- 8) Случайный поиск (метод Монте-Карло);
- 9) Метод полного перебора.

При этом численные методы можно разделить на две группы – регулярного и случайного поиска. Методы регулярного поиска (первые семь методов из представленных) характеризуются переделанным алгоритмом, позволяющим интеграционным способом определить локальный экстремум. Методы случайного поиска позволяют определить глобальный экстремум с некоторой вероятностью путем случайного перебора.

Сравнить перечисленные методы по основным характеристикам – **сходимости алгоритма, точности получения результата**, невозможно, так как данные параметры зависят от вида функции, которая в данном случае имеет достаточно сложный аналитический вид начальной точки оптимизации. Сравнивая методы по **программной реализации и трудоемкости вычислений**, следует учитывать, что методы, требующие затратных вычислений на каждой итерации, требуют, как правило, меньшее число итераций (метод вращающихся направлений), и наоборот – не требующие вычислений и пересчета направления требуют многократных итераций (метод наилучшей пробы), таким образом, данный критерий находится в противоречии между двумя характеристиками, определяющими трудоемкость вычислений – сложностью итерации и количеством итераций, которое также определяется видом оптимизируемой функции. **Устойчивость метода к погрешностям в вычислениях и трудоёмкость вычислений** являются преимущественно требованиями к вычислительным ресурсам и могут быть снижены при использовании высокопроизводительных вычислительных средств, поэтому данные критерии при выборе метода оптимизации и сравнительном анализе в настоящей работе не учитываются. Если сравнивать методы по критериям **времени**

получения результата и точности решения снова возникает противоречие между критериями, поскольку для получения более точного результата требуется большее количество итераций с меньшим шагом. Кроме того, точность и время получения результата могут определяться видом функции (крутизна на различных участках, количество экстремумов и т.д.). **Алгоритмичность** метода, является наиболее значимым критерием выбора метода оптимизации в условиях отсутствия априорной информации о виде функции и координатах глобальных экстремумов. Под алгоритмичностью понимается совокупность параметров: количество шагов алгоритма для реализации одной итерации, сложность вычислений на каждой итерации и интерпретируемость шагов алгоритма и результата его работы.

Поскольку, как было отмечено ранее, сходимость всех численных методов многомерной оптимизации зависит от вида функции, по которой происходит оптимизация размерности, а следовательно, и количества итераций, и скорости нахождения оптимальных значений, а также от начальных значений, то определить наиболее подходящий метод оптимизации не представляется возможным. Поэтому в качестве ведущего метода оптимизации примем метод, который наиболее алгоритмичен и может быть легко реализован программным кодом. С этой точки зрения, наиболее подходящим является метод покоординатного спуска или симплексный метод. В данной работе будет использован метод покоординатного спуска.

Поскольку все регулярные численные методы позволяют определить только локальный экстремум, а случайные методы малоэффективны для оптимизации овражных функций, решать задачу оптимизации наиболее целесообразно комбинацией двух методов – случайного и регулярного. Процесс оптимизации поиска точки глобального экстремума комбинацией методов будет разбит на два этапа – этап поиска локализации глобального оптимума случайным методом, второй – уточнение точки экстремума регулярным методом. В качестве метода, позволяющего оценить локализацию глобального оптимума, примем метода Монте-Карло, в качестве уточняющего регулярного метода – метод покоординатного спуска.

В качестве проверочного метода при решении тестовых задач используется аналитический метод.

На рисунке 1 представлен общий алгоритм оптимизации с помощью комбинации методов – метода покоординатного спуска и метода Монте-Карло. Основа комбинации заключается в том, чтобы в качестве начальной точки оптимизации методом покоординатного спуска использовать результаты оптимизации методом Монте-Карло.

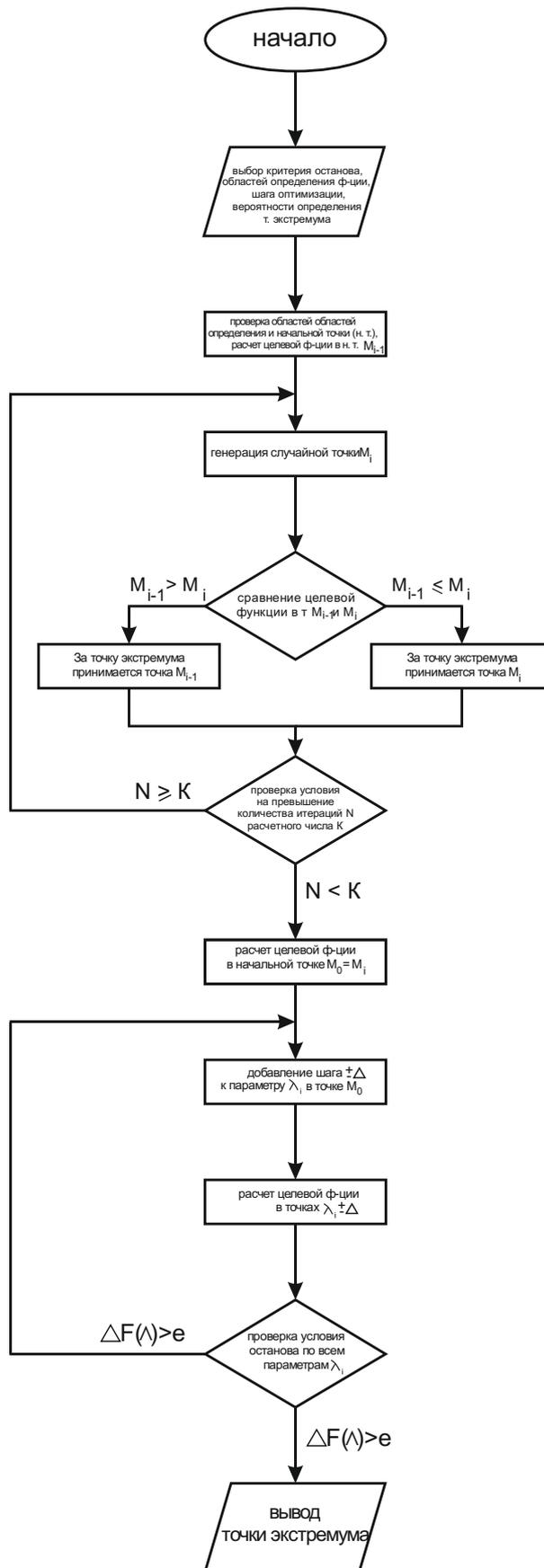


Рис.1. Блок-схема алгоритма оптимизации

Краткое описание последовательности действий (в соответствии с представленной блок-схемой алгоритма) для этапа оптимизации методом Монте-Карло представлена ниже

1. Первым шагом оптимизации методом Монте-Карло является разбиение области определения целевой функции $F(\Lambda)$ на элементарные i -мерные объемы в соответствии с заданной точностью оптимизации ε с гранями элементарных объемов $\Delta\lambda_i$,

$$\Delta\lambda_i = \varepsilon \cdot (\lambda_{i, \max} - \lambda_{i, \min}),$$

где $\lambda_{i, \max}$ – максимальное значение параметра λ_i ;
 $\lambda_{i, \min}$ – минимальное значение параметра λ_i .

Также задается вероятность определения экстремума P .

2. Далее производится генерация массива $N = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ размерностью N (количество оптимизируемых параметров) случайных натуральных чисел имеющих равномерное распределение плотности вероятности в диапазоне $(0, \frac{1}{\varepsilon}]$.

3. По полученным массивам элементарных объемов и случайных чисел формируется точка $M_1 = \{ \Delta\lambda_1 \cdot n_1, \Delta\lambda_2 \cdot n_2, \dots, \Delta\lambda_i \cdot n_i \}$, рассчитывается значение целевой функции в этой точке $F(M_1)$. За точку экстремума принимается точка M_1 .

4. Процедура шагов 2-3 повторяется K раз

$$K = \frac{\log(1-P)}{\log(1-V_0)},$$

где P – заданная вероятность нахождения точки экстремума,
 V_0 – элементарный объем целевой функции

$$V_0 = \prod_{i=1}^N \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_{i, \max} - \lambda_{i, \min}}.$$

5. За точку экстремума принимается точка M_{opt} вектора точек $M = \{M_1, M_2, \dots, M_K\}$ размерностью K , в которой значение целевой функции $F(\Lambda)$ функции наибольшее.

Для этапа оптимизации методом покоординатного спуска последовательность действий представлена ниже.

1. Первым шагом оптимизации методом покоординатного спуска является расчет значения целевой функции в начальной точке, полученной с помощью метода Монте-Карло как точки экстремума.

$$M_0 = F(\Lambda_0), \Lambda_0 = \{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0R}\}, \Lambda \in D,$$

где D – R -мерное пространство параметров λ_i .

2. Далее вычисляется значение целевой функции в окрестности параметра λ_{10} . Для этого вычисляется значение функции в точках

$$M_{01-\Delta} = \{\lambda_{01} - \Delta \lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0R}\} \text{ и } M_{01+\Delta} = \{\lambda_{01} + \Delta \lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0R}\},$$

где $\Delta\lambda_i = \Delta \cdot (\lambda_{i, \max} - \lambda_{i, \min})$.

3. Вычисленные значения целевой функции в точках $M_{0l-\Delta}$ и $M_{0l+\Delta}$ сравниваются, и если выполняются условия

$$\Lambda \in D, \quad (5)$$

$$\frac{M_{0l\pm\Delta} - M_0}{M_0} < \varepsilon. \quad (6)$$

4. За начальную точку M_0 принимается точка $M_{0l-\Delta}$ и $M_{0l+\Delta}$. В противном случае начальная точка остается без изменений.
5. Далее вычисляется значение целевой функции в окрестности следующего параметра λ_{20} .
6. Пункты 2-4 повторяются для всего вектора параметров $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_R\}$.

Оптимизации целевой функции в пространстве параметра λ_R , алгоритм повторяется, начиная с п. 1, параметра λ_1 , до тех пор, пока перестанет выполняться хотя бы одно из условий (5) или (6).

3. Решение тестовой задачи аналитическим методом. По представленному алгоритму в программе MATLAB была реализована программа. Проверка корректности разработанного алгоритма и реализованной программы осуществляется на примере решения задачи поиска точки глобального экстремума (максимума) функции, заданной выражением (7) путем сравнения результатов полученных двумя способами – комбинацией численных методов и аналитическим способом.

$$F(\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}) = \cos() \cdot e^{0.01 \cdot \lambda_1} + \cos() \cdot e^{0.01 \cdot \lambda_2}. \quad (7)$$

Функция, определенная выражением (7), обладает несколькими экстремумами (рис. 2).

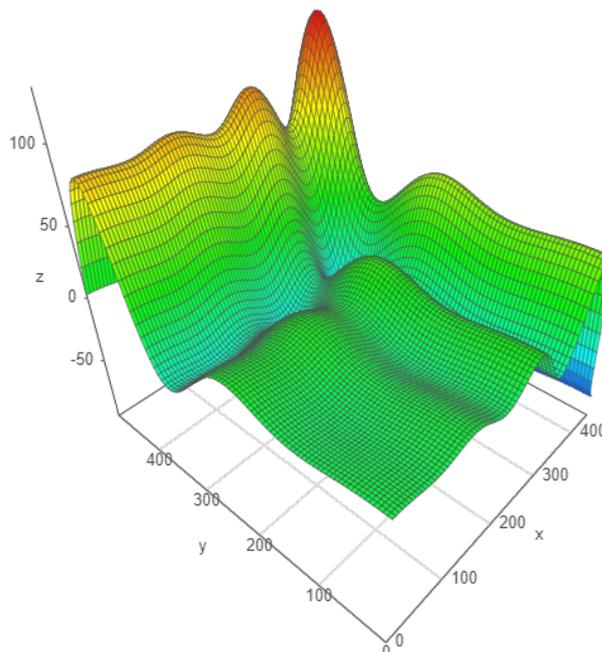


Рис. 2. График поверхности заданной функции

В результате поиска экстремумов заданной функции аналитическим методом были найдены следующие точки:

$M_1 = \{3.9479, 11,7836\}$, $M_2 = \{3.9479, 121.7394\}$, $M_3 = \{3.9479, 231.6951\}$, $M_4 = \{3.9479, 341.6551\}$, $M_5 = \{3.9479, 451.6066\}$, $M_6 = \{66.7798, 11,7836\}$, $M_7 = \{66.7798, 121.7394\}$, $M_8 = \{66.7798, 231.6951\}$, $M_9 = \{66.7798, 341.6551\}$, $M_{10} = \{66.7798, 451.6066\}$, $M_{11} = \{129.6116, 11,7836\}$, $M_{12} = \{129.6116, 121.7394\}$, $M_{13} = \{129.6116, 231.6951\}$, $M_{14} = \{129.6116, 341.6551\}$, $M_{15} = \{129.6116, 451.6066\}$, $M_{16} = \{255.2753, 11,7836\}$, $M_{17} = \{255.2753, 121.7394\}$, $M_{18} = \{255.2753, 231.6951\}$, $M_{19} = \{255.2753, 341.6551\}$, $M_{20} = \{255.2753, 451.6066\}$, $M_{21} = \{318.1072, 11,7836\}$, $M_{22} = \{318.1072, 121.7394\}$, $M_{23} = \{318.1072, 231.6951\}$, $M_{24} = \{318.1072, 341.6551\}$, $M_{25} = \{318.1072, 451.6066\}$, $M_{26} = \{380.939, 11,7836\}$, $M_{27} = \{380.939, 121.7394\}$, $M_{28} = \{380.939, 231.6951\}$, $M_{29} = \{380.939, 341.6551\}$, $M_{30} = \{380.939, 451.6066\}$, $M_{31} = \{443.7709, 11,7836\}$, $M_{32} = \{443.7709, 121.7394\}$, $M_{33} = \{443.7709, 231.6951\}$, $M_{34} = \{443.7709, 341.6551\}$, $M_{35} = \{443.7709, 451.6066\}$.

Точкой глобального максимума функции (7) с областью определения $\lambda_1 \in [0;450]$ и $\lambda_2 \in [0;500]$ является точка $M_{30} = \{380.939, 451.6066\}$.

4. Решение тестовой задачи численным методом. Для решения задачи определения точки экстремума функции, определенной выражением (7) с помощью программы, использующей комбинацию численных методов и реализованной на языке MATLAB, были заданы различные начальные условия, представленные в таблице 2.

Результаты работы программы с различными начальными условиями представлены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты работы программы при различных начальных условиях

Параметр		Метод Монте-Карло	Метод покоординатного спуска	Аналитический способ
Точность определения точки экстремума ε	Погрешность определения точки экстремума ε	0.2	0.0000001	
Вероятность определения точки экстремума P	Шаг Δ по каждой координате	0.9	0.001	
Начальная точка		$M = \{0,0\}$	$M = \{360,400\}$	
Количество итераций		56	102626	
Точка экстремума		$M = \{360,400\}$	$M = \{380.9302, 451.5772\}$	$M = \{380.939, 451.6066\}$

При сравнении результатов поиска точки экстремума двумя способами – комбинацией численных методов и аналитическим способом – можно заключить, что результаты совпадают с достаточной точностью, которая определяется исключительно погрешностью вычислений. Совпадение результатов также свидетельствует о верности разработанных алгоритмов и об их эффективности.

Заключение. В данной работе был рассмотрен решение задачи поиска глобального экстремума (максимума) с помощью двух принципиально различных подходов. Первый заключается в аналитическом способе нахождения экстремума. Данный метод достаточно трудозатратен, если оптимизируемая функция имеет сложный аналитический вид – для поиска экстремума необходимо вычислять производные первого и второго порядков. Кроме того, данная задача может не иметь решения, если функция не дифференцируема, или вычисление аналитическим способом не представляется возможным. Второй подход заключается в использовании регулярных численных методов, например, такого, как метод покоординатного спуска. Однако наиболее весомым недостатком этого метода является то, что этот метод позволяет определить только локальный экстремум, находящийся вблизи начальной точки. Поэтому с целью устранить данный недостаток был рассмотрен комбинированный метод оптимизации, заключающийся в комбинации случайного метода поиска точки экстремума – метода Монте-Карло и регулярного – метода покоординатного спуска. На основе предложенного алгоритма оптимизации с помощью указанных численных методов оптимизации на языке MATLAB реализована программа. Результаты работы программы в сравнении с результатами, полученными аналитическим способом, свидетельствуют о корректности и эффективности представленного алгоритма. Разработанная программа в дальнейшем может быть использована для решения задач оптимизации функций со сложным аналитическим видом.

Литература

1. Вишняков Р. Р. Программный комплекс расчета и оптимизации радиотрактов // Сборник научных статей по материалам IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем» («Радиоинфоком-2019»). Москва. 13 ноября 2019 г. – М.: МИРЭА– Российский технологический университет. 2019. – 575 с.
2. Friis H.T. Noise Figure of Radio Receivers // Proc. IRE. July, 1944. Vol. 32, P. 419-422.
3. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации. Компьютерные технологии. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 384 с.

4. Parkinson, A.R., Balling R.J., Hedengren J.D. Optimization Methods for Engineering Design. Applications and Theory. – Provo, Utah, USA: Brigham Young University, 2013. – 208 p.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
6. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
7. Хук Р., Т.А.Дживс Т.А. Прямой поиск решения для числовых и статических проблем. – 1961. – С. 212-219 с.
8. Минаков А.И. Сравнительный анализ некоторых методов случайного поиска и оптимизации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Самара, 1999. – №2. – С. 286–293.

R. R. Vishnyakov
Russian Technological University MIREA

MULTIPARAMETRIC OPTIMIZATION BY HYBRID METHOD

Keywords: *optimization; algorithm; program; extremum; numerical optimization method; analytical optimization method.*

Abstract. *The article is devoted to considers the solution of the optimization problem by a combination of numerical methods. The proposed combination of optimization methods allows to determine the global extremum of the function of many variables, which is a common applied problem., the solution of the problem of optimizing the electrical characteristics of the designed RF system of receiving and transmitting devices using a program implemented in the programming language MATLAB is considered. The correctness of the presented algorithm, optimization methods, as well as the operation of the program is confirmed by the given example of comparing the results obtained using the developed program and the analytical method.*

Л.А. Григорян, Г.С. Евдокимова
Смоленский государственный университет

УДК 519.23

ОЦЕНКА УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАЗМЕРА ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ ОТ УРОВНЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Ключевые слова: *панельные данные; заработная плата; уровень образования; РМЭЗ; GRETL; метод наименьших квадратов; фиксированный эффект; случайный эффект.*

В статье на основании данных Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения (РМЭЗ) представлена линейная регрессионная модель зависимости размера заработной платы от ряда факторов, включающей уровень образования. Для этого предложены три модели обработки панельных данных: объединенная модель МНК, модель с фиксированными эффектами и модель со случайными эффектами. Необходимые расчеты проведены с использованием пакета GRETL.

Цель исследования – выбор наиболее качественной регрессионной линейной модели оценки влияния переменных, которые характеризуют уровень образования, возраст, пол, рабочий стаж и тип населенного пункта на заработную плату. Исследование проводилось на основании статистической базы Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения [3].

РМЭЗ – популярное и единственное в России панельное обследование семей. В ее индивидуальной анкете содержатся вопросы, ответы на которые предоставляют широкий спектр информации о социально-демографических характеристиках респондентов и заработной плате. Сбор данных проводится в последнем квартале каждого года. В панель, над которой проведены исследования, включены данные с 2008 по 2018 год. Из этого периода были взяты необходимые показатели по 100 респондентам, итого – 1100 наблюдений.

Оцениваемое уравнение имеет вид:

$$zarplata_{it} = b_0 + b_1educ_{it} + b_2gen_{it} + b_3age_{it} + b_4tip_{it} + b_5stag_{it},$$

где $zarplata_{it}$ – месячная зарплата; $educ_{it}$ – уровень образования; gen_{it} – пол; age_{it} – возраст; tip_{it} – тип населенного пункта; $stag_{it}$ – рабочий стаж. Перед началом анализа все переменные были стандартизированы.

Оценка коэффициентов объединенной модели с использованием обычного метода наименьших квадратов (МНК) (рис.1) а также со случайными (рис. 2) и с фиксированными (рис. 3) эффектами произведена в пакете GRETL [2].

Объединенная модель:

$$Y_{it} = \alpha + X_{it}\beta + \varepsilon_{it}$$

Модель 1: Объединенный (pooled) МНК, использовано наблюдений - 1100
Включено 100 пространственных объектов
Длина временного ряда = 11
Зависимая переменная: zarplata

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
const	0,000000	0,0265847	0,0000	1,0000	
educ	0,278786	0,0292369	9,535	9,31e-021	***
gen	-0,449602	0,0287823	-15,62	8,31e-050	***
age	-0,266458	0,0882079	-3,021	0,0026	***
tip	-0,0688156	0,0274829	-2,504	0,0124	**
stag	0,252382	0,0888044	2,842	0,0046	***
Среднее зав. перемен	0,000000	Ст. откл. зав. перемен	1,000000		
Сумма кв. остатков	850,4996	Ст. ошибка модели	0,881715		
R-квадрат	0,226115	Испр. R-квадрат	0,222578		
F(5, 1094)	63,92934	P-значение (F)	1,34e-58		
Лог. правдоподобие	-1419,350	Крит. Акаике	2850,699		
Крит. Шварца	2880,718	Крит. Хеннана-Куинна	2862,055		
Параметр rho	0,618206	Стат. Дарбина-Вотсона	0,680773		

Рис. 1. Объединенная модель

Значения коэффициентов R -квадрат = 0,23 и исправленного R -квадрат = 0,22 невелики, что, во-первых, типично для такого рода данных, а во-вторых, связано с рядом не учтенных в данной базе факторов. Таких как: престиж диплома учебного заведения, оценки за время обучения, данные об отраслях, где заняты респонденты, и т.д. Однако величина F -теста = 63,9 позволяет судить об адекватности уравнения регрессии и возможности считать модель значимой.

Модель с фиксированными эффектами (*fixed effects model*):

$$Y_{it} = \alpha_i + X_{it}\beta + \varepsilon_{it}, \alpha_i = z_i \alpha$$

Модель 2: фиксированные эффекты, использовано наблюдений - 1100
Включено 100 пространственных объектов
Длина временного ряда = 11
Зависимая переменная: zarplata

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
const	0,000000	0,0157682	0,0000	1,0000	
educ	0,236779	0,0187982	12,60	7,33e-034	***
gen	-0,432029	0,0175788	-24,58	1,30e-104	***
age	-0,373464	0,0554530	-6,735	2,77e-011	***
tip	-0,0615034	0,0197196	-3,119	0,0019	***
stag	0,205482	0,0564104	3,643	0,0003	***
Среднее зав. перемен	0,000000	Ст. откл. зав. перемен	1,000000		
Сумма кв. остатков	272,1331	Ст. ошибка модели	0,522973		
LSDV R-squared	0,752381	В пределах R-квадрат	0,455228		
LSDV F(104, 995)	29,06993	P-значение (F)	3,9e-236		
Лог. правдоподобие	-792,6067	Крит. Акаике	1795,213		
Крит. Шварца	2320,535	Крит. Хеннана-Куинна	1993,946		
Параметр rho	-0,071192	Стат. Дарбина-Вотсона	1,927111		

Рис. 2. Модель с фиксированными эффектами

Модель со случайными эффектами (*random effects model*):

$$Y_{it} = X_{it}\beta + \alpha_i + m_i + \varepsilon_{it}$$

Модель 3: Случайные эффекты (GLS), использовано наблюдений - 1100
Включено 100 пространственных объектов
Длина временного ряда = 11
Зависимая переменная: zarplata

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
const	0,000000	0,0615111	0,0000	1,0000	
educ	0,239610	0,0191361	12,52	5,71e-036	***
gen	-0,433372	0,0179632	-24,13	1,35e-128	***
age	-0,365796	0,0565472	-6,469	9,87e-011	***
tip	-0,0619391	0,0198748	-3,116	0,0018	***
stag	0,210243	0,0574781	3,658	0,0003	***
Среднее зав. перемен	0,000000	Ст. откл. зав. перемен	1,000000		
Сумма кв. остатков	876,0158	Ст. ошибка модели	0,894435		
Лог. правдоподобие	-1435,608	Крит. Акаике	2883,215		
Крит. Шварца	2913,234	Крит. Хеннана-Куинна	2894,572		
Параметр rho	-0,071192	Стат. Дарбина-Вотсона	1,927111		

Рис. 3. Модель со случайными эффектами

Основные результаты исследования представлены в таблице 1, содержащей коэффициенты при переменных (в скобках под ними их стандартные ошибки). Звездочками помечены значимые переменные. Указаны стандартные ошибки для каждой модели.

Таблица 1

Результаты оценок трех моделей

	Обычная МНК-модель	Модель с фиксированными эффектами	Модель со случайными эффектами
Константа	0 (0,02)	0 (0,015)	0 (0,061)
Уровень образования	0,278*** (0,029)	0,236*** (0,018)	0,239*** (0,019)
Пол	-0,449*** (0,028)	-0,432*** (0,017)	-0,433*** (0,017)
Возраст	-0,266*** (0,088)	-0,373*** (0,055)	-0,365*** (0,056)
Тип населенного пункта	-0,068** (0,027)	-0,061*** (0,019)	-0,061*** (0,019)
Рабочий стаж	0,252*** (0,088)	0,205*** (0,056)	0,210*** (0,057)
Стандартная ошибка модели	0,882	0,523	0,894

В представленных трех моделях регрессии коэффициенты при всех переменных статистически значимы (принят стандартный уровень значимости 0,95), но при переменных «уровень образования» и «рабочий стаж» ещё и положительны. Следовательно, можно заключить:

– более высокий уровень образования ассоциируется с более высоким уровнем дохода, что не является вполне очевидным фактом в экономике РФ;

– у работника с большим рабочим стажем доход больше, что вполне логично.

Для выбора наилучшей среди оцененных моделей было использовано: три теста [1]: тест «на различие констант в группах», тест Breusch-Pagan (Бриша-Пэгана) и тест Hausman (Хаусмана) (см. рис. 4).

```

Тест на различие констант в группах -
Нулевая гипотеза: Группы имеют общие константы
Тестовая статистика:  $F(99, 995) = 21,3604$ 
p-значение =  $P(F(99, 995) > 21,3604) = 3,63492e-185$ 
Тест Бриша-Пэгана (Breusch-Pagan) -
Нулевая гипотеза: Дисперсия специфических для наблюдений ошибок = 0
Асимптотическая тестовая статистика: Хи-квадрат(1) = 2076,53
p-значение = 0
Тест Хаусмана (Hausman) -
Нулевая гипотеза: ОМНК оценки состоятельны
Асимптотическая тестовая статистика: Хи-квадрат(5) = 59,3751
p-значение = 1,63619e-011

```

Рис. 4. Результаты тестов

По результатам теста «на различие констант в группах», который сравнивает модель с фиксированными эффектами и обычную МНК-модель, нулевая гипотеза (отсутствуют фиксированные эффекты) отвергается, так как эмпирическое *p-значение* = $3,6 \cdot 10^{-185}$ намного меньше любого разумного уровня значимости. Вывод: модель с фиксированными эффектами предпочтительнее.

По результатам теста Бриша-Пэгана (Breusch-Pagan), который сравнивает модель со случайными эффектами и обычную МНК-модель, нулевая гипотеза (отсутствуют случайные эффекты) отвергается, так как эмпирическое *p-значение* = 0 намного меньше любого разумного уровня значимости. Вывод: модель со случайными эффектами предпочтительнее.

По результатам теста Хаусмана (Hausman), который сравнивает модель со случайными эффектами и модель с фиксированными эффектами, нулевая гипотеза (ОМНК оценки, которые получаются в модели со случайными эффектами, состоятельны) отвергается, так как эмпирическое *p-значение* = $1,6 \cdot 10^{-15}$ намного меньше любого разумного уровня значимости. Вывод: модель с фиксированными эффектами предпочтительнее.

Кроме этого, из таблицы 1 видно, что стандартные ошибки для каждой переменной в модели с фиксированными эффектами и для самой модели меньше, чем для двух других.

В итоге, проанализировав три теста, выбираем модель с фиксированными индивидуальными эффектами, что совпадает и с содержательными соображениями: переменные «пол» и «тип населенного пункта» не меняются со временем, слабо меняются со временем и большая часть остальных переменных, в том числе и уровень образования, поскольку образование люди получают в основном в молодом возрасте.

Литература

1. Балаш В.А., Балаш О.С. Модели линейной регрессии для панельных данных: учеб. пособие. – М., 2002. – 65 с.

2. Ратникова Т.А., Фурманов К.К. Анализ панельных данных и данных о длительности состояния: учеб. пособие. —М.: ВШЭ, 2014. — 376 с.

3. Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ. URL: <https://www.hse.ru/rf/mls/spss> (дата обращения: 25.12.2019).

L.A. Grigoryan, G.S. Evdokimova
Smolensk State University

ESTIMATION OF THE EQUITY SIZE REGRESSION EQUATION

Keywords: *panel data; salary; the level of education; RLMS; Gretl; least squares method; fixed effect; random effect.*

Abstract. *Based on data from the Russian Monitoring of the Economic Situation and Public Health (RLMS), the article presents a linear regression model of the dependence of wages on a number of factors, including the level of education. For this, three models for processing panel data were proposed: a combined OLS model, a model with fixed effects, and a model with random effects. The necessary calculations were carried out using the GRETl package.*

Г.С. Евдокимова, Н.С. Мишина
Смоленский государственный университет

УДК 519.25

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗА ЧИСЛЕННОСТИ БЕЗРАБОТНЫХ В ЦФО РФ

Ключевые слова: *нейронные сети; безработица; Центральный федеральный округ Российской Федерации; обработка данных в Statistica.*

Данная статья включает в себя анализ численности граждан, входящих в категорию безработных, имеющих регистрацию в государственных учреждениях службы занятости, а также получающих пособие по безработице за 2012-2019 годов в Центральном федеральном округе Российской Федерации. Цель данного исследования состоит в прогнозировании числа безработных на 2020 год в ЦФО РФ при помощи инструментов нейронных сетей.

Безработица представляет собой социально-экономическое явление, характеризующееся отсутствием участия части экономического населения в общественном производстве. Особенность явления заключается в том, что люди стремятся получать доход, работая по найму, но при этом по различным причинам не имеют возможности устроиться на работу. Ситуация с занятостью населения в разных округах страны различается. Высокий уровень безработицы наблюдается в Северо-Кавказском Федеральном округе, наиболее низкий уровень – в Центральном федеральном округе. По данным Росстата за 2018 год, общая численность рабочей силы в ЦФО Российской Федерации составила 21400,7 человек, 599,7 – безработные. Уровень безработицы в данном округе составил 2,9%. Что касается отдельных субъектов, то город Москва обладает наиболее низкими показателями безработицы, а самыми высокими – Ярославская область.

В настоящее время использование нейронных сетей в качестве инструмента анализа и прогнозирования данных набирает обороты. Главными причинами большой популярности данного метода является их способность к самообучению и эффективность при моделировании процессов нелинейного характера.

В качестве исходной базы были взяты месячные данные о численности безработных граждан, зарегистрированных в государственных учреждениях службы занятости и получающих пособие по безработице в период с 2012 по 2019 год включительно [3]. Построив график данного временного ряда, можно отметить, что временной ряд характеризуется убывающим трендом и наличием сезонной составляющей (рис. 1).

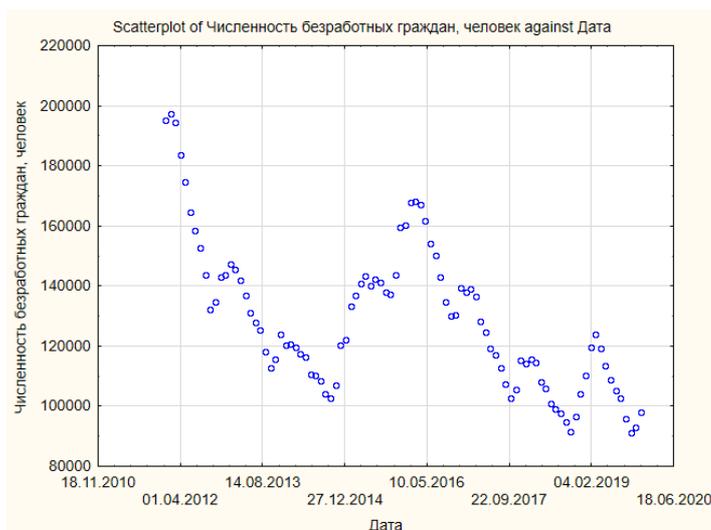


Рис. 1. График численности безработных граждан, в период с 2012 по 2019 год на территории ЦФО РФ

Проведя предварительный графический подбор модели, можно заключить, что линия, построенная по методу взвешенных наименьших квадратов, лучше остальных аппроксимирует временной ряд. Подтвердим наличие сезонности с помощью спектрального анализа Фурье [1]. Данный анализ позволяет построить график периодограммы в зависимости от периода (рис. 2). Графически можно выявить период регистрируемой численности безработицы на территории ЦФО РФ, который в данном случае приблизительно равен 12 месяцам, что говорит о годовой периодичности.

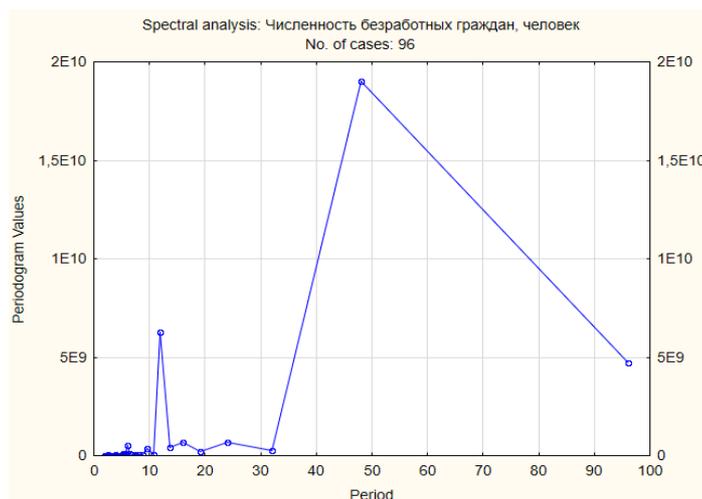


Рис. 2. График периодограммы регистрируемой численности безработицы на территории ЦФО РФ

Построение нейросетевых моделей производилось в программе STATISTICA в режиме регрессии. В качестве типов архитектуры нейронных сетей были отобраны: метод многослойного персептрона (*MLP*) и радиальная базисная функция (*RBF*). Далее было пройдено два режима обучения с помощью модуля пользовательская нейронная сеть и метода многократных подвыборок. Результат отбора двух самых значимых моделей представлен в таблице 1.

Таблица 1

Результат построения нейросетевых моделей

№п/п	Net. name	Train.perf.	Test perf.	Training error	Test error
1	MLP 12-8-1	0.950214	0.978404	2388269	5217695
2	MLP 12-2-1	0.949222	0.975602	2730276	5356419

Net. name – это название сети, состоящее из типа архитектуры (*MLP* – многослойный персептрона) и входных (12), скрытых и выходных слоев. Train.perf. отображает коэффициент детерминации. Test perf. – тестовая составляющая, а validation perf. – контрольная составляющая. Эффективность модели характеризуется приближенностью к единице значений тестовой и контрольной

оставляющих [2]. Проанализировав графики для каждой построенной нейронной сети и проверив их на адекватность, можно сделать вывод о том, что MLP 12-2-1 является наиболее близкой к нормальному распределению и соответственно более адекватной (рис. 3-4).

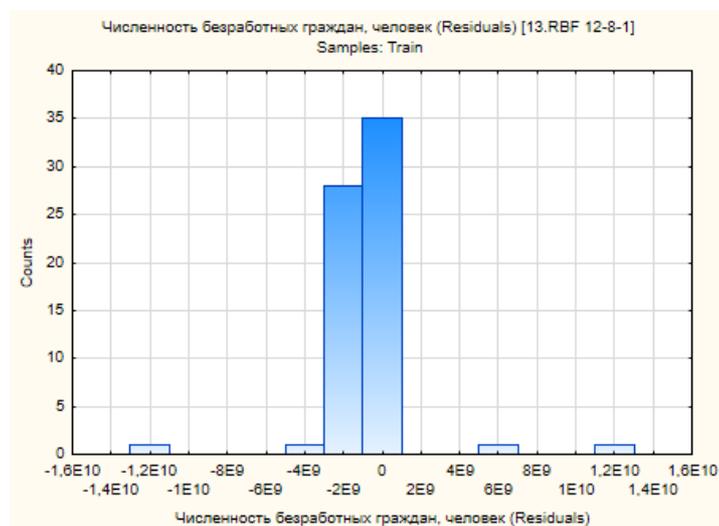


Рис. 3. График нормальности остатков нейросетевой модели MLP 12-8-1

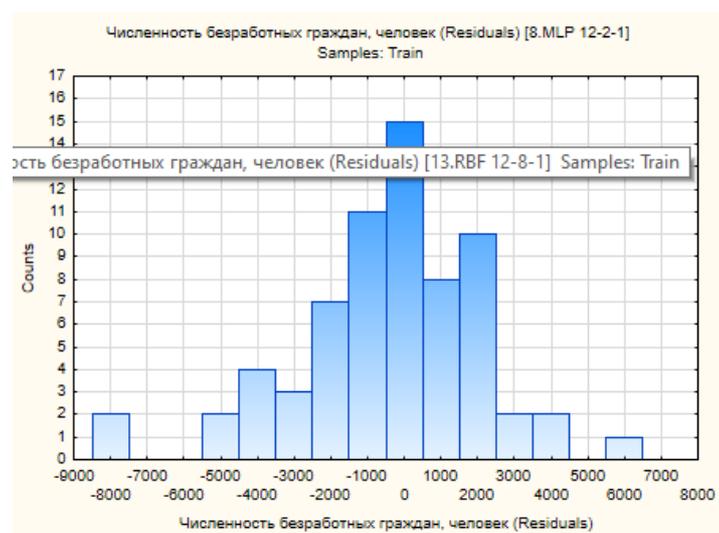


Рис. 4. График нормальности остатков нейросетевой модели MLP 12-8-1

Составим прогноз численности безработных граждан, зарегистрированных в государственных учреждениях службы занятости и получающих пособие по безработице на 2020 год в ЦФО РФ. Построим график исходных значений временного ряда и предсказанных значений. Красным цветом обозначены прогнозные значения (рис. 5).

Как видно из графика, фактические и эмпирические значения численности безработных граждан, зарегистрированных в государственных учреждениях службы занятости и получающих пособие по безработице в период с 2012 по 2019, практически совпадают, что подтверждает адекватность модели. Для более

наглядного представления выведем результат прогноза в табличной форме (см. табл. 2).



Рис. 5. График исходного временного ряда и результат прогноза

Таблица 2

Результат построения нейросетевых моделей

Период	Численность безработных граждан, человек	Период	Численность безработных граждан, человек
01.2020	107884,9	07.2020	108164,7
02.2020	113208,5	08.2020	105157,8
03.2020	117463,4	09.2020	99602,1
04.2020	116714,8	10.2020	94022,8
05.2020	113739,4	11.2020	93256,8
06.2020	110404,8	12.2020	99283,8

Таким образом, метод прогнозирования с помощью нейронных сетей показывает тенденцию снижения уровня безработицы. Кроме того, наблюдаются небольшое изменение в сторону увеличения числа безработных в весенний период и снижение в последних месяцах года. Поскольку на явление безработицы оказывает воздействие сразу несколько различных факторов, прогноз на долгосрочный период может иметь менее точную значимость. В то же время построение прогнозных моделей, в том числе и долгосрочных, помогает при построении политических курсов развития данной социально-экономической области.

Литература

1. Боровиков В.П. Популярное введение в современный анализ данных в системе STATISTICA: учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2013. – 288 с.
2. Сажин Ю.В. Анализ временных рядов и прогнозирование. – Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2013. – 192 с.
3. Федеральная служба государственной статистики. — <http://www.gks.ru/>.

G.S. Evdokimova, N.S. Mishina
Smolensk State University

APPLICATION OF NEURAL NETWORKS FOR FORECASTING THE NUMBER OF UNEMPLOYED IN THE CFD OF THE RUSSIAN FEDERATION

Keywords: *neural networks; unemployment; central federal district of the Russian Federation, data processing in statistica.*

Abstract. *This article includes an analysis of the number of citizens falling into the category of unemployed who are registered in state employment service institutions, and who received unemployment benefits from 2012 to 2019. in the central federal district of the Russian Federation. The purpose of this study is to predict the number of unemployed for 2020 in the Central Federal District of the Russian Federation using the tools of neural networks.*

А.О. Захаренков, Г.С. Евдокимова
Смоленский государственный университет

УДК 004.02 +519.23

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЯЗЫКОВ RUBY, R И PYTHON В ВОПРОСАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Ключевые слова: *Python; Ruby; R; кластеризация методом k-средних; анализ больших данных; реализация математики в языках программирования.*

В статье рассматривается проблема выбора языка с реализацией компьютерной математики для задачи анализа больших наборов данных. Проводится сравнительная характеристика между языками Python, Ruby и R в задаче кластеризации на основе данных о заказе такси в Uber.

Постановка задачи: В настоящее время возникла потребность в решении задач анализа больших данных. В связи с ростом данных возникает необходимость в их быстрой и эффективной обработке – решения задач кластеризации данных, нахождения и распознавания образов, а также прогнозирования на основе уже имеющихся данных. Не стоит забывать и про машинное обучение, так как сейчас все это,

скорее, необходимость, чем модные слова. Однако при задаче обработки данных возникает вопрос – какой инструмент для обработки данных выбрать? Ввиду отсутствия многих решений анализа данных на рынке можно сделать вывод о том, что существует необходимость анализа имеющихся инструментов для работы с данными.

Анализ существующих технологий на рынке: Первоначальный вопрос, встающий перед каждым аналитиком данных: использовать готовое решение или создать свое. Если говорить о готовых решениях, то одними из самых популярных являются Statistica, Wolfram Mathematica, Stata и SPSS. У проприетарных решений есть как существенные плюсы (удобство использования, удобный экспорт и импорт данных), так и значительные недостатки: закрытость исходной системы, высокая цена. Минусом также является и то, что в данных системах отсутствует какая-либо возможность интеграции с готовыми приложениями. Это может стать существенным минусом, если какие-то отдельные элементы системы анализа данных планируется интегрировать с уже имеющимися приложениями. В таком случае стоит воспользоваться какими-то из языков программирования. Прежде всего стоит отметить, что вопросы анализа данных можно решать абсолютно на любом языке программирования. Однако в случае отсутствия готовых инструментов для анализа данных их придется реализовывать самому, что будет очень трудозатратным. Не стоит забывать и вопросы организации памяти, когда вычисляемая процедура в одном языке может занимать больше времени и памяти в другом, что не критично для приложений с малыми данными, однако же в случае работы с большими данными может вылиться в проблемы утечки памяти и медленно работающих приложений. Самыми важными факторами при выборе языка программирования для работы с данными в настоящий момент являются: 1) возможность интегрирования в web-приложения, 2) организация удобной работы с разными форматами данных «из коробки», 3) быстрое и нетребовательное к памяти выполнение анализа данных. По опросам в Интернете, лидирующими языками являются Java, Python, R. В ряде случаев еще упоминают C++, C# и другие компилируемые языки. В этой статье в вопросах анализа данных будут сравниваться языки Ruby, Python и R, которые являются скриптовыми и поддерживают работу с web.

Обзор основных библиотек для работы с анализом данных

Ruby – на текущий момент язык Ruby представляет развивающуюся область в сфере обработки данных. Главным проектом, целью которого является реализация всех недостающих библиотек для работы с данными, является SciRuby [1]. Репозиторий проекта насчитывает в себе около 36 библиотек, а одной из самых значимых и

популярных является **Daru** (что расшифровывается как Data Analysis in Ruby). Основными преимуществами библиотеки являются:

- поддержка двух структур данных – Vector и DataFrame;
- поддержка временных рядов;
- понятный и гибкий API для работы с данными, легкий импорт и экспорт данных из/в Excel, CSV, SQL.

В Ruby присутствует библиотека kmeans-clusterer для проведения кластерного анализа данных. За визуализацию данных отвечают библиотеки Nyaplot и Gnuplot.

Надо отметить: несмотря на то, что в Ruby присутствует базовый набор библиотек анализа данных, многие исследователи отмечают, что большая часть этих библиотек находится в неподдерживаемом состоянии и обновлялась много лет назад. Последнее обновление SciRuby произошло в 2017 году. Была выпущена в релиз библиотека Nmatrix, отвечающая за реализацию векторной алгебры на языке Ruby. Однако полностью списывать Ruby со счетов не стоит из-за сильного инструментария работы с web и базами данных, а также возможностей интеграции с R. Ruby может использоваться и для визуализации результатов анализа.

R – это язык программирования для статистической обработки данных и работы с графикой, а также свободная программная среда вычислений с открытым исходным кодом в рамках проекта GNU. Язык является объектным – любой программой элемент в нем имеет набор атрибутов – именованный список значений, определяющих его. Возможности R обширны : присутствует богатый функционал для работы с данными, создания графиков и т.п. Единственное, о чем стоит упомянуть отдельно, – это возможность интегрирования результатов анализа в web-приложения, так как на данный момент интегрируемость одной системы с другой является важным фактором. Существует ряд библиотек, организующих работу с данными на уровне REST-архитектуры. Это jsonlite, которая позволяет сериализовывать объекты языка R в JSON, и htr - реализация REST-запросов (POST, GET, PATCH...). Сам функционал создания web-приложений (по сравнению с языком R) отсутствует, но есть возможность вывода графиков в web: с помощью фреймворка RShiny, который позволяет публиковать графики в web без навыков web-разработки.

Python – высокоуровневый язык программирования общего назначения, ориентированный на повышение производительности разработчика и читаемости кода. На данный момент Python является одним из самых популярных языков анализа данных. Это обусловлено простым синтаксисом языка, а также наличием хороших библиотек анализа данных (в том числе и поддерживаемых Google): Numpy, Pandas, SciPy, Scikitlearn, Tensorflow, Keras и др. В нем также присутствует

функционал публикации графиков посредством интерактивных блокнотов Numpy и с помощью использования Matplotlib. Результаты анализа можно нативно интегрировать в web-приложения на основе фреймворка Django. В Python также присутствует функционал для работы с REST-клиентами.

По популярности поисковых запросов языков Python, R и Ruby располагаются следующим образом (рис. 1) [2]:

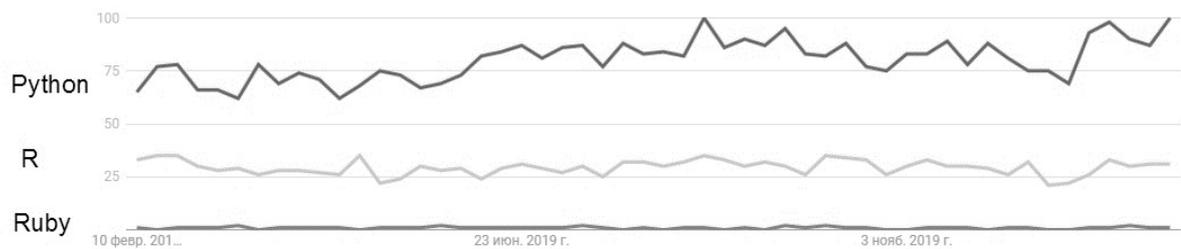


Рис. 1. Расположения языков в сочетании с запросом DataScience по всему миру (Google Trends)

Как видно из графика, лидирующее положение занимает Python, за ним следует язык R и внизу находится язык Ruby.

Постановка задачи для сравнительного анализа

В качестве задачи для сравнительного анализа рассматривался набор данных по точкам окончания заказов в сервисе Uber за 2014 год (с августа по сентябрь), который состоял из: геоданных о точках нахождения машин, даты заказа, уникального идентификатора. Возможный подход к анализу таких данных – это кластеризация, позволяющая ответить на многие вопросы, такие как: растет ли число заказов в определенных районах по месяцам, нужно ли открывать дополнительные таксопарки, в каких районах по каким идентификаторам находится больше всего запросов и др.

В наборе исследуемых данных около 4,5 млн уникальных значений [3]. Число кластеров предполагается взять равным 5 – по числу административных районов Нью-Йорка.

Тесты проводились на следующей конфигурации:

- процессор: i5-3570 (3.4 Ghz, 4 ядра);
- оперативная память: 8 gb;
- операционная система: Windows 7.

Для замера памяти и времени загрузки данных использовались внутренние библиотеки измерения производительности кода. В Python использовалась библиотека pandas для загрузки данных и Scikit-learn для проведения кластеризации методами k-средних. В R использовалась стандартная библиотека. В Ruby использовалась библиотека kmeans-clusterer. При этом каждый алгоритм был запущен несколько раз, затем

было вычислено среднее время сходимости и количество итераций. Получены следующие результаты.

Ruby – кластеризация проводилась с помощью библиотеки `kmeans-clusterer`. Все данные в память загрузить не удалось. Поэтому кластеризация проводилась только по данным за один месяц. Время загрузки данных в память составило в среднем 20 сек. Процедура кластеризации на указанной конфигурации заняла около 5 мин. Количество памяти, занятой в результате этой операции, 36 мб. Результаты кластеризации сложно сравнить с такими же, полученными с помощью R и Python, поскольку при исследовании использована часть выборки данных. Однако время проведения кластеризации значительно больше, чем в других языках.

R – для замера времени использовалась нативная библиотека `tictoc()`. Для выполнения кластеризации использовалась функция `kmeans` [4]. Время загрузки данных в память в среднем составило 3,63 сек. Время разделения по столбцам и применения алгоритма кластеризации заняло 8,2 секунды. Финальный объект, в котором хранятся результаты кластеризации занимает 18,14 мб в памяти. Объем занимаемых в памяти данных, по которым проводилась кластеризация, составил 272 мб.

Python – импорт данных с диска был проведен за 3,65 сек. В это время также включено объединение данных в одну большую таблицу. Общее время кластеризации на данном объеме данных 6,67 сек. При этом использовался метод `MiniBatchKMeans`, позволяющий загружать данные по частям в память, а не обрабатывать их целиком. В случае, если же использовать классический метод `Kmeans`, то время кластеризации составляет в среднем 21 сек. [5]. Все результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение результатов в разбиении по кластерам

Язык	Данные по кластеризации		
	Время загрузки в память (среднее)	Время кластеризации (среднее)	Объем занимаемой памяти (среднее)
Ruby (частичный набор данных)	6 сек	12 сек	6.63 мб – загруженные данные, 176 байт – объект с данными о кластеризации, 12 кб - центроиды
Python	3,65 сек	6,67 сек	72 мб – загруженные данные, 32 кб – объект, совершающий кластеризацию, 136 кб – итоговые данные
R	3,72 сек	8,2 сек	72,55 мб – загруженные данные, 18,14 – объект, совершающий кластеризацию, 1072 – итоговые данные

Результаты кластеризации (полученные центроиды) представлены на рисунке 2.

[[40.72234108 -73.99360702]	1 40.66562 -73.76264	[40.7672534221946, -73.97212569414815]
[40.79589474 -73.86192237]	2 40.76478 -73.97349	[0.0, 0.0]
[40.6740122 -73.71067561]	3 40.79732 -73.87536	[40.714911139970084, -73.99306685361525]
[40.759876 -73.96963409]	4 40.72918 -74.00407	[40.84953118644073, -73.59973122881362]
[40.71660833 -74.2102625]]	5 40.68738 -73.96423	[40.712730741031784, -73.82905413562561]

Python

R

Ruby

Рис. 2. Полученные центроиды в Python, R, Ruby.

Заключение: По результатам тестов нет особенных различий между языками Python и R. Ruby значительно отстает от них в вопросах реализации алгоритма кластеризации. А большая требовательность к памяти не позволяет загрузить все данные для анализа сразу. Как Python, так и R равноценны в вопросах кластеризации на больших данных. Данные, полученные в ходе сравнительного анализа трех языков, могут быть полезны при прогнозировании количества запроса на такси по районам.

Литература

1. SciRuby: Tools for Scientific Computing in Ruby. – URL: <http://sciruby.com/> (дата обращения^ 10.01.2020).
2. Google Trends: Статистика по запросам Data Science Ruby, Data Science R, Data Science Python. – URL: <https://trends.google.ru> (дата обращения: 10.01.2020).
3. Набор данных о заказах в Uber. – URL: <https://www.kaggle.com/fivethirtyeight/uber-pickups-in-new-york-city> (дата обращения: 10.01.2020).
4. R for Data Science: Import, Tidy, Transform, Visualize, and Model Data / Grolemund G., Wickham H. – Sebastopol: O’Reilly Media, 2017. – 520 p.
5. Parker D. Learn Python: A Crash Course On Python Programming And How To Start Coding With It. Learn The Basics Of Machine Learning And Data Analysis. Publ. by Parker Damon, 2019. – 191 p.

A.O. Zakharenkov, G.S. Evdokimova
Smolensk State University

COMPARATIVE ANALYSIS OF RUBY, R, AND PYTHON LANGUAGES IN DATA ANALYSIS ISSUES USING THE EXAMPLE OF THE CLUSTERING PROBLEM

Keywords: *Python; Ruby; R; k-means clustering; big data analysis; programming languages math realization.*

Abstract. *This article covers the issue of choosing programming language with math realisation for big data analysis. The comparative*

characteristic between Ruby, R and Python on clustering problem example using Uber pickup dataset is also given.

К.А. Кравченко, Г. А. Благодатский, А. Н. Копысов
Ижевский государственный технический университет

УДК: 004.623; 621.371

РАЗРАБОТКА СХЕМЫ И АВТОМАТИЗАЦИЯ КОНСОЛИДАЦИИ БАЗ ДАННЫХ С ТРОЙНЫМ ИДЕНТИФИКАЦИОННЫМ КЛЮЧОМ ДЛЯ АЛГОРИТМА ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ КОГНИТИВНОГО РАДИО

Ключевые слова: консолидация; базы данных; структура; данные; иерархия; донор; акцептор; массив; метод анализа базы данных; когнитивное радио.

В статье приведена система консолидации данных о результатах экспертиз системы когнитивного радио. Приведена постановка задачи на консолидацию баз данных, содержащих иерархические структуры типа «дерево», приведен алгоритм решения задачи консолидации. В результате реализации механизма консолидации данных с помощью информационной системы решены проблемы совместного доступа к данным экспертиз, проведен анализ групповых мнений экспертов, проведена «очистка» данных моделей системы когнитивного радио, создан инструмент подготовки данных для проведения экспертиз по методу Дэлфи.

Введение. Цель исследования состоит в том, чтобы создать модель системы когнитивного радио, то есть модель системы, способную получать информацию о среде своей эксплуатации, географического положения и реагировать на эту информацию [1; 2]. Решение этой задачи включает в себя построение иерархической модели, где радиоэлементы оцениваются экспертами по системе Т. Саати [1] совместно с механизмом их применения. Однако, при проведении экспертиз появляется много разрозненных локальных баз данных с однотипной структурой и большим количеством ошибок (из-за человеческого фактора). Встал вопрос о консолидации данных. Существуют разные системы управления базами данных (СУБД) [2-3]. В СУБД имеются механизмы консолидации [3; 7]. Тем не менее данные СУБД не решали главной проблемы – консолидации данных без потерь

иерархической структуры описываемой системы [1]. Иерархия оцениваемых параметров когнитивной системы задается тройным идентификационным ключом таблицы Hierarchy (см. табл. 1). Для решения данной задачи была предложена схема, приведенная ниже.

Постановка задачи. Имеется массив данных с тремя ID(id_node, id_parent, id_h), которые имеют следующую структуру.

Система элементов имеет древовидную иерархию, то есть у каждого элемента есть только один родитель и может быть несколько потомков. В табличном виде получится следующее.

Таблица 1

Реляционное представление иерархии

Id_node	Id_parent	Id_h
Корень иерархии	null	1
Родитель 1	Корень иерархии	1
Родитель 2	Корень иерархии	1
Элемент 1	Родитель 1	1
Элемент 2	Родитель 2	1
Элемент 3	Родитель 3	1
Элемент 4	Родитель 4	1

(Уточнение: в данной таблице приведена одна иерархия, но их может быть гораздо больше.)

Задача заключается в приведении множества баз данных с идентичной структурой к одной целостной. При этом требуется сохранение порядка вхождения элементов в иерархию. Важно отметить, что в одной такой базе данных содержится информация группы таблицы (Hierarchy, Variants, Elements), что затрудняет консолидацию.

Анализ структуры данных для консолидации. Имеется типовая база данных для иллюстрации процесса консолидации. База данных имеет три таблицы (Hierarchy, Variants, Elements).

Таблица 2

Таблица [Hierarchy]

id_node	id_parents	Id h	elements
1	null	1	5
2	1	1	1
3	2	1	2
4	2	1	3
5	null	2	5
6	5	2	1
7	5	2	2

Таблица 3

Таблица [Variants]

Id	Name
1	Режим 1
2	Режим 2

Таблица [Elements]

элемент	название
5	Элемент 5
1	Элемент 1
2	Элемент 2
3	Элемент 3

В ходе наблюдения можно увидеть связь двух нижних таблиц с верхней. Id_h связан с Name (из Variants, связь помечена красным), elementsc названием (из таблицы элементов, связь помечена зелёным). Серыми коричневым показывается связь id_node и id_parent. При репликации нескольких таких баз данных все ID должны не потерять структуру нумерации.

Алгоритмы программы для консолидации. Подходя к сути, встаёт вопрос: как реплицировать данные? Для этого нужно: среда разработки MSVS 17, Access, язык C# и язык запросов SQL.

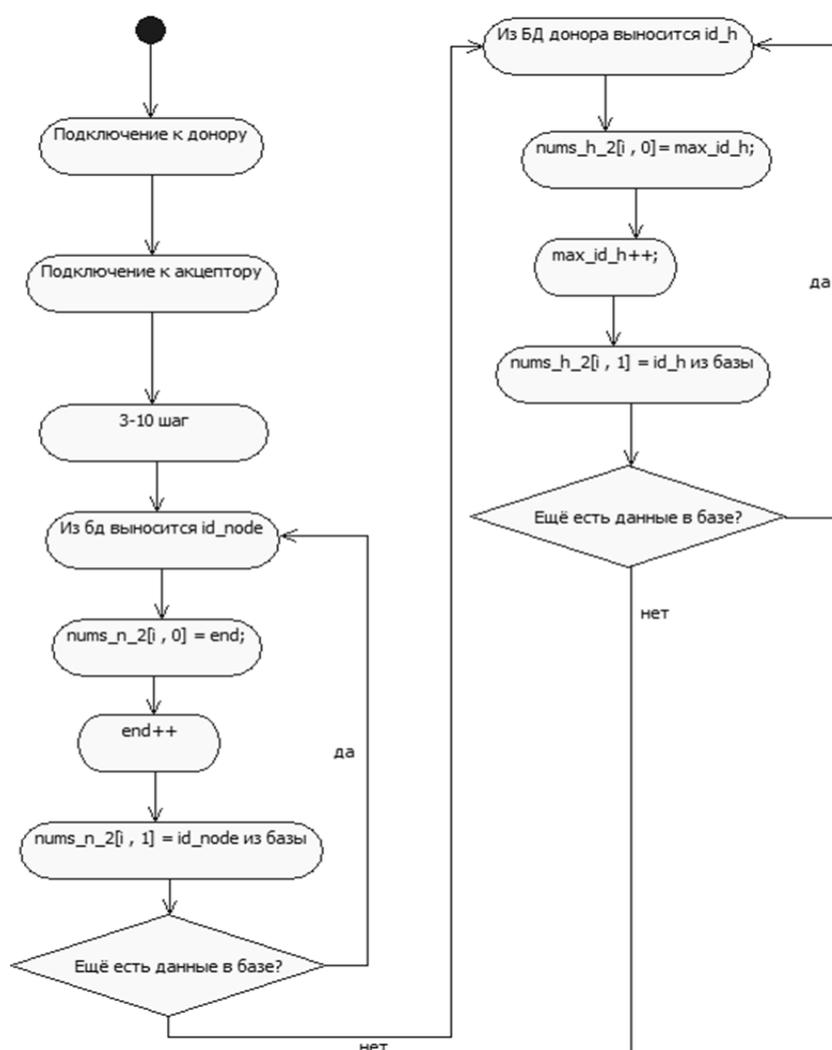


Рис. 1. Блок-схема процесса консолидации (часть 1)

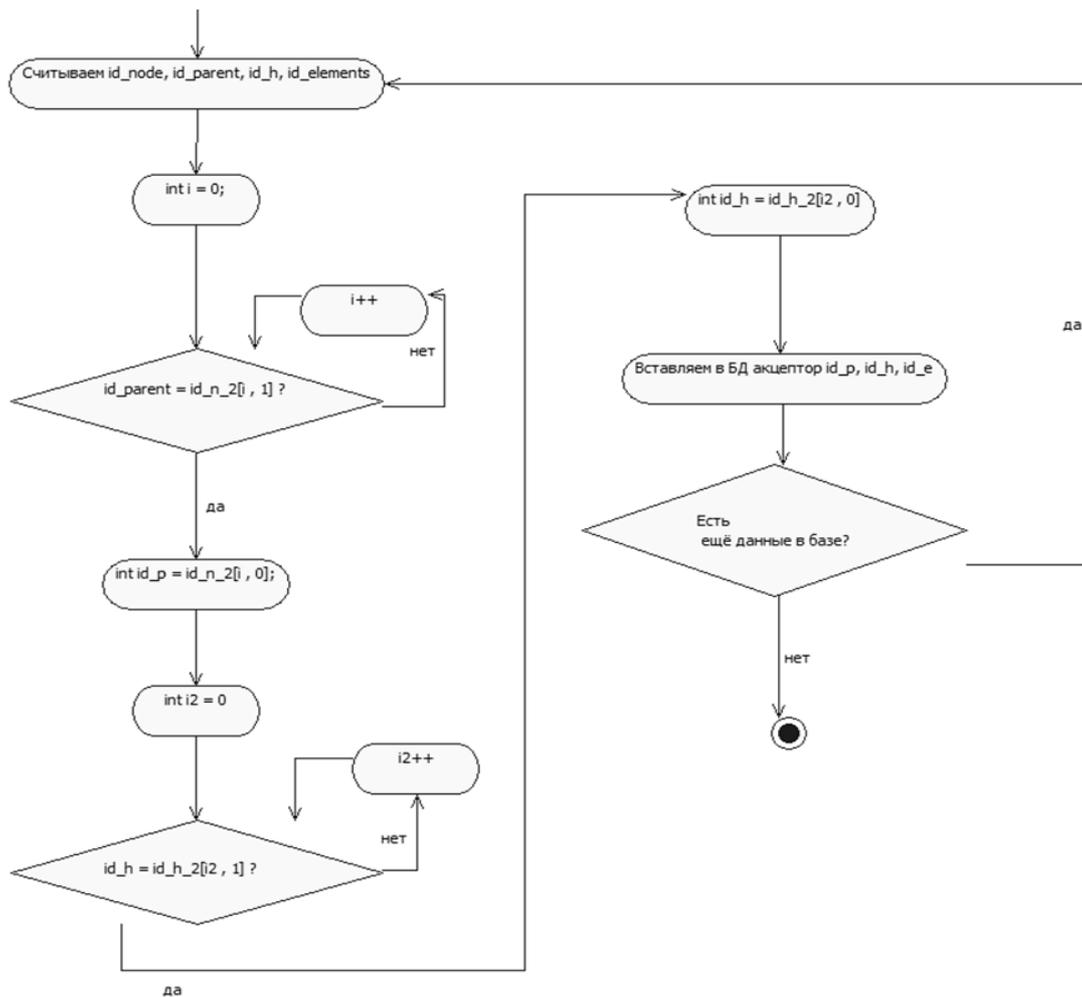


Рис. 2. Блок-схема процесса консолидации (часть 2)

Важный момент. Имеется база данных «акцептор», которая синхронизирует данные с других баз, и база данных «донор», которая отправляет данные.

Для облегченного понимания приводится псевдокод [8]:

- 1) подключение к БД донора;
- 2) подключение к БД акцептора;
- 3) с помощью запроса SELECT выбирается максимально большой id_node из таблицы [Hierarchy] у акцептора, записывается в переменную count;
- 4) с помощью запроса SELECT выбирается максимально большой id_h из таблицы [Hierarchy] у акцептора, записывается в переменную max_id_h;
- 5) с помощью запроса SELECT выбирается количество всех членов из таблицы [Hierarchy] у донора, записывается в переменную max_upd;
- 6) с помощью запроса SELECT выбирается количество id_h из таблицы [Hierarchy] у донора, записывается в переменную max_upd_h;
- 7) заполняем таблицу [Variants] у акцептора, запрос SELECT выбирается из таблицы [Hierarchy] у донора id_h и из таблицы [Variants] Name.

После проделанных процедур вставляем всё в таблицу [Variants] у акцептора;

8) переменная `end = count+1` (одно из первых трудностей, что таблица является автозаполняемой, поэтому дабы избежать проблем, с повторяющимися `id_node` в массиве данных, который будет в следующих пунктах;

9) Создаются массивы:

```
Nums_n[max_upd]
Nums_h[max_upd_h]
Nums_n_2[max_upd, 2]
Nums_p[max_upd, 2]
Nums_h_2[max_upd_h, 2];
```

10) с помощью запроса `SELECT` выбирается из БД донора `id_node` (записывается в массив `nums_n []`), выбирается также `id_h` (записывается в массив `nums_h []`);

11) с помощью цикла `for ()` формируется массив данных `id_n_2 []`, где первый элемент будет новым `id_node` (принадлежащему к базе данных акцептора), а второй – старым `id_node` (из базы данных донора). `id_node` из БД акцептора (новый) будет формироваться переменной `end`, к которой после каждого обращения к ней добавляется 1 (`end++`);

12) таким же способом, как в 11 пункте, формируется массив данных `nums_h_2 []`, где первый элемент новый `id_h`, а второй является старым;

13) пока мы считываем данные из донора (`id_node`, `id_parent`, `id_h`, `id_element`), работает цикл `while ()`, который за один проход считывает циклами `for ()` `id_node`, `id_parent` и `id_h` из БД донора, сопоставляет их с данными из массивами.

А) Цикл `for ()` для `id_parent`:

Когда цикл проходит через второй элемент, то есть старый `id_node`, и если он равен `id_parent` из считываемой БД, то соответственно первый элемент массива есть `id_node` в БД акцепторе. Записываем его в переменную `var_p`.

Б) Цикл `for ()` для `id_h`:

Когда цикл проходит через второй элемент, то есть старый `id_h`, и если он равен `id_h` из считываемой БД, то соответственно первый элемент массивы есть `id_h` в БД акцепторе. Записываем его в переменную `var_h`;

14) Вставляем все элементы в таблицу акцептора.

Схема процесса консолидации представлена на рисунках 1, 2.

Результаты программы «Слияние». В данном примере проводится консолидация данных.

Акцептор

Таблица 5

Таблица [Hierarchy]

Id_node	Id_parents	Id_h	Id_e
1	null	1	15
2	1	1	16
3	1	1	17
4	2	1	18

Таблица 6

Таблица [Variants]

Id	Name
1	Режим 1

Таблица 7

Таблица [Elements]

элемент	название
15	Элемент 15
16	Элемент 16
17	Элемент 17
18	Элемент 18

Донор

Таблица 8

Таблица [Hierarchy]

Id_node	Id_parents	Id_h	Id_e
1	null	1	15
2	1	1	16
6	2	1	17
5	1	1	18

Таблица 9

Таблица [Variants]

Id	Name
1	Режим 1

Таблица 10

Таблица [Elements]

элемент	название
15	Элемент 15
16	Элемент 16
17	Элемент 17
18	Элемент 18

Результат

Таблица 11

Консолидированная таблица [Hierarchy]

Id_node	Id_parents	Id_h	Id_e
1	null	1	15
2	1	1	16

3	1	1	17
4	2	1	18
5	null	2	15
6	5	2	16
7	6	2	17
8	5	2	18

Таблица 12

Консолидированная таблица [Variants]

Id	Name
1	Режим 1
2	Режим 1

Таблица 13

Консолидированная таблица [Elements]

элемент	название
15	Элемент 15
16	Элемент 16
17	Элемент 17
18	Элемент 18

Закключение. В результате работы получен инструмент для консолидации данных о иерархических структурах. Инструмент позволяет решить ряд задач.

1. На основе локальных баз данных создана база данных для сетевого подключения.

2. Проведена очистка данных. «Удалены» (помечены ярлыком «попате») элементы, отсутствующие в эталонном справочнике элементов.

3. Создан инструмент подготовки данных для проведения экспертиз по методу Дэлфи [9].

4. Получены средние групповые оценки по большой выборке экспертов.

Работа выполнена в рамках гранта ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова» БГА/20-28-09.

Литература

1. Благодатский Г.А., Копысов А.Н., Хворенков В.В., Батулин И.С. Анализ иерархической модели автоматизированной системы управления параметрами радиолний когнитивной радиосистемы. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36776104>
2. Консолидация данных с нескольких листов. <https://support.office.com>.
3. Передовые методы консолидации. <https://www.oracle.com/technetwork/ru/database-private-cloud-wp-360048-ru.pdf>.
4. Консолидация данных из баз филиалов в центральной базе с агрегированием. <https://qna.habr.com/q/190863>.

5. Консолидация финансовых данных из нескольких организаций. <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dynamics365/business-central/finance-consolidated-company-reporting>.
6. Дёмкин В. Путь к полной консолидации. <https://www.osp.ru/os/2012/02/13012857>.
7. Консолидация данных. https://studbooks.net/2047183/informatika/konsolidatsiya_dannyh.
8. Псевдокод. <https://ru.wikipedia.org/wiki>.
9. Метод «Дельфи». <https://ru.wikipedia.org/wiki>.
10. Дубнов П.Ю. Access 2000. Проектирование баз данных - М.: ДМК, 2000. - 272 с.
11. Диго С.М. Базы данных. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 592 с.
12. Голицына О.Л. Базы данных. — М.: Форум; Инфра-М, 2007. — 399 с.
13. Уэлдон Дж. Администрирование баз данных — М.: Финансы и статистика, 1984. — 207 с.
14. Яргер Р.Дж. MySQL и mSQL: базы данных для небольших предприятий и Интернета. — М.: СПб: Символ-Плюс, 2000. — 560 с.
15. Благодатский Г.А., Копысов А.Н., Хворенков В.В., Батурин И.С. Алгоритм управления режимами работы системы когнитивного радио. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41503553>.
16. Blagodatsky G.A., Kopysov A.N., Khvorenkov V.V., Baturin I.S. Research and development of hierarchical models of automated control systems for the parameters of the radio-line of the cognitive radio system. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41505351>.

K.A. Kravchenko, G.A. Blagodatsky, A.N. Kopysov
Izhevsk State Technical University

**DEVELOPMENT OF A SCHEME AND AUTOMATION OF
DATABASE CONSOLIDATION WITH A TRIPLE IDENTIFICATION
KEY FOR AN ALGORITHM FOR EFFECTIVE MANAGEMENT
OF A COGNITIVE RADIO SYSTEM**

Keywords: *consolidation; databases; structure; data; hierarchy; donor; acceptor; array; database analysis method; cognitive radio.*

Abstract. *The article presents a system for consolidating data on the results of examinations of the cognitive radio system. The problem statement for consolidation of databases containing hierarchical structures of the "tree" type is given, and the algorithm for solving the problem of consolidation is given. As a result of implementation of the mechanism of consolidation data using the information system solved problems and sharing expertise, the analysis of the group of experts conducted by "cleaning" the data models of the system of cognitive radio, a tool of data preparation for the examination on a method of Delfi.*

В.Р. Кристалинский¹, Г.В. Константинов²

¹ Смоленский государственный университет

²ВА ВПВО ВС РФ

УДК 51-7

О МОДЕЛИРОВАНИИ МЕТОДОВ НАВЕДЕНИЯ ЗЕНИТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ РАКЕТ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *математическое моделирование; система Wolfram Mathematica*

В статье рассматривается использование системы компьютерной математики Wolfram Mathematica для моделирования полета зенитной управляемой ракеты, наводимой на цель с использованием метода трех точек или метода пропорционального сближения. Задача построения траектории ракеты является достаточно сложной, а использование системы компьютерной математики позволяет сделать модель весьма наглядной, что может быть использовано как при обучении курсантов, так и в ходе научных исследований.

Методы наведения зенитных управляемых ракет делятся на две группы: методы, применяемые в командных системах, и методы самонаведения (см. [1]). К первой группе относятся метод трех точек и методы упреждения, ко второй группе – методы параллельного и пропорционального сближения и некоторые другие. При исследовании траекторий полета ракет строится математическая модель движения ракеты, наводящейся тем или иным способом для различных условий обстановки. Модель эта является достаточно сложной, и поэтому при ее исследовании целесообразно использовать системы компьютерной математики, в частности систему Wolfram Mathematica. С ее помощью можно легко решить уравнение движения ракеты, построить ее траекторию, решить ряд других задач, связанных с полетом ракеты, например, определить время встречи с целью, расход горючего, испытываемые ракетой перегрузки и т.д. В настоящей работе рассматривается наведение ракеты методом трех точек и методом пропорционального сближения.

Предлагаемая методика изучения процесса наведения ракеты может быть использована при проведении научных исследований, имеющих целью изучить поведение ракеты при работе по цели с повышенными скоростными и маневренными характеристиками. Кроме того,

определение перегрузок, возникающих в ходе полета ракеты, позволяет определить границы зоны поражения ЗРК, что важно при проведении конструкторских работ. Работа с системой Wolfram Mathematica позволит, на наш взгляд, существенно ускорить проведение исследований за счет простоты, с которой осуществляется изменение условий задачи и наглядности получаемых результатов. При многократном повторении моделирования наведения ракеты с различными исходными данными будет происходить накопление статистического материала, на основе которого можно в дальнейшем строить выводы.

Возмущения, возникающие в ходе полета ракеты под действием случайных факторов, в работе не учитываются.

Как известно, методом трех точек называется такой метод наведения, при котором на всей траектории полета центр масс ракеты находится на прямой, соединяющей пункт управления с центром масс цели [1].

Кинематическую траекторию ракеты будем определять в прямоугольной системе координат. В качестве начала координат выберем точку, в которой находится пункт управления, ось абсцисс направим по горизонтали, ось ординат по вертикали в плоскости движения цели и ракеты.

Предположим, что параметрические уравнения движения цели задаются соотношениями:

$$\begin{cases} X = X(t); \\ Y = Y(t). \end{cases} \quad (1)$$

Параметрические уравнения движения ракеты имеют вид:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases} \quad (2)$$

Скорость ракеты в момент времени t равна $v(t)$.

Так как пункт управления, ракета и цель в момент времени t должны находиться на одной прямой, то должно выполняться соотношение:

$$\begin{vmatrix} X(t) & Y(t) & 1 \\ x(t) & y(t) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Кроме того, очевидно, в любой момент времени t выполняется соотношение:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = v(t)^2. \quad (4)$$

Из соотношений (3) и (4) находим $x'(t)$ и $y'(t)$. Решая полученную систему дифференциальных уравнений при начальных условиях:

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

находим параметрические уравнения движения ракеты.

Полётное время до точки встречи находим, решая уравнение

$$(X(t) - x(t))^2 + (Y(t) - y(t))^2 = 0. \quad (6)$$

Построим, например, параметрические уравнения движения ракеты и определим время до точки встречи, если скорость движения ракеты в определенные моменты времени известна и приведена в таблице.

Таблица 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v	700	550	510	480	450	400	375	350	325	310	300	293	286	280	275	270

Параметрические уравнения движения цели имеют вид:

$$\begin{cases} X(t) = 12000 - 500t; \\ Y(t) = 2000. \end{cases}$$

Построим программу для системы Wolfram Mathematica, решающую данную задачу.

Вводим параметрические уравнения траектории цели:

$$\begin{aligned} X[t_] &= 12000 - 500t; \\ Y[t_] &= 2000. \end{aligned}$$

Строим интерполяционную функцию для скорости

$$\begin{aligned} V &= \{\{0,700\}, \{1,550\}, \{2,510\}, \{3,480\}, \{4,450\}, \{5,400\}, \{6,375\}, \{7,350\}, \{8,325\}, \{9,310\}, \\ &\{10,300\}, \{11,293\}, \{12,286\}, \{13,280\}, \{14,275\}, \{15,270\}\}; \\ V &= \text{Interpolation}[V]. \end{aligned}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений, определяющих траекторию движения ракеты:

$$\begin{aligned} P[t_] &= \text{Det}[\{\{X[t], Y[t], 1\}, \{x[t], y[t], 1\}, \{0, 0, 1\}\}] \\ H &= \text{NSolve}[\{x'[t]^2 + y'[t]^2 == V[t]^2, P[t] == 0\}, \{x'[t], y'[t]\}]; \\ H1 &= x'[t]/.H[[2]]; \\ H2 &= y'[t]/.H[[2]]. \end{aligned}$$

Находим параметрические уравнения движения цели:

$$\{x1, y1\} = \text{NDSolveValue}[\{x'[t] == H1, y'[t] == H2, x[0] == 0, y[0] == 0\}, \{x, y\}, \{t, 15\}, \text{Method} \rightarrow \text{"ImplicitRungeKutta"}].$$

Указание на численный метод, который используется при решении системы дифференциальных уравнений, оказывается необходимым, поскольку при использовании метода по умолчанию решение

оказывается недостаточно гладким, что впоследствии сказывается на вычислении перегрузок.

Находим полётное время до точки встречи:

```
p=FindRoot[(X[t]-x1[t])^2+(Y[t]-y1[t])^2==0,{t,9}];
14.2194.
```

Строим траектории движения ракеты и цели:

```
r1=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,t1}];
r2=ParametricPlot[{X[t],Y[t]},{t,0,t1}];
Show[r1,r2]
```

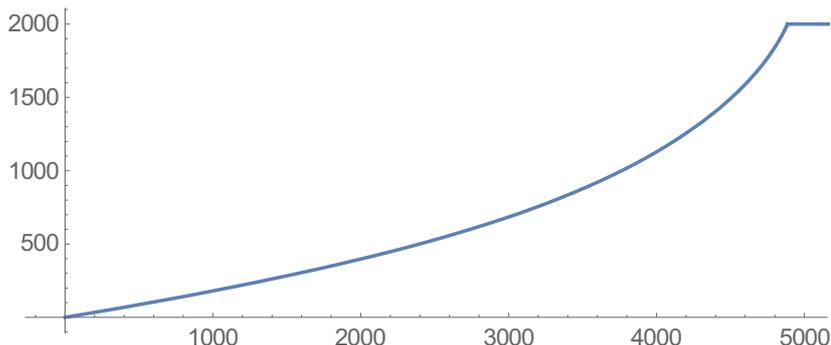


Рис. 1

На рисунке 1 показаны траектории движения ракеты и цели, построенные системой.

Таким образом, поражение цели произойдет через 14,2 секунды.

Находим нормальные перегрузки:

```
k=Abs[x'[t]*y''[t]-x''[t]*y'[t]]/V[t];
```

На рисунке 2 показана зависимость нормальных перегрузок ракеты от времени.

```
Plot[k,{t,0,t1}]
```

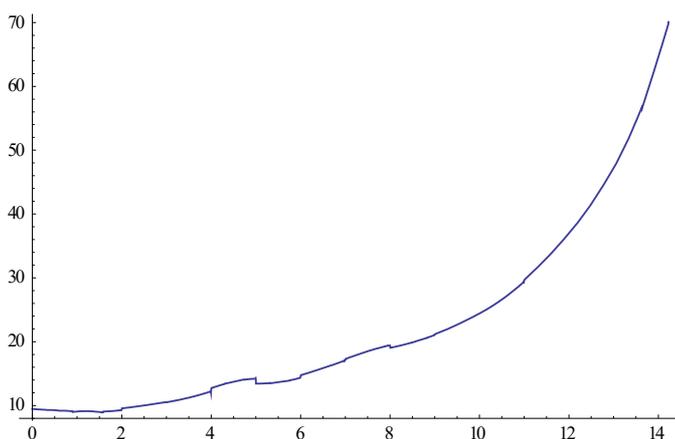


Рис. 2

Рассмотрим теперь один из методов самонаведения – метод пропорционального сближения.

Методом пропорционального сближения называется метод наведения, при котором в течение всего времени полёта ракеты к цели

угловая скорость поворота вектора скорости ракеты остаётся пропорциональной угловой скорости линии ракета – цель (см. [1]).

Пусть $\varphi(t)$ – угол между линией ракета–цель в момент времени t и горизонтальной плоскостью, $\theta(t)$ – угол, между вектором скорости ракеты в момент времени t и плоскостью горизонта, $d(t)$ – расстояние между ракетой и целью в момент времени t . Можно доказать, что рассматриваемые величины удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (см. [1])

$$\begin{cases} \frac{d d(t)}{dt} = -V_u \cos(\varphi(t)) - V_p \cos((k-1)\varphi(t) + \theta_0 - k\varphi_0); \\ \frac{d \varphi(t)}{dt} = V_u \sin(\varphi(t)) - V_p \sin((k-1)\varphi(t) + \theta_0 - k\varphi_0). \end{cases}$$

Использование системы Mathematica позволяет легко получить решение полученной системы дифференциальных уравнений как для постоянного k , так и для переменного.

Рассмотрим следующий пример.

Цель движется равномерно и прямолинейно со скоростью $V_0 = 400$ м/сек.

Начальные условия самонаведения ракеты: $t = 0$;

$$d(0) = 40000 \text{ м}; \varphi_0 = \frac{\pi}{6}; \theta_0 = \text{ArcTan}\left[\frac{5000}{40000}\right]; V_{p0} = 1000 \text{ м / сек.}$$

Скорость ракеты задаётся таблицей 2.

Таблица 2

t, с	0	5	10	15	20	25	30	35	40
V_p , м/с	1000	1100	1200	1300	1300	1300	1200	1200	1100

Коэффициент пропорциональности $k = 4$.

Запишем программу в системе Wolfram Mathematica для решения данной задачи.

Вводим начальные данные.

$$V=400;k=4;\theta_0=\pi/6;\varphi_0=\text{ArcTan}[1/8];d_0=\text{Sqrt}[40000^2+5000^2].$$

Строим сплайн-функцию, выражающую зависимость скорости движения ракеты от времени.

$$t1=\{0,5,10,15,20,25,30,35,40\};$$

$$v1=\{1000,1100,1200,1300,1300,1300,1200,1200,1100\};$$

$$U=\text{Table}\{t1[[i]],v1[[i]]\},\{i,1,9\};$$

$$V1=\text{Interpolation}[U].$$

Решаем систему дифференциальных уравнений для определения полярных координат ракеты.

```
{d1,φ1}=NDSolveValue[{d'[t]==-V Cos[φ[t]]-V1[t]Cos[(k-1)φ[t]+θ0- k φ0],
d[t]φ'[t]==V Sin[φ[t]]-V1[t]Sin[(k-1)φ[t]+
θ0-kφ0],d[0]==d0,φ[0]==φ0},{d,φ},{t,0,40}].
```

Находим время встречи ракеты и цели.

```
p=FindRoot[d1[t]==0,{t,30}]
{t→25.2945}
t1=t/.p[[1]]
25.2945.
```

На промежутке $[0,t_1]$ находим значение прямоугольных координат ракеты.

```
S[t_]={40000-V t,5000};
x[t_]=S[t][[1]]-d1[t] Cos[φ1[t]];
y[t_]=S[t][[2]]-d1[t]Sin[φ1[t]].
```

Строим траекторию движения ракеты.

```
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,t1}]
```

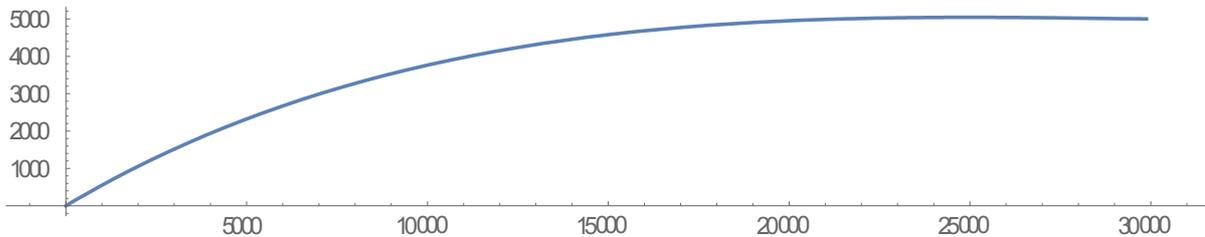


Рис. 3

На рисунке 3 показана траектория движения ракеты, построенная системой.

Таким образом, поражение цели произойдет через 21,3 сек. после старта ракеты.

Наряду с научными исследованиями моделирование методов наведения зенитных управляемых ракет с помощью систем компьютерной математики может использоваться на занятиях по математике и по прикладным дисциплинам с курсантами и на занятиях по математическому и компьютерному моделированию со студентами.

Литература

1. Неупокоев Ф.К. Стрельба зенитными ракетами.– М.: Воениздат, 1991.– 343 с.

V.R. Kristalinskii¹, G.V. Konstantinov²

¹Smolensk State University

²Military Academy of the anti-aircraft defense systems of the Armed Forces of the Russian Federation

**ON SIMULATION OF ANTI-AIRCRAFT GUIDED MISSILE
GUIDANCE METHODS USING THE WOLFRAM
MATHEMATICA SYSTEM**

Keywords: *mathematical modeling; Wolfram Mathematica system.*

Abstract. *The article considers the use of the Wolfram Mathematica computer mathematics system for modeling the flight of an anti-aircraft guided missile aimed at a target using the three-point method or the proportional approach method. The task of constructing the trajectory of a rocket is quite complex, and the use of a computer mathematics system allows you to make the model very clear, which can be used both for training cadets and in the course of scientific research.*

А.Г. Суханова

Смоленский государственный университет

УДК 519.86

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В СИСТЕМЕ МАТНСАД

Ключевые слова: *инвестиционный портфель; многокритериальная оптимизация; метод уступок, ожидаемая доходность; вероятностное пространство.*

В работе использованы возможности системы Mathcad для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля по двум критериям: доходности портфеля и его риску. Задача оптимизации решена методом уступок. Критерии оптимизации считаем не равнозначными. За наиболее важный критерий принят показатель доходности инвестиционного портфеля. В работе показан случай, когда отклонение показателя доходности портфеля от его максимального значения составляет 30%. Для построения модели оптимального портфеля было определено вероятностное пространство рынка ценных бумаг.

Проблема эффективного вложения денежных средств по-прежнему является актуальной и в настоящее время. Данной проблеме посвящено много работ, среди которых [1 – 4] и другие.

В данной работе рассмотрена задача многокритериальной оптимизации инвестиционного портфеля методом уступок. Рассмотрен случай оптимизации портфеля по двум критериям: его доходности и риску. Экспертным путем выбирался процент уменьшения показателя от своего экстремального значения (уступка) по критерию доходности портфеля.

Автором ранее рассматривался вопрос построения эффективного инвестиционного портфеля, обеспечивающий максимальную доходность при заданном уровне риска [5].

Понятие инвестиционного портфеля связано с распределением активов и диверсификацией. Инвестиционный портфель можно представить как совокупность капиталовложений в различные активы для снижения риска получения убытков. В результате инвестирования средств в различные активы повышается вероятность того, что инвестором не будет получен выигрыш и проигрыш на всех активах одновременно.

В выборку вошли акции 10 компаний эмитентов акций: Транснефть, Норникель, Магнит, Верхнесалдинское МПО, ФосАгро, Башнефть, Мегафон, Черкизово, Северсталь, ЛСР.

Пусть x_i – доли акций в портфеле ценных бумаг, где $i = \overline{1..n}$. В данном случае $n = 10$. Будем считать критерии оптимизации не равнозначными и наиболее важным критерием определим доходность инвестиционного портфеля.

Математическую модель задачи оптимизации инвестиционного портфеля с учетом двух критериев: его доходности и риска представим в виде (1) – (3).

Требуется найти значения переменных x_i , удовлетворяющих системе ограничений (1)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1..n} \end{cases} \quad (1)$$

и обращающих в максимум функцию доходности портфеля (2)

$$Md(x) = \sum_{i=1}^n x_i d_i, \quad (2)$$

где d_i – ожидаемые доходности акций с отклонением от экстремального значения на 30% и в минимум функцию риска портфеля (3)

$$Mr(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j Cov_{i,j}, \quad (3)$$

где $Cov_{i,j}$ – ковариация доходностей акций.

На рисунках 1 – 3 представлено решение сформулированной задачи оптимизации инвестиционного портфеля в системе Mathcad. На рисунке 1 можно увидеть начало документа оптимизации инвестиционного портфеля. На данном рисунке представлено задание

весов векторного пространства в соответствии с таблицей 1, задана матрица доходностей акций, соответствующих каждому состоянию рынка ценных бумаг, задаются ожидаемые доходности d_i и ковариационная матрица доходностей Cov .

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \\
 & i := 1..10 \quad n := 10 \quad j := 1..10 \\
 & p := \begin{pmatrix} 29.3 \\ 42.6 \\ 28.1 \end{pmatrix} \quad \text{Веса векторного пространства} \\
 & \text{Матрица доходностей акций эмитентов} \\
 & da := \begin{pmatrix} -0.175 & -0.203 & 0.214 & -0.024 & -1.025 & -3.870 & -1.206 & -0.067 & -0.265 & -0.707 \\ 0.583 & 0.190 & 0.397 & 0.804 & 0.667 & -1.321 & 0.418 & 0.193 & 0.881 & 0.025 \\ 0.821 & 1.917 & 2.143 & 3.011 & 0.197 & 3.255 & 0.424 & 0.786 & 1.261 & 0.071 \end{pmatrix} \\
 & i := 1..3 \quad d_i := \frac{\sum_{k=1}^3 (da_{k,i} \cdot p_k)}{100} \quad Cov_{i,j} := \frac{\sum_{k=1}^3 [(da_{k,i} - d_i) \cdot (da_{k,j} - d_j) \cdot p_k]}{100}
 \end{aligned}$$

Рис.1. Задание матрицы доходностей, построение вектора ожидаемых доходностей и ковариационной матрицы доходностей акций в системе Mathcad

При построении модели оптимального портфеля были использованы значения индекса РТС [6]. За период 12 месяцев 2013 – 2014 годов по значениям доходностей индекса РТС было построено вероятностное пространство рынка ценных бумаг (табл. 1).

Таблица 1

Вероятностное пространство рынка ценных бумаг

Возможные состояния рынка ценных бумаг, S_i	Характеристика состояния	Вероятность состояния, $P_i(\%)$
S_1	«плохое» состояние, при изменении значений индекса РТС $< -4\%$;	29,3
S_2	«удовлетворительное» состояние, изменения значений индекса РТС лежат в интервале от -4% до $0,15\%$	42,6
S_3	«хорошее» состояние – при изменении значений индекса РТС $> 0,15\%$	28,1

На рисунке 2 представлено построение инвестиционного портфеля с максимальной доходностью без учета его риска.

$$Md(x) := \sum_{i=1}^n (x_i \cdot d_i) \quad \text{Задание функции доходности портфеля}$$

$$nz := (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad x := nz^T \quad \text{Начальные значения поиска } x$$

Given

$$x \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x := \text{Maximize}(Md, x) \quad Md(x) = 1.182 \quad \text{Показатель максимальной доходности}$$

Рис. 2. Построение оптимального портфеля по критерию максимизации его доходности без учета второго критерия – риска портфеля в системе Mathcad

На рисунке 3 представлено окончание документа по построению оптимального портфеля. Здесь производится оптимизация по второму критерию, находясь доли вложения в акции, при которых обеспечивается минимальный риск портфеля. Оптимизация выполняется с учетом отклонения на 30% от максимального значения по первому критерию – доходности портфеля.

Делаем уступку по доходности $k := 0.7$ коэффициент уступки

$$ds := k \cdot Md(x) \quad ds = 0.827 \quad \text{Значение показателя доходности с учетом уступки}$$

$$Mr(x) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \cdot x_j \cdot Cov_{i,j}) \quad \text{Функция риска}$$

Given

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot d_i) = ds \quad x \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x := \text{Minimize}(Mr, x) \quad Mr(x) = 0.577 \quad \text{Показатель минимального риска}$$

$$x^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0.275 & 0.236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.489 & 0 \end{array} \quad \text{Доли вложения в акции}$$

Рис. 3. Построение оптимального портфеля с учетом двух критериев – доходности и риска в системе Mathcad

Из рисунков 1 – 3 видно, что если доля вложения в акции компании Магнит составит 0,275, в акции компании Верхнесалдинское МПО – 0,236 и в акции компании Северсталь – 0,489, то будет обеспечен минимальный риск такого портфеля, равный 0,577. Доходность такого портфеля при этом составит 0,827, что будет соответствовать ее отклонению от своего максимального значения на 30%.

Литература

1. Козловский А.Н. Управление портфелем инновационных проектов на промышленном предприятии: дис. ... канд. экон. наук. – СПб., Северо-Западный открытый технический университет, 2016. – 152 с.
2. Мосунова Т.Г. Комплекс адаптивных моделей управления портфелем ценных бумаг: автореф. дис. ...канд. экон. наук. – Иваново, 2008. – 22 с.
3. Недосекин А.О., Абдулаева З.И. Оптимизация бизнес-портфеля, содержащего реальные опционы // Аудит и Финансовый анализ. – 2013. – №1. – С. 249–253.
4. Недосекин А.О. Оптимизация портфеля торговых роботов на деривативах // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №6. – С. 416–422.
5. Суханова А. Г. Формирование эффективного инвестиционного портфеля средствами системы Mathcad // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. – Вып. 19. – С. 102–106.
6. finanz.ru. URL:<http://www.finanz.ru>.

A.G. Sukhanova

Smolensk State University

MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION OF THE INVESTMENT PORTFOLIO IN THE MATHCAD SYSTEM

Keywords: *investment portfolio; multi-criteria optimization; method of concessions; expected return; probabilistic space.*

Abstract. *The paper uses the capabilities of the Mathcad system to solve the problem of optimizing an investment portfolio based on two criteria: portfolio profitability and risk. The optimization problem is solved by the method of concessions. We consider the optimization criteria to be not equivalent. The most important criterion is the return on the investment portfolio. The paper shows a case when the deviation of the portfolio yield indicator from its maximum value is 30%. To build an optimal portfolio model, the probabilistic space of the securities market was determined.*

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОДХОДОВ В РАЗЛИЧНЫХ ДИСЦИПЛИНАХ

Ключевые слова: *расстояние; математическое моделирование; лингвистика; семантическая близость; социология.*

Во многих областях науки имеется возможность использовать схожие математические подходы для решения, казалось бы, различных задач. Неформальное определение понятия расстояния между объектами позволило применить универсальный математический аппарат в лингвистике, теории управления и социологии.

Введение. Одним из ключевых понятий математики является понятие расстояния между объектами. Оно применимо лишь к объектам метрических пространств, где верны аксиомы метрики. Однако если применить это понятие более широко, не требуя строгой аксиоматики, то открываются возможности его использования в различных областях науки, нередко далеких от точной математики. Рассматриваемые примеры из лингвистики, теории управления и социологии объединяет неформальное использование понятия расстояния между объектами, что дает возможность подключить вычислительные компьютерные методы для их анализа и решения смежных задач.

1. Верификация математической модели сложной радиотехнической системы. Математические модели позволяют проводить детальное исследование изучаемых систем, а также прогнозировать их поведение во всем диапазоне условий. Однако необходимым этапом разработки моделей является проверка их соответствия реальным системам, то есть верификация моделей. Только получив положительный ответ об адекватности, можно проводить исследования на математической модели и распространить получаемые результаты на функционирование исследуемой системы. Простыми словами, надо проверить соответствие результатов реальных экспериментов и численного моделирования. Для этого во всем диапазоне условий следует определить степень их соответствия, или «расстояние» между ними.

Рассмотрим эту задачу применительно к сложной автоматической технической системе, в которой есть объект управления и управляющая система (рис. 1). Поведение управляющей системы определяется как внешними условиями – регулярными и случайными, так и реакцией на

поведение объекта. В процессе натурального эксперимента регистрируются все входные и выходные параметры системы управления, фиксируется состояние внутренних параметров объекта управления и определяются внешние условия. Поэтапный анализ работы модели можно проводить методом многоуровневого моделирования и анализа результатов на каждом этапе [1], что дает ответ типа «соответствует» или «не соответствует», однако не отвечает на вопрос насколько соответствует, то есть не формирует численной характеристики степени соответствия результатов испытаний и моделирования. В этом случае предлагается ввести численную характеристику степени соответствия результатов, или «расстояние» между ними.

Поведение системы (и модели) определяется различными по физическому смыслу параметрами:

- начальными данными работы системы, которые выражаются некоторыми численными значениями и которые можно сравнить поэлементно по их отклонению;
- скачкообразным изменениями внутреннего состояния (так называемыми «разовыми командами»), которые можно сравнить по времени появления;
- поведением регистрируемых в процессе работы протекающих во времени внутренних параметров, сравнение которых производится либо по степени максимального различия в каждый момент времени, либо по отклонению параметров в среднем, либо по среднеквадратичному отклонению;
- итоговыми численными результатами работы, которые сравниваются аналогично начальным данным.



Рис. 1. Схема исследуемой системы

Например, для зенитного ракетного комплекса (и его математической модели) в качестве начальных данных можно рассматривать данные полетного задания, передаваемого на борт ракеты перед стартом, под разовыми командами понимаются, например, команды на переход в режим самонаведения, непрерывными внутренними параметрами являются координаты ракеты в пространстве, а итоговым результатом является величина пролета ракеты мимо цели.

Тогда в качестве «расстояния» между экспериментами (реальным экспериментом и его моделью) можно рассматривать численную величину

$$L = \sum_{i=1}^N \mu_i \frac{|t_{Si} - t_{Mi}|}{|t_{SiMax} - t_{SiMin}|} + \sum_{j=1}^K \gamma_j \frac{|x_{Sj} - x_{Mj}|}{|x_{SjMax} - x_{SjMin}|} + \sum_{p=1}^R \tau_p l_p, \quad (1)$$

где t_{Si} и t_{Mi} – времена появления разовых команд (числом N) в системе и модели, μ_i – весовые коэффициенты значимости, а в знаменателе первой дроби стоит масштабирующий коэффициент максимально возможного отклонения,

x_{Sj} и x_{Mj} – значения начальных данных и итоговых характеристик (общим числом K) в системе и модели, γ_j – весовые коэффициенты значимости, а в знаменателе второй дроби стоит масштабирующий коэффициент максимально возможного отклонения;

l_p – меры отклонения непрерывных процессов системы и модели (числом R), а τ_p – весовые коэффициенты значимости. Мету отклонения можно, например, определить как максимально возможное отклонение реального и модельного параметров y_p за время наблюдения $l_p = \max |y_{Sp}(t) - y_{Mp}(t)|$, приведенное к диапазону от 0 до 1.

Конечно, корректность функционала (1) зависит от определения весовых коэффициентов значимости, что всегда остается на совести разработчика.

Аналогичный подход при использовании понятия «расстояние» можно применять при анализе нескольких различных натуральных экспериментов – насколько их результаты похожи, или при оценке эффективности системы – насколько результаты близки к оптимальным.

2. Сравнение статей текста на основе семантической близости понятий. Задача возникла в ходе анализа «Византийского земледельческого закона» - памятника Византийского права VIII века. В последующие времена появился ряд текстов, про которые выдвигалась гипотеза об их заимствовании из указанного первоисточника, при этом рассматривались тексты на греческом языке и их перевод на русский. Для проверки этой гипотезы понадобилось провести сравнительный

анализ статей на предмет их сходства. Сравнение проводилось на основе семантической близости понятий, выраженной словами статей; был разработан и протестирован метод определения информационной близости исторического источника посредством сравнения их семантического поля [2].

Перед рассмотрением статей была разработана категориальная иерархическая структура понятий. Находящиеся на нижнем уровне понятия и соответствующие ему лексемы (например, вол, вола, волы) объединяются в обобщающие понятия (например, животноводство = животное или вол или баран). В свою очередь обобщающие понятия группируются в категории более высокого уровня.

Для непосредственного анализа статей использованы ключевые слова – обобщающие понятия, причем их общее число фиксировано. На основе лексико-морфологического анализа конкретной статьи определяется список ее лексем и на их основе набор ключевых слов. Степень сходства или различия двух статей (то есть «расстояние» между статьями) теперь можно определить численно:

– определяется число вхождений $\{x_i\}, \{y_i\}$ ключевых слов в первую и вторую статью;

– определяется функционал сходства

$$L_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i |x_i - y_i|}{\sum_{i=1}^N \mu_i |x_i + y_i|}, \quad (2)$$

где μ_i – весовой коэффициент значимости соответствующего ключевого слова, определяемый методом экспертных оценок, N – общее число ключевых слов.

Равенство или близость к нулю функционала сходства L_1 означает совпадение статей («расстояние» между ними мало), тогда как приближение к 1 означает значительное различие статей.

Наряду с рассмотренным функционалом сходства (1) возможно рассматривать функционал

$$L_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i |x_i^2 - y_i^2|}{\sum_{i=1}^N \mu_i |x_i^2 + y_i^2|}, \quad (3)$$

более чувствительный к отличиям в частотах появления ключевых понятий.

При данном методе основную роль играет корректное определение весовых коэффициентов ключевых слов. При рассмотрении сходства статей лишь по некоторой совокупности ключевых слов целесообразно

им присвоить большие коэффициенты, а для незначущих соответствующие коэффициенты обнулить.

Рассмотрим применение данного метода на примере сравнения четырех статей «Византийского земельного закона», приведенных в русском переводе.

1. Если кто-либо возьмет вола для работы и вол подойдет, пусть обследуют судьи, и если он подойдет на той работе, для которой его выпрашивал взявший вола, да будет неповинен; если же на другой работе подойдет, пусть отдает вполне здорового вола.

2. Если кто-либо рубящий в дубраве дрова не обратит внимание и дерево упадет и убьет вола, или осла, или какую-либо другую скотину, пусть отдаст голову за голову.

3. Если грызутся две собаки и хозяин одной ударит другую мечом, или палкой, или камнем, и если от этого удара собака ослепнет, или подойдет, или что-либо иное сопряженное с опасностью претерпит, то пусть убивший возместит ущерб ее хозяину.

4. Если кто-либо, имеющий сильного пса, разъяренного против себе подобных, направит сильного пса на более слабых и случится, какой-либо пес будет изувечен или подойдет, пусть возместит ущерб хозяину и получит 12 ударов плетью.

Для данных статей была определена категориальная структура понятий и вычислены коэффициенты сходства (при единичных весовых коэффициентах). Полученные результаты сведены в таблицу 1.

Приведенный пример показывает применимость введенного понятия «расстояние» в применении в отношении метода определения информационной близости исторического источника посредством сравнения их семантического поля.

Таблица 1

Сравниваемые статьи	1 - 2	1 - 3	1 - 4	2 - 3	2 - 4	3 - 4
Значение L_1	0,5	0,83	0,8	0,9	0,89	0,26
Значение L_2	0,55	0,93	0,92	0,96	0,95	0,33
Интерпретация	Сходны	Различны	Различны	Различны	Различны	Похожи

3. Исследование пищевых предпочтений студентов городов России. Университет Фукусимы (Япония) проводит работу по исследованию пищевых предпочтений студентов городов России (с 2017 по 2019 годы). В анкетировании принимали участие, в частности, студенты МИРЭА. Одним из основных вопросов, интересующих японских ученых, является вопрос о том, влияют ли данные о происхождении продуктов из района Фукусимы на уверенность студентов в их безопасности. Для корректной интерпретации результатов необходимо выделить различные группы студентов по

специфическим критериям, например, группы гурманов, интересующихся японской кухней, группы кулинаров и другие.

Здесь также уместно использовать неформальное понятие «расстояние» для оценки принадлежности испытуемым к группе. Для этого все вопросы анкеты следует разбить на качественные блоки. Каждый блок при этом отвечает за определенные свойства групп, например вопросы:

- где вы живете;
 - как часто готовите самостоятельно;
 - сколько тратите на еду;
 - что вы цените в еде;
- могут выделить группу, умеющую и любящую готовить.

Вопросы:

- были ли вы за границей;
 - какие национальные кухни вы знаете;
 - какие приправы вы любите –
- определяют группу, знающую и разбирающуюся в кулинарии.

Тогда в качестве критерия сходства двух испытуемых, или «расстояния» можно ввести функционал

$$L = \sum_{i=1}^N \mu_i |p_{i1} - p_{i2}|, \quad (4)$$

где p_{i1}, p_{i2} – значения признаков, определяющих выделяемую группу (числом N), μ_i – весовые коэффициенты признаков. Каждому из возможных ответов следует присвоить свой вес, например, на вопрос «как часто вы готовите еду» ответ:

- «почти каждый день» – 4 балла;
- «3-4 раза в неделю» – 3 балла;
- «иногда (несколько раз в месяц)» – 1 балл;
- «никогда» – 0 баллов.

При этом следует следить, чтобы ответы на все вопросы группы ранжировались одинаково, например, ответы, подтверждающие принадлежность, всегда имели большие значения признаков.

Так как в нашем случае определяется сходство по различным признакам, то целесообразно ввести понятие «расстояние для группы». Тогда в состав одной группы следует внести тех испытуемых, «расстояние по группе» между которыми мало.

Задача определения сходства усложняется, когда среди вопросов, характеризующих группу, имеются зависимости. Например, при определении «расстояния по доверию к продуктам из Фукусимы» при положительном ответе на вопрос «вы покупаете японские продукты питания» значимость вопроса «если бы продукты из Фукусимы появились в магазине, вы бы их купили» велика, а при отрицательном –

незначительна. В этом случае «расстояние по группе доверия продуктов из Фукусимы» выглядит следующим образом:

$$L = \left| \sum_{i=1}^N \mu_{i1}(p_{11}, \dots, p_{N1}) p_{i1} - \sum_{i=1}^N \mu_{i2}(p_{12}, \dots, p_{N2}) p_{i2} \right|, \quad (5)$$

где весовые коэффициенты признаков зависят от ответов испытуемого на все вопросы группы.

В этом примере знающий японскую кухню, умеющий готовить и доверяющий продуктам из Фукусимы испытуемый не должен быть в одной группе с не знающим о Фукусиме.

В качестве последнего примера использования неформального понятия расстояния можно привести способ ранжирования студентов по успеваемости не просто по количеству баллов, но и с учетом степени важности предмета (которую можно определять по количеству, например, часов лекций). Однако примеры студентов слишком тривиальны.

Заключение

Неформальное определение понятия «расстояние» дает возможность получать численные оценки таким качественным понятиям, как «совпадение», «схожесть», «различие», а также ввести частичное упорядочение элементов. Это особенно важно при компьютерной обработке данных. Интересно отметить, что в различных областях науки применение сходных математических подходов не только продуктивно, но и естественно.

Литература

1. Тихонова О.В. Многоуровневое моделирование сложных технических систем. Определение адекватности многоуровневых моделей радиотехнических систем // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Электронная вычислительная техника (ЭВТ). – Вып. 2. – 2009. – С. 109–122.
2. Вин Ю.Я., Гриднева А.Ю., Кондратьев Д.Е., Тихонова О.В. Концепция семантического поля исторического источника: основные положения // Информационный бюллетень ассоциации «История и компьютер». № 31, Сентябрь 2003. – М., 2003 – С.166–177.

O.V. Tikhonova

Russian Technological University MIREA

ON THE UNIVERSALITY OF MATHEMATICAL METHODS IN VARIOUS SUBJECTS

Keywords: *distance; mathematical simulation; linguistics; semantic proximity; sociology.*

Abstract. *It is possible to use similar mathematical approaches to solve seemingly different problems in many areas of science. The informal definition of the concept of distance between objects allowed us to apply a universal mathematical apparatus in linguistics, control theory, and sociology*

В.И. Усачев, Л.А. Григорян
Смоленский государственный университет

УДК 519.25

ПРОВЕДЕНИЕ МЕТА-АНАЛИЗА В ПАКЕТЕ STATA

Ключевые слова: *мета-анализ; effect size; Stata; forest plot; funnel plot; metan; metafunnel.*

В статье рассматривается техническая сторона проведения варианта мета-анализа с использованием пакета Stata.

Что такое мета-анализ (meta-analysis)? Исследования в медицине, социологии, экономике и т.д. часто производятся по следующей схеме:

- 1) выбирается множество объектов;
- 2) на каждом из рассматриваемых объектов фиксируются значения некоторого набора признаков и численно выраженный результат их воздействия (в статистике он называется *effect size*) [1];
- 3) ну и, конечно же, все это оформляется в виде научной публикации (статья, монография, заметка или сообщение на конференции).

Когда таких исследований накапливается много, а в современном мире по интересным для практики проблемам очень много, то сразу возникает следующий вопрос: а являются ли все они согласованными? То есть совпадают (статистически!) ли эти самые *effect size*'ы? Можно спросить и по-другому: а как объединить все эти исследования? Вот на эти вопросы и призван ответить мета-анализ в категориях численных характеристик в отличие от ранее практиковавшихся систематических обзоров, дававших качественную картину множества однотипных исследований.

Целевая задача статьи. Показать технически только один из вариантов проведения мета-анализа с использованием пакета Stata на искусственно созданном наборе данных. Никаких интерпретаций результатов! Будет рассмотрена только последовательность необходимых действий! А почему так? К сожалению, в русскоязычной

литературе нет учебной литературы по мета-анализу. Сведения о нем пользователь вынужден черпать или из книг, где этому предмету посвящены отдельные главы, или из статей в журналах, в которых чисто технические подробности вычислений в лучшем случае представлены весьма эскизно. Если сюда добавить навыки работы с пакетом Stata, циркулирующие в исследовательской среде на уровне фольклора, и отсутствие единого варианта русскоязычной терминологии... , то целевая задача становится понятной. Пример разнобоя в терминологии – forest plot = лесовидный график = лесной график = лесная диаграмма и т.д.

Набор данных для последующих вычислений представлен в таблице 1, которая содержит следующие переменные:

StudyAutor – автор исследования;

Study – исследование (статья, реферат, монография и т.д.);

StudyYear – дата проведения исследования;

Effect1 – число объектов в первой группе, на которых наблюдался эффект воздействия фиксированных признаков;

NoEffect1 – число объектов в первой группе, на которых эффект воздействия не был зафиксирован;

Effect2 – число объектов во второй группе, на которых наблюдался эффект воздействия фиксированных признаков;

NoEffect2 – число объектов во второй группе, на которых эффект воздействия не был зафиксирован.

Таблица 1

Исходная база данных

StudyAutor	Study	StudyYear	Effect1	NoEffect1	Effect2	NoEffect2
Ivanov01	Study01	1955	3.0000	21.0000	2.0000	25.0000
Ivanov02	Study02	1987	6.0000	50.0000	9.0000	80.0000
Ivanov03	Study03	1988	5.0000	32.0000	6.0000	61.0000
Ivanov04	Study04	1991	9.0000	80.0000	7.0000	60.0000
Ivanov05	Study05	1993	1.0000	9.0000	2.0000	20.0000
Ivanov06	Study06	2001	3.0000	30.0000	5.0000	58.0000
Ivanov07	Study07	2009	10.0000	64.0000	22.0000	200.0000
Ivanov08	Study08	2010	7.0000	46.0000	9.0000	81.0000
Ivanov09	Study09	2010	12.0000	90.0000	3.0000	45.0000
Ivanov10	Study10	2015	20.0000	180.0000	11.0000	100.0000

Для проведения мета-анализа в Stata (до 16-й версии) необходимо догрузить дополнительные пакеты (package, do-файлы), каждый из которых содержит определенные наборы уже написанных команд для анализа. Подобных файлов достаточно много, наибольшей популярностью из них пользуются: *meta*, *metan*, *mvmeta*, *forestplot*, *funnel* и другие [2]. Способ установки, например, для пакета *metan*. Все команды вводятся в окно Command. Устанавливаем модуль для мета-

анализа из архива SSC-IDEAS (Statistical Software Components) (см. рис. 1):

```
Command
ssc install metan
```

Рис. 1. Установка модуля metan

Результат выполнения команды появляется в окне вывода результатов (см. рис. 2).

```
. ssc install metan
checking metan consistency and verifying not already installed...
all files already exist and are up to date.
```

Рис. 2. Окно вывода результата установки модуля

После ввода данных в Stata можно получить коэффициент риска (risk ratio, rr), показывающий отношение вероятности наличия эффекта в одной группе к такой же вероятности в другой. Эта величина часто используется в качестве effect size для сравнения результатов в двух группах. В окно *Command* вводится:

metan Effect1 NoEffect1 Effect2 NoEffect2, rr label (namevar=Study, yearvar=StudyYear).

Замечание: в пакете Stata команды чувствительны к регистру (большие – большими).

При помощи данной команды строится модель с Common-effect (метод оценивания Mantel–Haenszel). Получаем следующий результат (см. рис. 3).

```
. metan Effect1 NoEffect1 Effect2 NoEffect2, rr label (namevar=Study, yearv
> ar=StudyYear)
```

Study	RR	[95% Conf. Interval]	% Weight
Study01 (1955)	1.6875	.307475 9.26142	3.05194
Study02 (1987)	1.05952	.398686 2.81573	11.2711
Study03 (1988)	1.50901	.493908 4.61039	6.92189
Study04 (1991)	.967897	.379803 2.46661	12.95
Study05 (1993)	1.1	.112389 10.7662	2.02668
Study06 (2001)	1.14545	.291654 4.49871	5.57337
Study07 (2009)	1.36364	.677383 2.74513	17.8348
Study08 (2010)	1.32075	.52236 3.33945	10.8165
Study09 (2010)	1.88235	.556979 6.36156	6.61508
Study10 (2015)	1.00909	.502003 2.0284	22.9386
M-H pooled RR	1.2289	.896448 1.68465	

```
Heterogeneity chi-squared = 1.51 (d.f. = 9) p = 0.997
Test of RR=1 : z= 1.28 p = 0.200
```

Рис. 3. Модель с Common-effect

Для того чтобы построить модели с фиксированными и случайными эффектами, необходимо ввести следующие команды соответственно:

metan Effect1 NoEffect1 Effect2 NoEffect2, rr fixed
metan Effect1 NoEffect1 Effect2 NoEffect2, rr random

Графическим представлением результатов, полученных выше, служит график *forest plot* (см. рис. 4), который строится автоматически.

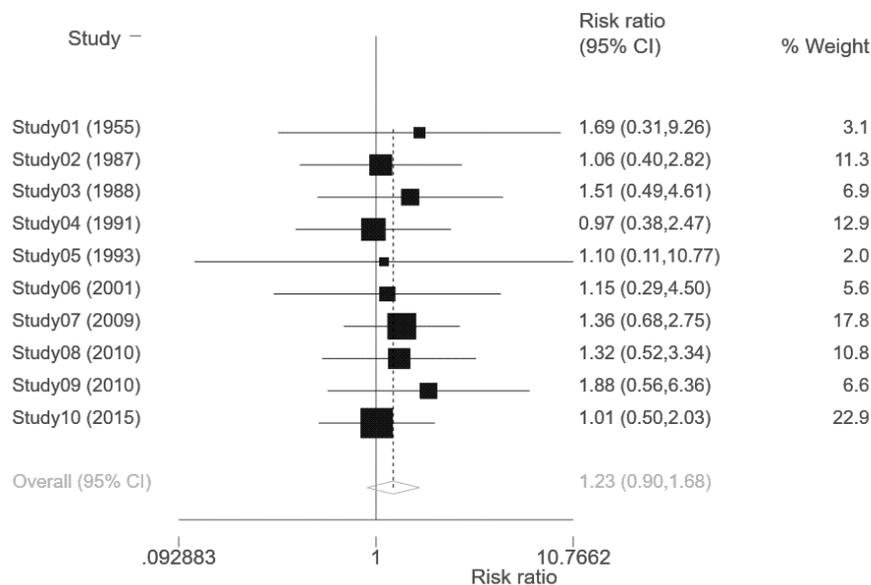


Рис. 4. График *forest plot*

Другим вариантом графического представления результатов мета-анализа служит *funnel plot*. Для его построения добавляем необходимый модуль с помощью команды (см. рис. 5).

```
Command
ssc install metafunnel
```

Рис. 5. Установка модуля *metafunnel*

После инсталляции модуля в командную строку вводим:
metafunnel _SS _LCI _UCI, eform.
 Получаем следующий график (см. рис. 6).

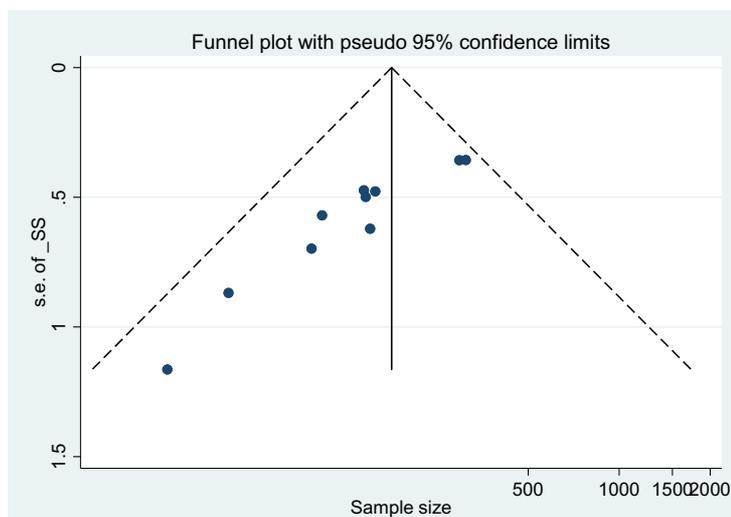


Рис. 6. График *funnel plot*

Литература

1. Дембицкий С. Метаанализ: ключевые понятия и основы вычислений (на примере данных кросс-национальных исследований) // Социология: теория, методы, маркетинг. – 2012. – № 3. – С. 160-174.
2. Robert B. Hopkins, Ron Goeree. Health Technology Assessment. – Taylor & Francis Group. – 2015. – P. 242.

V.I. Usachev, L.A. Grigoryan
Smolensk State University

CONDUCTING META-ANALYSIS IN THE STATA PACKAGE

Keywords: *meta-analysis; effect size; Stata; forest plot; funnel plot; metan; metafunnel.*

Abstract. *The article discusses the technical side of the meta-analysis option using the Stata package.*

СЕКЦИЯ 2

Параллельные вычисления и многоядерные процессоры

Ю.Г. Аветисов
ООО «Парус»

УДК 519.6:04.942

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО РАСКРОЯ РАСКАТА НА СОРТОВОМ ПРОКАТНОМ СТАНЕ

Ключевые слова: прокат; линейные диофантовы уравнения; оптимизация раскроя; немерная длина.

В статье предложен алгоритм предварительного раскроя раската непрерывно-литых заготовок при производстве сортовой строительной арматуры оптимальной длины с целью минимизации отходов раскроя на товарные длины, учитывающий физические свойства стали и технологические особенности оборудования при расчете карты раскроя и минимизации немерной остаточной части.

Введение. Повышение эффективности использования ресурсов на предприятиях, занимающихся изготовлением продукции черной металлургии, в реалиях текущей экономической ситуации является одной из основных стратегий выживания. В связи с ростом цен на шихту, тарифов на электрическую энергию появляется необходимость внедрения ресурсосберегающих технологий.

Одной из таких технологий является оптимизация технологического процесса. При рациональном использовании имеющихся ресурсов можно добиться снижения себестоимости выпускаемой продукции и повышения экономического благосостояния предприятия в целом.

Формализация задачи. Имеется набор однотипных непрерывно-литых заготовок (НЛЗ) M с вариацией массы отдельной НЛЗ, вызванной предыдущим технологическим процессом. Цель производства – прокатка набора НЛЗ на профиль в поле допуска площади сечения s_0 .

Пусть M_i – масса i -ой заготовки из набора M , кг; m_w – потеря массы заготовки при нагреве под прокатку, принятая постоянной для

M_i , кг; ρ – плотность стали при температуре прокатки, кг/м³; l – заданная длина готового изделия, м; Δs_i – приращение площади сечения калибра для i -ой заготовки набора M , м². Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$f(s_0) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{M_i - m_w}{\rho \cdot l \cdot (s_0 + \Delta s_i)} \right\} \rightarrow \min . \quad (1)$$

Приращение площади сечения Δs_i изменяется в нормированных пределах диаметра проката в результате выработки калибра, зависящей от тоннажа прокатанного металла.

Задача ограничивается тем, что необходимо учитывать технологические особенности оборудования, а именно максимальная длина предварительной порезки раската должна быть не больше длины реечного холодильника.

1. *Оптимизация немерного остатка (начальной площади сечения арматурного проката)*. Оптимальное значение параметра s_0 лежит в поле допусков на сечение проката, нормированном государственным стандартом на данный тип продукции. В связи с этим наиболее выгодно выбирать s_0 как минимальное из значений поля допусков, так как данный подход позволяет прокатать большее количество тонн на данном калибре. Поэтому в начале работы алгоритма предположим, что s_0 минимально и посчитаем частное для каждой заготовки из набора:

$$K_i = \frac{M_i - m_w}{\rho \cdot l \cdot (s_0 + \Delta s_i)} . \quad (2)$$

Получим некоторые значения, где $\lfloor K_i \rfloor$ – число готовых изделий, $\{K_i\}$ – некоторый некратный остаток.

Из множества $\{K_i\}$ для сокращения вариантов перебора подходящего значения для корректировки начального диаметра арматурного проката s_0 необходимо выбрать уникальные десятичные значения.

- На первом шаге алгоритма оптимизации необходимо выбрать уникальные десятичные значения, последовательно вычесть их из каждого элемента данного набора K и сложить $\{K_i\}$. То число, вычитание которого из всех элементов дает наименьший остаток и после вычета его из последнего элемента $\frac{K_n}{\rho \cdot l}$ находится в поле допуска, берется за базовое.

- На втором шаге необходимо выбрать из $\{K_i\}$ уникальные сотые значения, в которых первый десятичный знак соответствует базовому. Аналогично с первым шагом производятся вычисления и находится

наименьший остаток. Базовым назначается уникальная сотая часть значения, вычитание которой дает минимальную сумму остатков.

Необходимо продолжать вычисления по вышеприведенному алгоритму, пока заданная точность не будет достигнута в полной мере. Такой подход позволяет сократить перебор вариантов, так как уникальных цифр для n -ого знака может быть не более $10n$.

2. *Оптимизация карты раскроя.* Для каждого $[K_i]$ полученных чисел за вычетом подобранного базового необходимо выполнить разложение на кратные наборы согласно технологическому процессу. Для достижения возможности комбинирования данного набора по параметру кратности при условии максимально-возможной заполненности реечного холодильника прокатного стана используем теорему о существовании решения диофантова уравнения вида $ax + by = c$, для этого посчитаем $\text{НОД}(a, b)$. Для коэффициентов a и b диофантова уравнения используем соответственно L_{\max} / l и $(L_{\max} / l) - 1$. Из данной теоремы известно, что при $\text{НОД}(a, b) = 1$ уравнение имеет хотя бы одно решение в целых числах, а при $c \geq \text{НОК}(a, b)$ существует решение для $x, y \in N$. Получаем оптимальную карту раскроя заготовок.

Практический эксперимент. Для демонстрации практической значимости полученного результата применим алгоритм к набору полезной массы заготовок после вычета m_w : $M = [1444, 1442, 1441, 1443, 1446, 1441, 1442, 1444, 1444, 1442]$, для проката на арматурный профиль №12 с минимальной допустимой площадью сечения $s_0 = 0.00012314$, заказная длина $l = 11.7$.

Параметр выработки калибра Δs_i зависит от прокатанных тонн и представлен на рисунке 1.

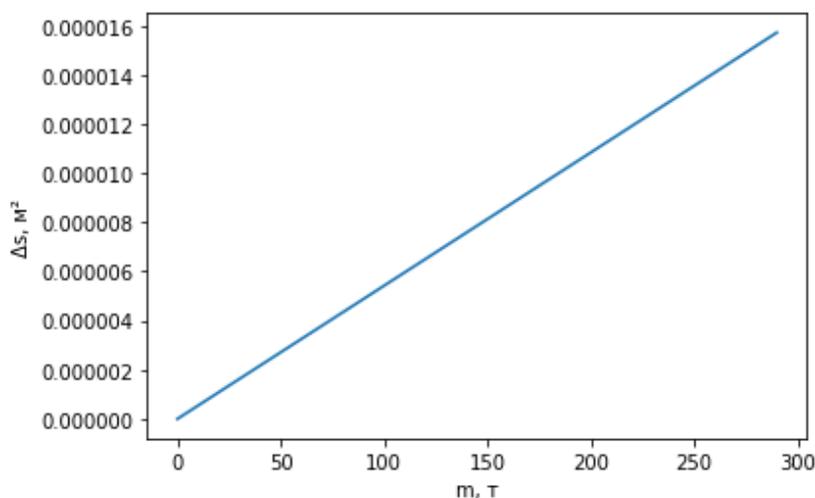


Рис. 1. Изменение площади сечения вала

1. Посчитаем $K_i = \frac{M_i - m_w}{\rho \cdot l \cdot (s_0 + \Delta s_i)}$ для каждой заготовки из набора M , для Δs_i каждой заготовки соответствует некоторое значение в соответствии с весом всех прокатанных M_i заготовок с момента вычисления. Находим количество прутков арматуры и некоторый некруглый остаток:

$K = [127.596, 127.338, 127.169, 127.265, 127.449, 126.928, 126.936, 127.031, 126.951, 126.695]$.

Уникальные первые десятичные значения данных чисел соответственно:

$[0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.9]$.

Сумма некруглых остатков после вычитания первых десятичных:

$[5.358, 5.358, 5.358, 5.358, 5.358, 5.358, 5.358, 3.358]$.

За базовую величину следует взять 0.9, так как остаток после вычета является наименьшим.

Производим поиск уникальных сотых значений, в которых первый знак соответствует базовой величине: $[0.92, 0.93, 0.95]$.

Получим сумму некруглых остатков после вычитания сотых значений.

Таких вариантов три: $[3.158, 4.058, 4.858]$.

Базовой величине следует присвоить значение 0.92.

Осуществим поиск уникальных тысячных значений для базовой величины. Такой вариант один: $[0.928]$.

Назначаем базовой величине значение 0.928 и производим вычет. Остаток от вычитания базовой величины из всего набора равен: $[3.078]$.

Данный результат является наилучшим для данного набора.

При сравнении получаем следующий результат:

без изменения начальной площади сечения калибра немерный остаток – 60.598 кг;

с применением данного подхода – 34.812 кг;

разница для данного набора составляет 25.786 кг.

2. После вычисления оптимального начального значения параметра

s_0 вычисляем $K_i = \frac{M_i - m_w}{\rho \cdot l \cdot (s_0 + \Delta s_i)}$ и получаем следующий результат:

$K = [126.668, 126.410, 126.241, 126.337, 126.521, 126.000, 126.008, 126.103, 126.023, 125.767]$.

Для разложения целой части данного набора чисел используем диофантово уравнение вида $bx + 5y = c$, где $c = \lfloor K_i \rfloor$.

Так как вес заготовок, посаженных в печь, больше 1000 кг, а вес готового изделия не превышает 12 кг, то коэффициент c всегда будет больше НОК(5,6), поэтому уравнение $bx + 5y = c$ будет иметь решение при $x, y \in N$.

Пример карты раскроя представлен в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	M_i	K_i	A	B	$\{K_i\}$
1	1444	126.668	21	0	0.668
2	1442	126.410	21	0	0.410
3	1441	126.241	21	0	0.241
4	1443	126.337	21	0	0.337
5	1446	126.521	21	0	0.521
6	1441	126.000	21	0	0.000
7	1442	126.008	21	0	0.008
8	1444	126.103	21	0	0.103
9	1444	126.023	21	0	0.023
10	1442	125.767	20	1	0.767

Оптимальная начальная площадь сечения

$$s_0 = \frac{K_1}{\rho \cdot l} = \frac{126.668}{7850 \cdot 11.7} = 0.0013791.$$

Заключение. Представленный алгоритм продемонстрировал возможность минимизации некратных остатков при изготовлении арматурного проката периодического профиля и построения оптимальной карты раскроя раската.

При реализации данного алгоритма в программно-аппаратном комплексе управления прокатным производством появится возможность оценки экономической эффективности предложенной оптимизации и уточнить пути её дальнейшего развития и расширения.

Литература

1. Аветисов Ю.Г. Использование нечетких методов при решении задачи оптимизации работы нагревательной печи. Конвергентные когнитивно-информационные технологии, Россия, nov. 2019. Доступно на: <<http://it-edu.oit.cmc.msu.ru/index.php/convergent/convergent2019/paper/view/1017>>.
2. Сычков А.Б., Дегтярев А.В., Блохин М.В. Освоение производства арматурного проката по новому ГОСТ 34028-2016. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2019. – С. 30-35.
3. Фалин Г.И., Фалин А.И. Линейные диофантовы уравнения. – М.: Чистые Пруды, 2008.

Yu. G. Avetisov
ООО «Parus»

THE ALGORITHM OPTIMIZATION PRELIMINARY CUTTING OF STEEL OF SECTION ROLLING MILL MACHINE

Keywords: mill products; linear Diophantine equation; cutting optimization; unmeasured length.

Abstract. *The article proposes an algorithm for preliminary cutting of the rolling of continuously cast billets in the production of constructional reinforcement of optimal length to minimize cutting waste to production lengths. It takes into account the physical properties of steel and technological features of the equipment when calculating the cutting map and minimizing the off-gauge residual part.*

Т.А. Агасиев, А.П. Карпенко
МГТУ имени Н.Э. Баумана

УДК 519.6

НАСТРОЙКА АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ СЕРИЙНЫХ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: САПР; глобальная оптимизация; параметрическая оптимизация; серийная задача; конфигурация алгоритмов; настройка параметров; суррогатное моделирование; ландшафтный анализ

Работа посвящена проблематике автоматизации решения серийных задач оптимизации. Серийная задача включает большое число схожих задач оптимизации, решаемых в процессе проектирования сложных инженерных изделий. Методы настройки позволяют отыскать такие значения свободных параметров алгоритма оптимизации, которые значительно повышают эффективность решения серийной задачи. Известные методы настройки не применимы в процессе эксплуатации алгоритмов решения задач оптимизации, имеющих высокую вычислительную сложность, и не учитывают доступный для решения объем вычислительных ресурсов. Представляем постановку задачи мульти-бюджетной настройки параметров алгоритма оптимизации. Предлагаем методику настройки,

позволяющую определить наилучшие значения свободных параметров алгоритма до решения задачи с учетом численных оценок особенностей целевой функции и доступного объема вычислительных ресурсов. Результаты вычислительного эксперимента показывают значительный прирост производительности алгоритма при использовании представленной методики настройки.

Введение. В процессе проектирования сложных инженерных изделий приходится решать большое число схожих задач оптимизации с высокой вычислительной сложностью целевой функции. Совокупность таких задач, имеющих близкую топологию целевой функции, называем *серийной задачей* оптимизации проектных решений. Для автоматизации решения серийных задач целесообразно разрабатывать и внедрять в процесс проектирования инженерных изделий специализированное математическое и программное обеспечение [1].

Одним из важных этапов автоматизации решения серийных задач является *настройка алгоритма* оптимизации. Процесс настройки алгоритма заключается в отыскании таких значений его *свободных параметров*, которые максимизируют выбранный критерий эффективности решения задачи оптимизации [2]. Поскольку серийная задача оптимизации решается многократно, правильная настройка алгоритма оптимизации может значительно повысить его производительность. Отметим, что при решении задач оптимизации высокой вычислительной сложности предпочтение отдают алгоритмам, использующим *суррогатные модели* целевой функции [3].

В настоящее время при решении серийных задач чаще всего используют «умолчательные» значения свободных параметров алгоритма, найденные с использованием методов настройки для решения широкого спектра оптимизационных задач [4]. Ввиду высокой вычислительной сложности практически значимых серийных задач применение классических методов настройки алгоритма оптимизации в процессе его эксплуатации не представляется возможным. Проблема настройки алгоритма в процессе его эксплуатации остается открытой [5], хотя известны исследования, посвященные автоматизации выбора и настройки алгоритмов оптимизации с учетом особенностей целевой функции. Важно, что известные методы настройки не учитывают доступный объем вычислительных ресурсов для решения исходной задачи оптимизации.

В работе предложена методика настройки алгоритмов в процессе эксплуатации для решения серийных задач оптимизации с учетом особенностей целевой функции и доступного объема вычислительных ресурсов.

1. Постановка задачи и основные определения. Рассматриваем задачу q глобальной условной параметрической оптимизации

$$\min_{X \in D_X \subset R^{|X|}} f(X) = f(X^*) = f^*. \quad (1)$$

Методы *ландшафтного анализа* [6] позволяют численно оценить особенности функции $f(X)$ на основе *ландшафтной выборки* – набора точек $\mathbf{X} = \{X_l, l \in [1:L]\}$ и соответствующих значений $\mathbf{f} = \{f(X_l)\} = \{f_l\}$. Результатом такой оценки является вектор *характерных признаков* (ХП) $C = (c_1, \dots, c_{|C|})$ задачи q , значения компонентов которого зависят, в том числе, от числа и расположения точек выборки \mathbf{X} в области D_X .

Серийную задачу оптимизации Q определяет область D_C пространства ХП, так что $Q = \{q(C) | C \in D_C\} = Q(D_C)$. По имеющимся результатам решения задач $q \in Q$ на основе ландшафтных выборок \mathbf{X} рассчитывают соответствующие им значения вектора ХП C , которые по мере накопления формируют облако точек в пространстве ХП. Границы области D_C задаются границами этого облака. В простейшем случае это может быть гиперсфера с центром, совпадающим с центром масс облака, и радиусом, выбранным лицом, принимающим решения (ЛПР). Тогда принадлежность произвольной задачи $q' = q(C')$ к серийной задаче $Q(D_C)$ определяют на основании евклидова расстояния от центра области D_C до точки C' .

Обозначим $a(B)$ алгоритм решения задач $q \in Q(D_C)$, где $B = (b_1, \dots, b_{|B|})$ – вектор значений его свободных параметров, называемый *стратегией*. Область допустимых стратегий алгоритма $a(B)$ обозначим D_B . Эффективность стратегии $B \in D_B$ при решении каждой из задач $q(C)$ оцениваем на основе «качества» найденного решения за заданное число вычислений целевой функции – *вычислительного бюджета* I задачи. Полагаем, что достижение значения I является критерием останова алгоритма $a(B)$ при решении задач $q \in Q(D_C)$.

Задачу *мульти-бюджетной* настройки алгоритма $a(B)$ ставим как задачу отыскания такой стратегии $B^* \in D_B$, которая минимизирует значение индикатора эффективности $e(B, C, I)$ алгоритма при решении задачи $q(C)$ с заданным значением I :

$$\min_{B \in D_B} e(C, B, I) = e(C, B^*, I). \quad (1)$$

Решение задачи *мета-оптимизации* (1) классическими методами настройки требует многократного решения задачи $q(C)$ с различными стратегиями B [4]. Такой подход не применим в процессе эксплуатации

алгоритма $a(B)$ для решения задач $q \in Q(D_c)$ высокой вычислительной сложности. Предлагаем методику настройки, которая позволяет в процессе эксплуатации алгоритма $a(B)$ определять его квазиоптимальную стратегию $\tilde{B}^* \in D_B$ с учетом заданного значения I .

2. Методика настройки алгоритмов. Предлагаемая методика настройки включает стадии исследования и эксплуатации алгоритма. Схема методики представлена на рисунке 1.

Стадия исследования. Выполняем сбор и анализ информации об эффективности алгоритма при решении тестовых задач $q^t \in Q(D_c)$ с низкой вычислительной сложностью целевой функции:

- формируем на основе экспертной оценки набор задач $\{q_i^t\} \subset Q$, удовлетворяющих условию $\{C_i^t\} \subset D_c$;
- отыскиваем наилучшие стратегии $\tilde{B}_{i,k}^*$ для решения каждой из задач $\{q_i^t\}$ с бюджетом $\{I_k\}$;
- на основе набора значений $\{\tilde{B}_{i,k}^*, C_i^t, I_k\}$ строим приближенное отображение $\tilde{h} : (C, I) \mapsto \tilde{B}^*$.

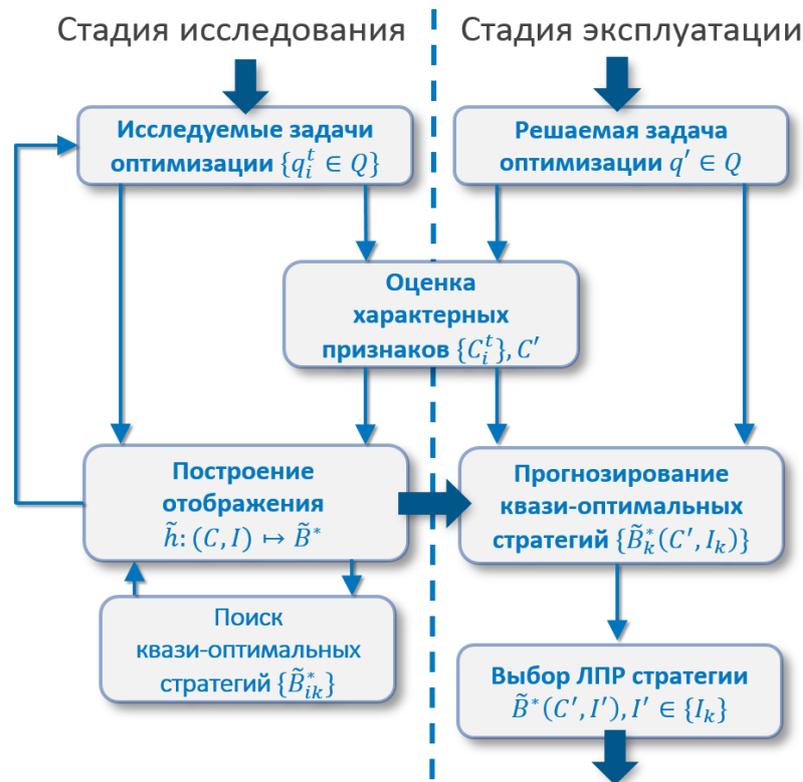


Рис. 1. Схема предлагаемой методики настройки алгоритма

Стадия эксплуатации. Для решения задачи $q' = q(C') \in Q(C)$ находим квазиоптимальную стратегию $\tilde{B}^*(C')$:

– определяем компоненты вектора $C' \in D_C$ выбранным методом ландшафтного анализа;

– прогнозируем набор квазиоптимальных стратегий $\{\tilde{B}_k^*\}$ для значений $\{I_k\}$ на основе отображения $(C, I) \mapsto \tilde{B}^*$;

– выбираем стратегию $\tilde{B}^*(C')$ для заданного бюджета $I' \in \{I_k\}$.

Эффективность предложенной методики во многом зависит от используемого метода ландшафтного анализа и метода построения отображения $(C, I) \mapsto \tilde{B}^*$.

3. Вычислительный эксперимент. Для исследования эффективности предложенной методики в качестве алгоритма $a(B)$ выбран алгоритм байесовской оптимизации с вектором свободных параметров $B = (b_1, b_2)$, где b_1 – параметр, управляющий глобализацией поиска; b_2 – параметр ковариационной функции алгоритма аппроксимации [7]. Алгоритм использует *стартовую выборку* точек в области поиска D_X для построения начальной суррогатной модели целевой функции, которую затем уточняют с использованием значений целевой функции, вычисленных в наиболее перспективных точках области D_X .

Сформирован набор тестовых задач оптимизации $\{q_i^t, i \in [1:30]\} \subset Q$, для оценки ХП которых использован гибридный метод ландшафтного анализа на основе методов *обобщенного информационного содержания* и *секторизации карты вариативности* [8]. Для построения отображения $(C, I) \mapsto \tilde{B}^*$ использован метод аппроксимации многомерных данных на основе декомпозиции зависимости $e(B, C, I)$, представленный в работе [9]. Бюджет I принят равным 100.

Вычислительный эксперимент организован следующим образом.

1) Для каждой задачи q_i^t выполняем 50 запусков алгоритма $a(B)$ со случайной стартовой ландшафтной выборкой X :

– генерируем ландшафтную выборку X из $L = 36$ точек, случайным образом расположенных в области поиска D_X ;

– на основе выборки X определяем компоненты вектора ХП C_i размерности, равной 15;

– находим квази-оптимальную стратегию \tilde{B}_i^* для решения задачи q_i^t со стартовой выборкой X с бюджетом $I = 64$.

2) Перекрестная проверка (k -блочная кросс-валидация) эффективности настройки для каждой из задач q_i^t :

– строим отображение $(C, I) \mapsto \tilde{B}^*$ на основе результатов поиска квази-оптимальных стратегий $\{\tilde{B}_i^*\}$ для задач $\{q_j^t, j \neq i\}$;

– прогнозируем квазиоптимальную стратегию \hat{B}_i^* на основе 50 различных значений C_i для $I = 64$;

– сравниваем эффективности алгоритма $a(B)$ с прогнозируемой стратегией \hat{B}_i^* , квазиоптимальной стратегией \tilde{B}_i^* и с «умолчательной» стратегией.

В качестве индикатора эффективности $e(B, C, I)$ используем лучшее найденное значение функции $f(X)$ при решении задачи $q(C)$ со стратегией B , стартовой выборкой X и заданным значением I .

На рисунке 2 представлены результаты сравнения эффективности алгоритма с различными стратегиями для некоторых из рассматриваемых тестовых задач.

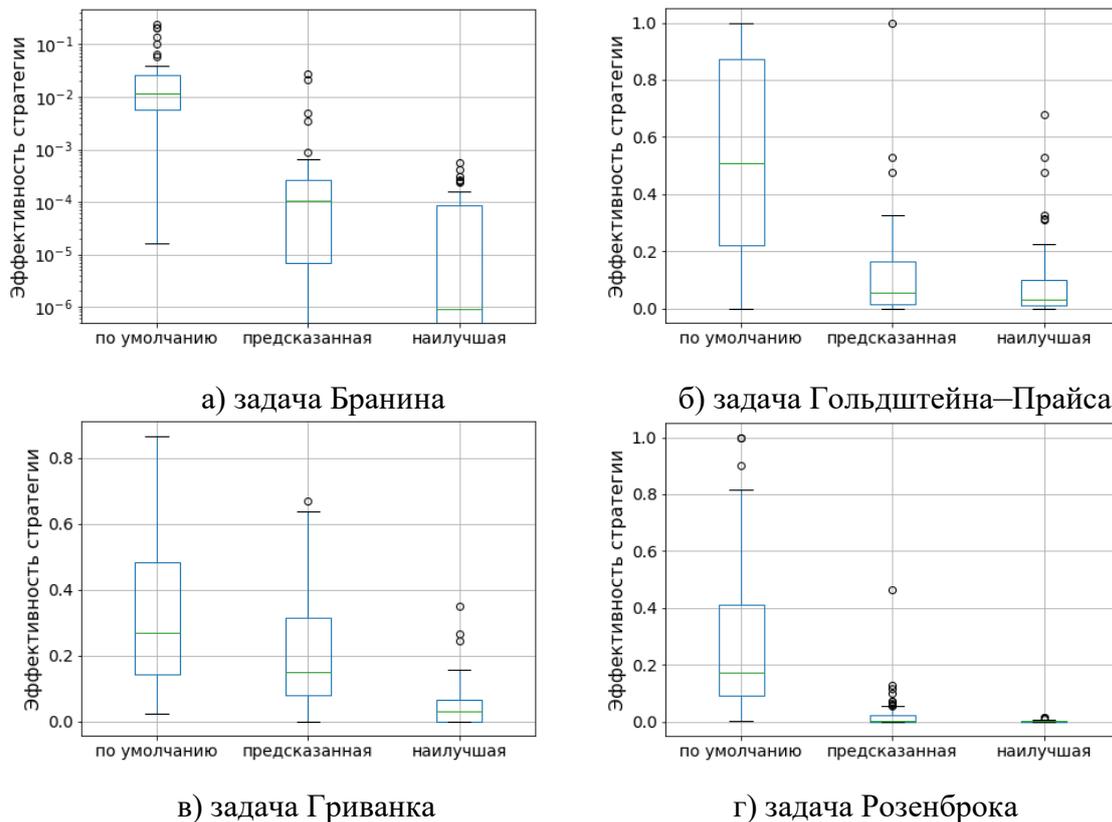


Рис. 2. Эффективность алгоритма с различными стратегиями при решении тестовых задач

Результаты вычислительного эксперимента, отражающие прирост эффективности алгоритма $a(B)$ при использовании предложенной методики настройки, изображены рисунке 3. Каждой точке на графике соответствуют задача оптимизации из использованного тестового набора. По оси абсцисс отложено усредненное евклидово расстояние от

точек в пространстве ХП, соответствующих данной задаче q_i^t , до точек ближайшего кластера, соответствующего одной из задач набора $\{q_j^t, j \neq i\}$. Ордината точки определяется разностью значений индикатора $e(B, C, I)$ для «умолчательной» стратегии и прогнозируемой стратегии \hat{B}^* .

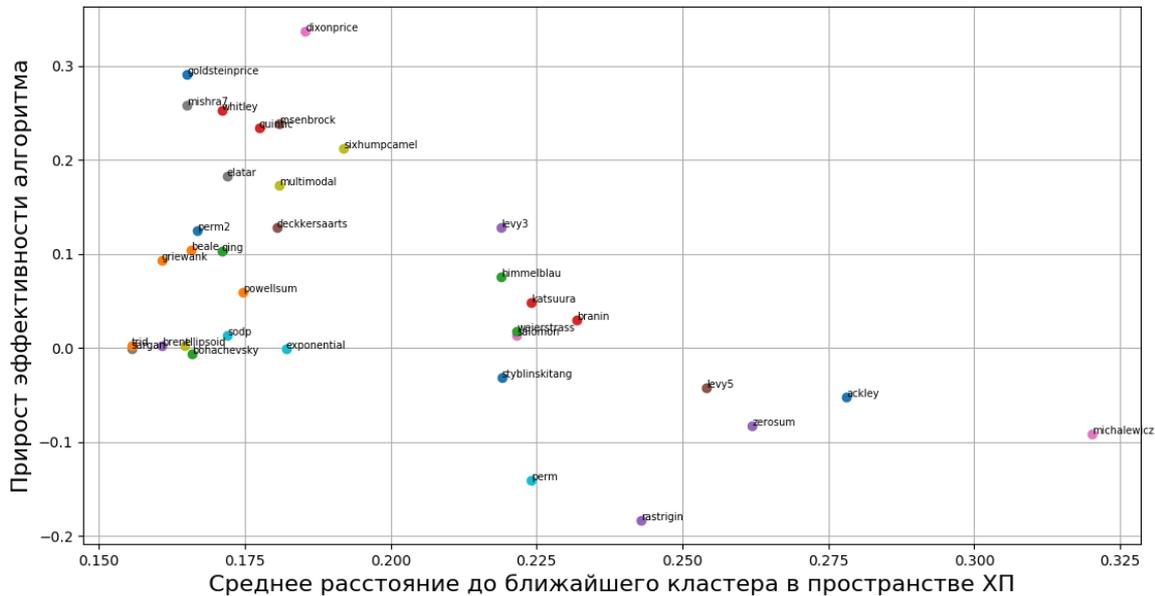


Рис. 3. Зависимость прироста эффективности алгоритма $a(B)$ от расстояния до ближайшей из задач $\{q_j^t, j \neq i\}$ в пространстве ХП при решении задач q_i^t тестового набора с использованием прогнозируемой стратегии \hat{B}^*

Заключение. Применение предложенной методики настройки позволило значительно увеличить эффективность алгоритма при решении тестовых задач оптимизации без каких-либо вычислительных затрат на стадии эксплуатации. Для некоторых задач, ХП которых сильно отличается от ХП задач стадии исследования, спрогнозированная стратегия оказалась менее эффективной, чем стратегия по умолчанию.

В развитие работы авторы планируют исследовать эффективность представленной методики при решении практически значимых серийных задач параметрической оптимизации проектных решений.

Литература

1. Gazaix A. [et al.]. Towards the industrialization of new MDO methodologies and tools for aircraft design // 18th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. – 2017. – P. 3149.
2. Агасиев Т.А., Карпенко А.П. Современные техники глобальной оптимизации. Обзор // Информационные технологии. – 2018. – №6. – С. 370-386.
3. Forrester A.I.J., Keane A.J. Recent advances in surrogate-based optimization // Progress in Aerospace Sciences. – 2009. – Vol. 45, No. 1-3. – P. 50–79.

4. Neumüller C. [et al.]. Parameter meta-optimization of metaheuristic optimization algorithms // International Conference on Computer Aided Systems Theory. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. – P. 367–374.
5. Kerschke P., Trautmann H. Automated algorithm selection on continuous black-box problems by combining exploratory landscape analysis and machine learning // Evolutionary computation. –2019. – Vol. 27, No. 1. – P. 99–127.
6. Mersmann O. [et al.]. Exploratory landscape analysis // Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation. – ACM. –2011. – P. 829–836.
7. Brochu E., Cora V.M., De Freitas N.A tutorial on Bayesian optimization of expensive cost functions, with application to active user modeling and hierarchical reinforcement learning // arXiv preprint arXiv:1012.2599. – 2010.
8. Агасиев Т. А. Метод секторизации полной карты вариативности целевой функции для оценки характерных признаков задачи оптимизации // Информационные технологии. – 2019. – Т. 25, №. 12. – С. 707-717.
9. Agasiev T.A. Characteristic feature analysis of continuous optimization problems based on Variability Map of objective function for optimization algorithm configuration // Applied Optimization. – 2020 (в печати).

T.A. Agasiev, A.P. Karpenko
Bauman Moscow State Technical University

AUTOMATED TUNING OF ALGORITHMS FOR SOLVING SERIAL PROBLEMS OF PARAMETRIC OPTIMIZATION

Keywords: *computer-aided design systems; global optimization; parametric optimization; serial problem; per instance algorithm configuration; parameter tuning; surrogate modeling; landscape analysis.*

Abstract. *The paper considers the problem of automating the solving of repetitive serial optimization problems. A serial problem includes a range of similar optimization problems solved while modeling complex engineering products. Tuning methods enable to find values of parameters of optimization algorithms that considerably increase the efficiency of serial problem solving. Well-known tuning methods are not applicable to the algorithms of solving practical optimization problems that are of high computational complexity, and do not take into account the available amount of computational resources. The problem of multi-budget parameter tuning of optimization algorithm is formulated. A method of per instance algorithm configuration is proposed that allows to determine the best values of algorithm's parameters before solving the problem taking into account numerical estimations of characteristic features of objective function and the available amount of computational resources. The results of the computational experiment indicate a significant raise of the algorithm performance when using the proposed configuration method.*

ОПЫТ СОЗДАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ¹

Ключевые слова: *нечеткая модель; композиционная интеллектуальная модель.*

Охарактеризованы причины эффективного использования композиционных интеллектуальных моделей для выполнения комплексных задач моделирования сложных систем и процессов. Рассмотрен предложенный метод построения композиционных интеллектуальных моделей. Описан ряд композиционных интеллектуальных моделей для различных комплексных задач анализа систем и процессов, разработанных с использованием предложенного метода.

Основными причинами, обуславливающими эффективность использования нечетких моделей для анализа сложных систем и процессов, являются следующие:

- недостаточность сведений об анализируемых системах и процессах;
- возможность учета как стохастической, так и нестохастической неопределенности;
- возможность идентификации сложных нелинейных зависимостей;
- обеспечение хорошей степени «прозрачности» процессов анализа и моделирования систем и процессов, а также интерпретируемости результатов.

Основными же ограничениями нечетких моделей являются:

- как правило, экспертный характер построения таких моделей;
- проблемы проверки моделей на непротиворечивость и полноту;
- изначальная неориентированность на параметрическую и структурную оптимизацию;
- сложность автоматического установления зависимостей.

Наиболее удачным подходом явилось использование принципа «мягких вычислений» (Soft Computing) для создания гибридных интеллектуальных моделей, позволяющих за счет свойств нейросетевых

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-29-03088_мк.

и эволюционных / биоинспирированных технологий компенсировать указанные выше ограничения «монохромных» нечетких моделей [1].

Использование этого принципа привело к созданию широкого спектра интеллектуальных моделей и методов. Тем не менее, до сих пор остается открытым вопрос конструктивного «конструирования» композиционных интеллектуальных моделей для выполнения комплексных задач анализа систем и процессов, для которых возможна декомпозиция на частные задачи, соответствующие отдельным подсистемам, объектам и элементам систем либо же этапам и стадиям происходящих в них процессов.

Ранее был предложен метод построения композиционных интеллектуальных моделей [2]. Его использование в наибольшей степени оказалось востребованным для выполнения комплексных задач анализа систем и процессов, для которых возможна декомпозиция на частные задачи, соответствующие отдельным подсистемам, объектам и элементам систем либо же этапам и стадиям происходящих в них процессов.

Рассмотрим кратко предложенный метод.

Этап 1. Декомпозиция комплексной задачи в виде совокупности обособленных частных задач.

Для этого могут быть использованы различные методы анализа сложных систем и процессов. Частные задачи, в свою очередь, могут быть декомпоziрованы на отдельные составляющие.

Этап 2. Определение возможностей интеллектуальных моделей по соответствию к требованиям частных задач.

Интеллектуальные модели можно систематизировать с точки зрения возможностей представления ими концептуальных знаний в соответствии со следующими признаками [3]:

- в соответствии с предметом анализа:
 - объект анализа;
 - метод анализа;
 - взаимосвязь событий;
 - отношение к объекту анализа;
 - отношение к методу исследования};
- по типу динамики:
 - статика;
 - краткосрочная динамика;
 - долгосрочная динамика;
- по типу неопределенности:
 - стохастическая;
 - нестохастическая;
 - стохастическая и нестохастическая;
- по методу получения данных:

- первичный;
- вторичный.

Этап 3. Определение требований к моделям для выполнения частных задач.

Каждой из частных задач могут быть сопоставлены различные группы требований к нечетким моделям.

Этап 4. Определение совокупностей нечетких моделей для решение частных задач.

На основе сопоставления групп требований со стороны частных задач к нечетким моделям определяются совокупности моделей, образующие «дерево покрытия» комплексной задачи.

Этап 5. Выбор подмножества нечетких моделей, рационально реализующих комплексную задачу.

На данном этапе метода осуществляется оценка и выбор моделей, обеспечивающих «покрытие» комплексной задачи в соответствии со следующими критериями выбора:

- максимизация степени пригодности модели;
- максимизация минимальной пригодности;
- максимизация средней пригодности;
- минимизация мощности «покрытия» [4].

Сначала выбирается основная интеллектуальная модель для реализации наиболее существенных требований. После чего выбираются вспомогательные, «зависимые» моделей, реализующие оставшиеся требования.

Предложенный метод позволил разработать ряд композиционных интеллектуальных моделей для различных комплексных задач анализа систем и процессов.

На рисунке 1 показана композиционная модель для управления профессиональными рисками, состоящая:

- из нечеткой когнитивной модели для оценки взаимовлияния системообразующих факторов;
- из нечетких моделей для оценки различных рисков;
- из нечетких байесовских сетей для оценки, согласования и выбора мероприятий по предотвращению / снижению рисков [5].

Разработана композиционная модель для управления техногенными рисками на предприятиях электронной отрасли. Данная модель состоит:

- из нечеткой когнитивной модели для анализа проблемы управления техногенными рисками (см. рис. 2);
- из их нечетких моделей для оценки рисков техногенных нарушений и техногенных аварийных ситуаций на предприятиях.

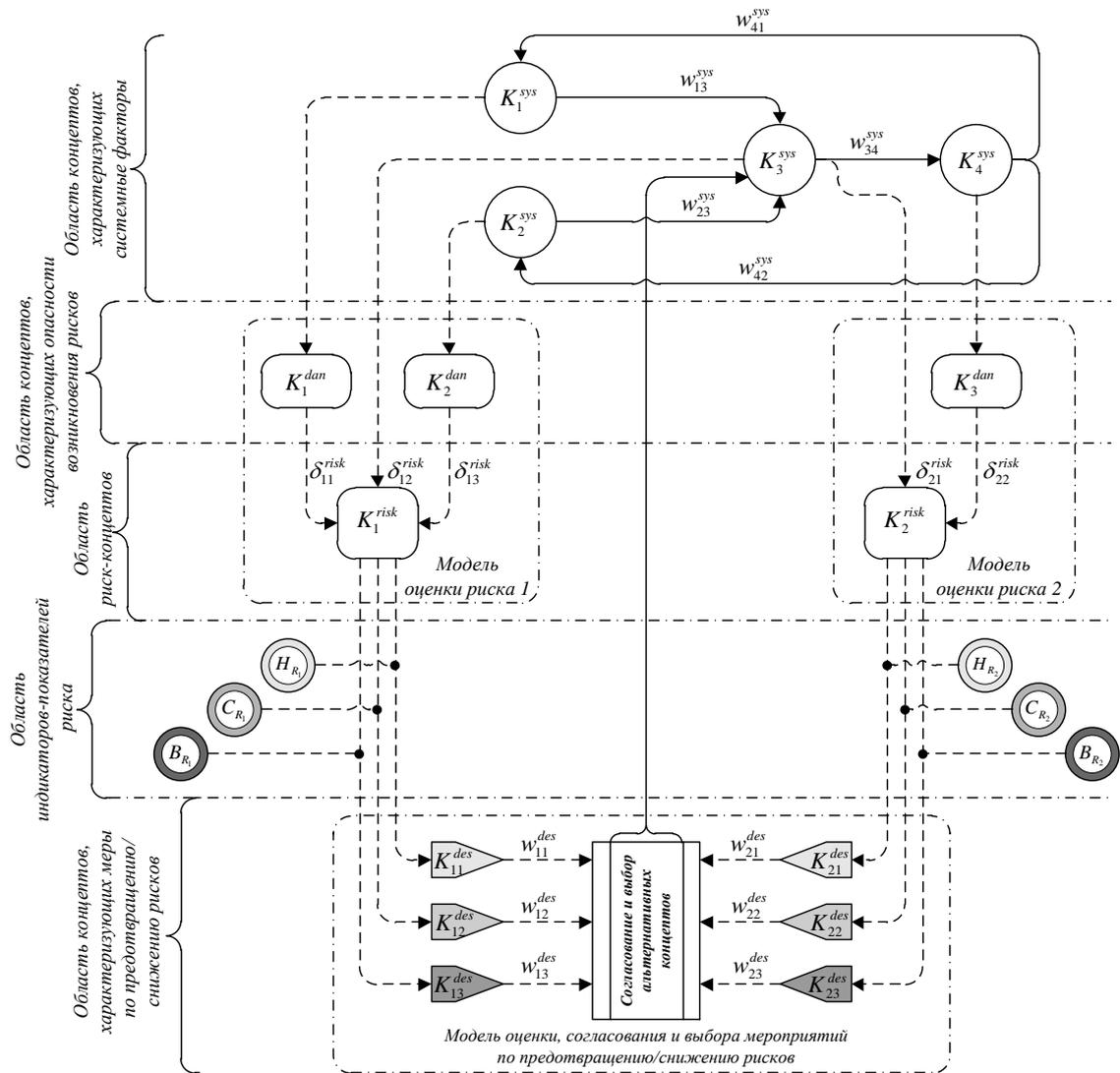


Рис. 1. Композиционная модель управления профессиональными рисками

Предложена композиционная модель комплексного управления рисками при обеспечении ресурсо- и энергосбережения процессов в сложной теплотехнологической системе [6]. Структура этой модели приведена на рисунке 3.

Модель состоит из нескольких каскадов интеллектуальных моделей.

Первый каскад включает в себя нечеткие компонентные модели для анализа различных процессов производства. Эти модели соответствуют декомпозиции процессов. Каждая из компонентных моделей решает внутреннюю задачу теплопроводности по отдельно взятому компоненту (например, обрабатываемому фосфоритовому окатышу) с учетом неопределенности его теплофизических характеристик и нечеткого распределения температуры.

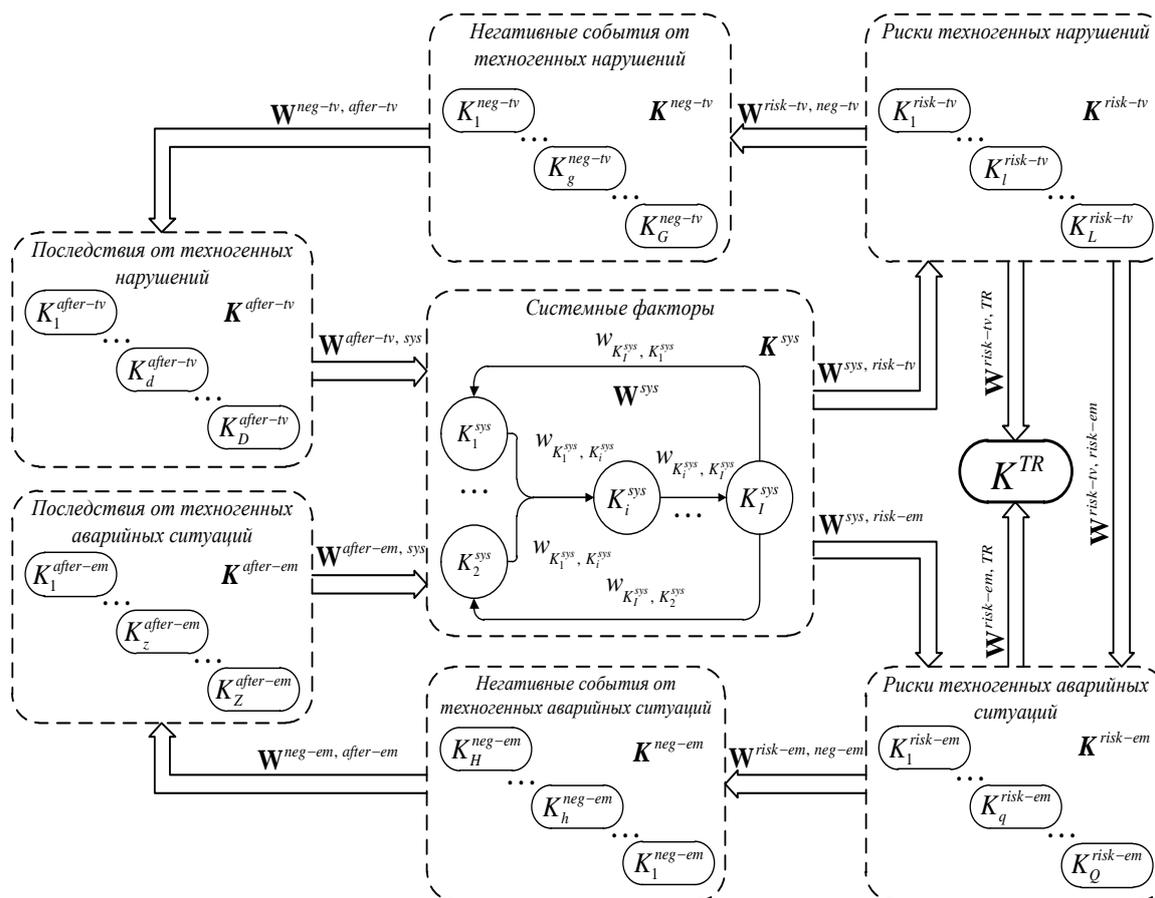


Рис. 2. Нечеткая когнитивная модель для анализа проблемы управления техногенными рисками

Использование этой модели базируется:

- на построении системы дифференциальных уравнений с нечеткими параметрами (теплопроводность, объемная теплоемкость, коэффициент теплоотдачи с поверхности) [7];
- на предложенном подходе к решению системы уравнений нечетким численным методом [8].

Второй каскад состоит из нечетко-логических моделей, предназначенных для оценки затрат на электрическую и на тепловую энергию на различных стадиях процессов производства.

Третий каскад включает в себя нечетко-логические модели для оценки затрат на электрическую и на тепловую энергию для процессов производства окатышей. Помимо этих моделей третий каскад включает в себя нечеткие модели оценки рисков нарушения процессов.

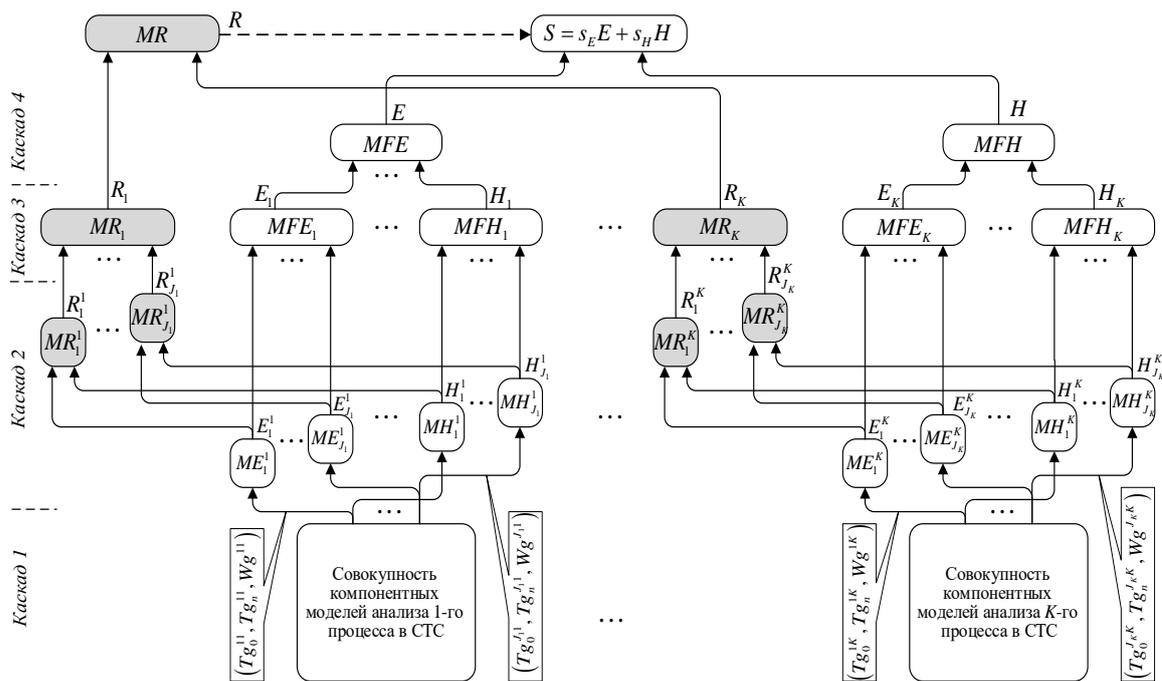


Рис. 3. Структура композиционной модели комплексного управления рисками при обеспечении ресурсо- и энергосбережения процессов в сложной теплотехнологической системе

Четвертый каскад состоит из нечетко-логических моделей для оценки общих затрат на электрическую и тепловую энергию. Помимо этих моделей в состав каскада входит модель для оценки обобщенного риска нарушения технологических процессов в системе в целом.

Литература

1. Аверкин А.Н., Прокопчина С.В. Мягкие вычисления и измерения // Интеллектуальные системы. – 1997. – Т. 2, Вып. 1–4. – С. 93–114.
2. Borisov V.V. Hybridization of Intellectual Technologies for Analytical Tasks of Decision-Making Support // Journal of Computer Engineering and Informatics. – 2014. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 148–156.
3. Зернов М.М. Требования к применяемым типам нечётких концептуальных знаний в задачах поддержки принятия решений // Вестник войсковой ПВО. – 2010. – №3. – С. 86–92.
4. Борисов В.В., Зернов М.М. Определение совокупности нечётких моделей для решения комплексной задачи поддержки принятия решений// Вестник МЭИ. – 2011. – №1 – С. 74–85.
5. Борисов В.В., Сеньков А.В. Интеллектуальное управление рисками в топливно-энергетическом комплексе. – Смоленск: Универсум, 2015. – 170 с.
6. Борисов В.В., Дли М.И., Бобков В.И. Модель комплексного управления рисками при обеспечении ресурсо- и энергосбережения процессов на примере сложных теплотехнологических систем // Вестник МЭИ. – 2019. – № 5. – С. 101–109.
7. Bobkov V.I., Borisov V.V., Dli M.I., Meshalkin V.P. Multicomponent Fuzzy Model for Evaluating the Energy Efficiency of Chemical and Power Engineering Processes

of Drying of the Multilayer Mass of Phosphoresce Pellets // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2018. – Vol. 52, No. 5. – P. 786–799.

8. Бобков В.И., Борисов В.В., Дли М.И. Подход к исследованию теплопроводности нечеткими численными методами в условиях неопределенности теплофизических характеристик // Системы управления, связи и безопасности. – 2017. – № 3. – С. 73–83.

V.V. Borisov

Branch of the National Research University
"Moscow Power Engineering Institute" in Smolensk

EXPERIENCE IN DESIGNING COMPOSITE INTELLIGENT MODELS

Keywords: *fuzzy model; composite intelligent model.*

Abstract. *The reasons for the effective use of composite intelligent models for performing complex problems of modeling complex systems and processes are described. The proposed method for constructing composite intelligent models is considered. A number of composite intelligent models for various complex problems of systems and processes analysis developed using the proposed method are described.*

**Л.Г. Гагарина, Ю.В. Мастерков,
А.А. Доронина, Р.А. Фомин, Д.А. Чухляев**
Национальный исследовательский университет
«МИЭТ»

УДК 517.926.7

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Ключевые слова: *билинейные системы; ограничения; вполне управляемость; управляемая динамическая система.*

Работа посвящена исследованию задачи о вполне управляемости билинейной управляемой системы на плоскости.

Означенная задача возникает в прикладной области теории оптимального управления в случае, когда управление строится по принципу обратной связи и в системах автоматического регулирования,

что весьма актуально в современных условиях всеобщей роботизации производства, в вопросах навигации, а также при моделировании ряда экономических и социальных процессов [1].

1. Основные понятия. Под управляемой динамической системой (УДС) понимается система, которая описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad (1)$$

где x – вектор-столбец (точка) с координатами x^1, \dots, x^n в n -мерном пространстве состояний УДС $\{x\}$. Вектор-функция $f(x, T, u)$ с координатами f^1, \dots, f^n считается заданной и определенной для любых значений своих аргументов из указанных выше множеств [2].

Для однозначного определения решения системы (1), то есть функции $x(t), t_0 \leq t$, необходимо задать начальный момент времени t_0 и начальное состояние УДС – точку x_0 , которая является состоянием УДС в момент времени $t = t_0$, то есть

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Кроме этого, необходимо определить управление УДС, которое представляет собой функцию, обозначаемую $u(t)$, принимающую свои значения из U и определенную на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Предполагается, что управление $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, принадлежит определенному классу функций $A(t_0, t_1)$, например, измеримых или кусочно-непрерывных, определенных на том же отрезке времени $[t_0, t_1]$. Такое управление $u(t) \in A(t_0, t_1), u \in U$, называется *допустимым управлением* [3].

Предполагается, что как только заданы некоторое допустимое управление $u(t)$ и начальное условие (2), уравнение (1) имеет собственное и, по крайней мере, абсолютно непрерывное решение $x(t)$ на том же отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющее начальному условию (2), то есть почти всюду на $[t_0, t_1]$ существует единственное $\dot{x}(t)$. Для реализации этого предположения достаточно, например, чтобы:

- 1) множество допустимых значений U было множеством в R^n ;
- 2) компоненты вектора $f(x, t, u)$ в (1), то есть функции $f^i(x, t, u), i = 1, \dots, n$, были непрерывными по совокупности переменных q^1, \dots, q^n, t, u и непрерывно дифференцируемыми по q^1, \dots, q^n ;
- 3) класс функций $A(t_0, t_1)$ был классом кусочно-непрерывных вектор- функций.

Далее, функцию $x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, которая является решением уравнения (1) при некотором допустимом управлении $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$,

назовем *допустимым движением* УДС, соответствующим управлению $u(t)$. Таким образом, по определению, каждому допустимому движению $x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, соответствует, по крайней мере, одно допустимое управление $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, под действием которого, собственно, и получено это движение $x(t)$.

Многообразие размерности $n - 2$ на гиперповерхности траекторной воронки, которое разделяет (по крайней мере, локально) участки этой поверхности с противоположно направленными штриховками, будем называть многообразием перемены штриховки на данной границе траекторной воронки.

2. Управляемость билинейных систем с неограниченным управлением. Пусть УДС представляет собой билинейную систему

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \{x\} = R^2, \quad (3)$$

где A и B - квадратные 2×2 матрицы с действительными элементами, u - скалярное управление.

Управление будет называться допустимым, если $u = u(t)$ - кусочно-непрерывная функция со значениями в R^1 .

Пусть $M = R^2 \setminus \{0\}$. Систему (3) назовем управляемой, если из произвольного начального состояния $x_0 \in M$ изображающая точка системы (3) может за конечное время $T > 0$ перейти под действием допустимого управления $u = u(t), 0 \leq t \leq T$, в произвольное (заданное) конечное состояние x_1 [4].

Пусть $x \in M$, тогда вектор Bx задает угол наклона касательной к траектории уравнения

$$\dot{x} = Bx, \quad (4)$$

проходящей через данную точку x . Траектория уравнения (2) в M является границами траекторных воронок УДС (3). Под действием допустимого управления можно двигаться сколько угодно близко к этой траектории, причем в обе ее стороны, а в пределе при $u \rightarrow \infty$ можно считать, что допустимое движение возможно в обоих направлениях вдоль траектории уравнения (4), то есть в обе стороны вдоль границы воронки управляемой динамической системы (3). Направление вектора Ax определяет штриховку этой границы в точке x .

Возьмем точку $cx \in M$, где $c \neq 0$ - числовая константа. Вектор $cBx\dot{x} = Bx$ параллелен вектору Bx , и, следовательно, траектория уравнения (4), проходящая через точку cx , имеет такой же угол наклона касательной в точке cx , что и траектория, проходящая через точку x . Вектор cAx при $c > 0$ коллинеарен вектору Ax , а при $c < 0$ антиколлинеарен вектору Ax . Это значит, что направление штриховки в

точке cx при $c > 0$ совпадает с направлением штриховки в точке x и изменяется на противоположное при $c < 0$. Такое свойство называется свойством симметрии штриховок относительно начала координат.

Перейдем теперь к исследованию свойств управляемости УДС вида (3). Это исследование проводится отдельно для всех возможных случаев комбинаций двух собственных значений матрицы B , а именно матрица B имеет:

- 1) два равных между собой действительных собственных числа;
- 2) два различных действительных собственных числа;
- 3) два чисто мнимых собственных числа;
- 4) два сопряженных комплексных собственных числа с действительными частями, отличными от нуля.

Исследуем последовательно все эти случаи.

3. Матрица B имеет два равных действительных собственных числа. Предположим, что УДС (1) приведена к виду

$$\dot{y} = A_1 y + u B_1 y, \quad (5)$$

где $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ – жорданова форма матрицы и λ – ее кратное действительное собственное число. Для исследования управляемости данной УДС рассмотрим семейство траекторий уравнения

$$\dot{y} = B_1 y. \quad (6)$$

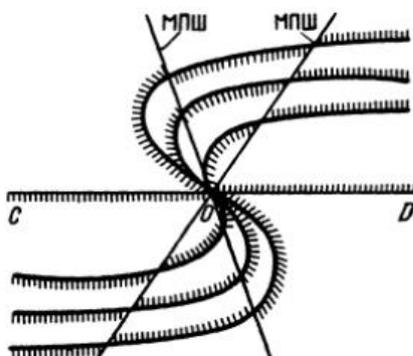


Рис. 1

Эти траектории являются границами траекторных воронок УДС (5). Особая точка $y = 0$ этого уравнения имеет вид узла. Можно показать, что для билинейной УДС (1) множествами перемены штриховки (МПШ) в M могут быть только прямые линии, если они существуют, и притом числом не более двух.

Докажем, что УДС (5) может либо иметь две различные, либо не иметь ни одной прямой линии перемены штриховки. Эта прямая описывается уравнением

$$|A_1 y \quad B_1 y| = 0. \quad (7)$$

Но, с другой стороны, на этой прямой определитель $[[A_1, B_1]y \quad B_1y]$ обращается в нуль. Это означает, что вектора $[A_1, B_1]y$ и B_1y линейно зависимы на прямой (7). Отсюда следует, что прямая (7) не может быть прямой перемены штриховки. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Далее предположим, что УДС (5) имеет две прямые перемены штриховки. Тогда ее фазовый портрет, если учесть свойство симметрии, будет с точностью до направления штриховки иметь вид, изображенный на рисунке 1. Здесь важно то, что существует единственная прямая CD , принадлежащая семейству границ траекторных воронок, на которой штриховка определена. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю. Такая УДС, как видно из рисунка, является полностью управляемой.

Действительно, с любой траектории уравнения (5), проходящей в верхней полуплоскости, можно перейти на любую другую траекторию, также проходящую в верхней полуплоскости, так как каждая траектория имеет особую точку, в которой штриховка меняет направление. Это утверждение справедливо и для двух произвольных траекторий (границ воронок), лежащих в нижней полуплоскости. Поскольку на прямой CD , принадлежащей семейству траекторий, штриховка определена, возможны переходы как с верхней полуплоскости в нижнюю, так и наоборот. Поэтому УДС (5) управляема. Заметим, что если на прямой CD штриховка не определена, то УДС (5) неуправляема.

Резюмируя сказанное выше, можно утверждать, что УДС (5) управляема тогда и только тогда, когда на прямой CD , принадлежащей семейству траекторий уравнения (6), определена штриховка.

4. Матрица B имеет различные действительные собственные числа. Заменой переменных $y = Nx$, где N – некоторая невырожденная матрица второго порядка, от УДС (1) переходим к УДС вида

$$\dot{y} = A_1 y + u B_1 y, \quad (8)$$

где $A_1 = N A N^{-1}$, $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ – диагональная матрица, λ_1, λ_2 – различные действительные собственные числа матрицы.

Управляемость УДС (8) в этом случае была исследована в [6], где доказано, что УДС (8) управляема тогда и только тогда, когда элементы матрицы A_1 удовлетворяют условию

$$a_{12} a_{21} < 0. \quad (9)$$

Условие (9) можно получить с помощью метода фазового портрета. В случае $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ семейство траекторий уравнения (4) имеет особую точку типа седла. Так как каждая траектория из этого семейства делит R^2 на две несвязные области, то для управляемости УДС (8)

необходимо, чтобы на каждой такой траектории существовала точка, в которой штриховка этой траектории меняет направление. Это означает, что УДС (8) должна иметь две различные прямые линии перемены штриховки: $y^2 = k_1 y^1$ и $y^2 = k_2 y^1$ такие, что

$$k_1 k_2 < 0. \quad (10)$$

Уравнение линий перемены штриховки УДС (8) имеет вид $\lambda_2 a_{12} (y^2)^2 + (\lambda_2 a_{11} - \lambda_1 a_{22}) y^1 y^2 - \lambda_1 a_{21} (y^1)^2 = 0$.

Так как это уравнение не содержит членов, линейных по y^1, y^2 , то линией перемены штриховки могут быть либо две различные прямые, проходящие через начало координат, либо одна такая прямая. Для выполнения условия (10) по теореме Виета необходимо, чтобы $a_{12} a_{21} < 0$. С другой стороны, если УДС (8) имеет две прямые линии перемены штриховки, то она полностью управляема [7].

Таким образом, если матрица B имеет два не равных между собой действительных собственных числа, то система (3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\det[A, B] < 0. \quad (11)$$

5. Матрица B имеет два чисто мнимых собственных числа. В этом случае особая точка системы (4) имеют вид центра. Если у системы (3) нет линии перемены штриховки, то ее фазовый портрет имеет вид рис. 2а. Из этого рисунка видно, что УДС неуправляема, так как, например, из окрестности особой точки мы не можем попасть во все остальные точки пространства. Если же у системы (3) существует хотя бы одна линия перемены штриховки, то с учетом свойства симметрии штриховки портрет имеет вид (опять же с точностью до направления штриховки), изображенный на рисунке 2б. Система, имеющая хотя бы одну линию (прямую) перемены штриховки, полностью управляема, поскольку из любой точки множества возможны управляемые переходы как в области, прилегающие к особой точке, так и в точки, удаленные на любое расстояние от начала координат.

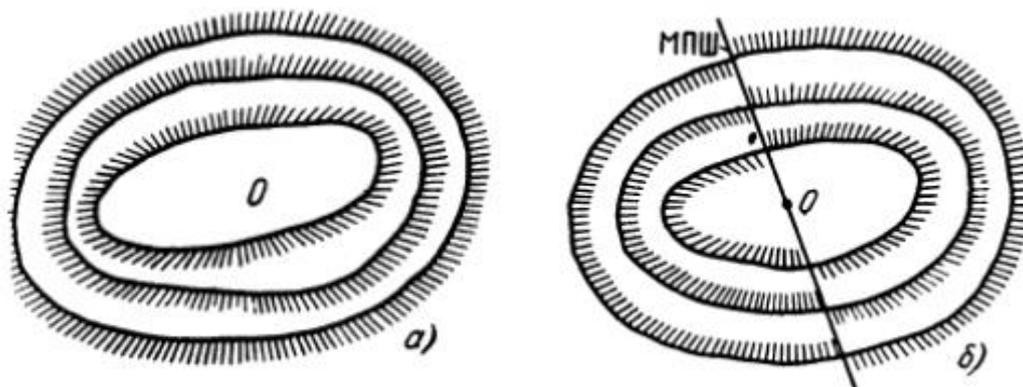


Рис. 2

Поэтому для рассматриваемых матриц B необходимым и достаточным условием управляемости является существование хотя бы одной линии перемены штриховки.

Получим это условие в аналитическом виде. У билинейной системы уравнение прямых перемены штриховки имеет вид

$$|Ax \ Bx| = 0. \quad (12)$$

Раскрывая выражение (12) и используя тот факт, что матрица B имеет чисто мнимые собственные числа, то есть $\operatorname{tr} B = 0$, получим необходимые и достаточные условия управляемости:

$$\det[A, B] + [\operatorname{tr} A]^2 \det B < 0. \quad (13)$$

Так как собственные числа матрица B - чисто мнимые, то $\det B > 0$ и поэтому необходимым условием управляемости является соотношение

$$\det[A, B] < 0. \quad (14)$$

6. Матрица B имеет сопряженные комплексные собственные числа с действительной частью, отличной от нуля. В этом случае особая точка уравнения (4) имеет вид фокуса. Докажем, что если хотя бы в одной точке пространства штриховка определена, то система (3) управляема [8].

Действительно, пусть штриховка определена в некоторой точке $x' \neq 0$. Из свойства симметрии штриховок следует, что тогда штриховка определена и во всех точках прямой, проходящей через точки x' и 0 . Следовательно, выходя из произвольной точки x_0 , мы можем по траектории уравнения (4) добраться до пересечения с прямой Ox_0 . Так как в этой точке пересечения штриховка определена, то совершим, согласно штриховке, управляемый переход на спираль, проходящую через конечную точку x_1 . Таким образом, для управляемости (3) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы хотя бы в одной точке пространства была определена штриховка. Это условие управляемости эквивалентно условию

$$B \neq kA \quad (15)$$

для любого действительного числа.

Из соотношений (11), (13)–(15) вытекает необходимое и достаточное условие управляемости УДС (3):

1) $\det[A, B] < 0$, если матрица B имеет действительные собственные числа и $B \neq kA$ при любом действительном числе k , где E – единичная матрица;

2) $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$, если $B = kA$ при некотором действительном числе k ;

3) $\det[A, B] + [\operatorname{tr} A]^2 \det B < 0$, если матрица B имеет чисто мнимые собственные числа;

4) $B \neq kA$ для любого действительного числа k , если B имеют комплексные собственные числа, с действительной частью, не равной нулю.

Наконец из проведенного нами анализа вытекает еще одно полезное следствие: если $\det[A, B] > 0$, то УДС (3) неуправляема.

В результате выполнения работы выведено несколько критериев вполне управляемости УДС с неограниченным управлением.

Рассматриваемый вопрос весьма актуален, поскольку возникает в прикладных задачах теории оптимального управления и в задачах автоматического регулирования.

Литература

1. Пашковский И.М. Устойчивость и управляемость самолета – М.: Машиностроение, 1975. – 10 с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, – М.: Наука, 1975. – 79–82 с.
3. Петровский И.Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М.- Л.: Гостехтеориздат, 1952. – 130-138 с.
4. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 34-36 с.
5. Бутковский А.Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. – М., 1985. – 118-126 с.
6. Jurdjevic V., Quinn J.P. Controllability and Stability. // J. Differential Equations, 1978. – 28. – P. 381-389.
7. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 121 с.
8. Мастерков Ю.В. О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае // Изв. ИМИ УдГУ. – 2006. – №3(37). – С. 97–98

**L.G. Gagarina, Yu.V. Masterkov,
A.A. Doronina, R.A. Fomin, D.A. Chukhlyaev**
National Research University
Moscow Institute of Electronic Technology

STUDY OF CONTROLLABILITY OF BILINEAR SYSTEMS WITH UNLIMITED CONTROL

Keywords: *bilinear systems; restrictions; completely controllability; controlled dynamic system.*

Abstract. *The work is devoted to the study of the completely controllability of a bilinear controlled system in the plane. The stated problem arises in the applied field of optimal control theory, in the case when control is built on the principle of feedback and in automatic control systems, which is very important in modern conditions of general robotics of production, in*

navigation issues, as well as in modeling a number of economic and social processes [1].

Е.И. Гончаров, П.Л. Ильин
Смоленский государственный университет

УДК 004.032.24

СРАВНЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ БЛОЧНОГО АЛГОРИТМА УМНОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

Ключевые слова: блочный алгоритм умножения; алгебра многомерных матриц; параллельное программирование.

*Операция (λ, μ) -свернутого произведения является ключевой операцией алгебры многомерных матриц. Учитывая широкий спектр применения алгебры многомерных матриц – системы кодирования, построение моделей данных и другие – а также объёмы данных, с которыми приходится иметь дело в наши дни, возникает необходимость в быстром оперировании данными. Естественным решением является параллелизм. В статье предложено обоснование блочного алгоритма (λ, μ) -свернутого произведения матриц A и B . Рассмотрены разные реализации блочного алгоритма (λ, μ) -свернутого произведения в рамках языка программирования C#: средствами встроенного метода *Parallel.For* и *Task-based* алгоритмом. Проведён вычислительный эксперимент для их сравнения с последовательным умножением многомерных матриц. По результатам эксперимента отмечена эффективность предложенных вариантов распараллеливания вычислений.*

Постановка задачи. Решение любой задачи начинается с выбора алгебры. Алгебра многомерных матриц может быть использована в построении математических моделей для самых разных предметных отраслей. Она может быть использована для построения моделей данных [1], может эффективно применяться в построении криптоустойчивых алгоритмов шифрования [2]. Центральной операцией алгебры многомерных матриц является (λ, μ) -свернутое произведение. Соответственно, для эффективного решения всех вышеизложенных задач необходимо построение программно-аппаратного комплекса, способного быстро выполнять эту операцию.

Умножение многомерных матриц. Многомерная матрица порядка N и размерности p определяется как система элементов $A_{i_1 i_2 \dots i_p}$, расположенных в точках p -мерного пространства и определяемых координатами (i_1, i_2, \dots, i_p) , где $i_a = 1, 2, \dots, N$; $a = 1, 2, \dots, p$. Пусть матрицы $A = \|A_{i_1 \dots i_p}\|$ и $B = \|B_{i_1 \dots i_q}\|$, p - и q -мерные соответственно. Совокупности индексов этих матриц i_1, \dots, i_p и i_1, \dots, i_q разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно κ , λ , μ и ν индексов ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$). Причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, а $\lambda + \mu + \nu = q$. Для полученных групп индексов используются обозначения: $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$. Тогда матрицы A и B можно представить в виде $A = \|A_{lsc}\|$ и $B = \|B_{csm}\|$. Индексы разбиения c называются кэлиевыми. Индексы разбиения s называются скоттовыми, а индексы разбиения m и l – свободными. Матрица $C = \|C_{lsm}\|$, элементы которой вычисляются по формуле $C_{lsm} = \sum_{(c)} A_{lsc} \times B_{csm}$, называется (λ, μ) -свернутым произведением матриц A и B [3].

Блочный алгоритм умножения. Из определения ясно, что вычислительная сложность такой операции $O(N^{\lambda + \mu + \kappa + \nu})$. Это означает, что вычислительная сложность операции (λ, μ) -свернутого произведения многомерных матриц зависит не только от размерностей перемножаемых матриц, но и от вариации разбиения индексов. За S_k будем обозначать зафиксированный набор индексов $S_k = (s_1^k, \dots, s_\lambda^k)$, всего таких наборов N^λ , каждый из которых образует $A_{S_k} = \|A_{lS_k c}\|$ – S_k -тое сечение матрицы; за C_k – зафиксированный набор индексов $C_k = (c_1^k, \dots, c_\mu^k)$, всего таких наборов N^μ и так далее.

Тогда для реализации (λ, μ) -свернутого произведения необходимо выполнить последовательность вложенных циклов, описанную на псевдокоде ниже.

```

For (j=0; j<Nλ; j++) { // Для каждого Sk-того сечения матриц
| For (i=0; i<Nκ; i++) { // Умножение плоских матриц особого вида
| | For (k=0; k<Nν; k++) {
| | | tmp=0;
| | | For (t=0; t<Nμ; t++)
| | | | tmp=tmp+ AlSkct × BctSkmk;
| | | ClSkmk =tmp;
| | }
| }
}

```

Авторы [4; 5] предлагают каждую пару S_k -тых сечений матриц A и B , перебираемую во внешнем цикле, связать с отдельными процессами, так как операции над каждой парой таких сечений можно проводить независимо. Следующая последовательность вложенных циклов соответствует умножению плоских матриц $A_{S_k}^*$ и $B_{S_k}^*$, где

$$A_{S_k}^* = \begin{pmatrix} A_{L_0 S_k C_0} & \dots & A_{L_0 S_k C_{N^\mu-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{L_{N^k-1} S_k C_0} & \dots & A_{L_{N^k-1} S_k C_{N^\mu-1}} \end{pmatrix}, B_{S_k}^* = \begin{pmatrix} B_{C_0 S_k M_0} & \dots & B_{C_0 S_k M_{N^\nu-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{C_{N^\mu-1} S_k M_0} & \dots & B_{C_{N^\mu-1} S_k M_{N^\nu-1}} \end{pmatrix}.$$

Это умножение может быть распараллелено, например, ленточным алгоритмом, алгоритмами PUMMA, SUMMA [6; 7] и другими.

Task-based. При распараллеливании вычислений удобно использовать объектный подход, позволяющий легко распределить выполняемые вычисления. Его суть заключается в создании массива непересекающихся в памяти вычислительных классов, выполняющих одинаковый набор команд на разных выходных данных, разбиении исходной задачи на подзадачи и запуске решения каждой подзадачи в отдельном классе. В зависимости от вида исходной задачи её решение может быть найдено выбором, комбинацией решений полученных подзадач.

У такого подхода есть несколько преимуществ. Массив классов позволяет разграничить области памяти, отведенные каждому потоку, что позволяет избежать конкуренции за методы и переменные. Отсюда следует, что число атомарных операций, мьютексов [8] и других блокировок сокращается. Всё это значит, что такой код становится намного легче читать и отлаживать.

Минусом такого подхода является несколько более высокая требовательность к памяти. Однако на многих домашних компьютерах установлено не менее восьми гигабайт оперативной памяти, чего вполне достаточно для большинства решаемых на таких компьютерах задач.

Применим такой подход к распараллеливанию (λ, μ) -свернутого произведения.

В начале следует создать класс-вычислитель, содержащий необходимые методы для выполнения операций над блоками двух многомерных матриц A и B , необходимые для вычисления элементов блока матрицы-результата C . Затем в главном классе создаётся массив классов-вычислителей. Каждому классу передаются блоки матриц A и B , определяемые из разбиения индексов перемножаемых матриц. Создаётся статический объект – искомая многомерная матрица, после чего методы вычисления блоков матрицы C в каждом из классов запускаются параллельно. По окончании работы, каждый метод запишет

вычисленный результат в матрицу вызывающего класса. Отметим, что умножение плоских матриц внутри передаваемых блоков распараллеливается любым из множества известных алгоритмов.

Parallel.For. Метод `Parallel.For` из `System.Threading.Tasks` позволяет выполнять итерации цикла параллельно [9]. Он имеет следующее определение: `For(int, int, Action<int>)`, где первый параметр задает начальный индекс элемента в цикле, а второй параметр – конечный индекс. Третий параметр – делегат `Action` – указывает на метод, который будет выполняться один раз за итерацию. Явным преимуществом использования этого метода является относительная простота его использования. Так, простое изменение циклов псевдокода позволит, как покажет эксперимент, выполнить его в разы быстрее.

```
Parallel.For (0, Nλ, j => { // Для каждого Sk-того сечения матриц
    | Parallel.For (0; Nκ, i => { // Умножение плоских матриц
    | | For (int k=0; k<Nν; k++) {
    | | | tmp=0;
    | | | For (int t=0; t<Nμ; t++)
    | | | | tmp=tmp+ ALiSjCi × BCiSjMk;
    | | | CLiSjMk =tmp;
    | | }
    | });
    });
```

Очевидным недостатком служит его «непрозрачность»: мы не видим, как именно он распараллеливает цикл.

Вычислительный эксперимент. Вычислительная сложность варьировалась за счет количества индексов разбиения в каждой группе, поэтому в эксперименте участвовали матрицы минимально возможного порядка – 2. Запись “ $\kappa=8 \lambda=2; \mu=6; \nu=10$ ” для краткости обозначает (2, 6)-свернутое произведение двух случайных многомерных матриц порядка 2 и размерностей 16 ($=8+2+6$) и 18 ($=2+6+10$) соответственно.

Изменяя количество Скоттовых индексов в парах перемножаемых матриц (больше / меньше имеющегося числа ядер / потоков), была исследована работа алгоритмов в различных ситуациях:

- 1) $\lambda=2$: число s -сечений 4. Каждый из испытуемых процессоров имеет достаточное число логических процессоров для перемножения каждой пары s -сечений;
 - а) $\kappa=8; \lambda=2; \mu=6; \nu=10$: сравнение алгоритмов на задачи относительно малой вычислительной сложности (табл. 1). Task-based алгоритм работает заметно лучше только на машинах обладающих 8 логическими процессорами и более;

Таблица 1

Эксперимент для " $\kappa=8; \lambda=2; \mu=6; \nu=10$ "

Процессор (число ядер / число потоков)	$\kappa=8; \lambda=2; \mu=6; \nu=10;$		
	Последовательно, с	Parallel.For, с	Task-based, с
Intel® Core™ i5-4200M (2/4)	122,28	50,159	48,059
Intel® Core™ i5-7300HQ (4/4)	93,709	31,335	31,439
Intel® Core™ i5-9300H (4/8)	75,253	19,408	17,485
AMD Ryzen™ 7 2700X (8/16)	68,318	17,991	10,065
Intel® Core™ i7-8700 (6/12)	66,854	15,128	11,171
Вычислительная сложность	$O(67 \times 10^6)$		

б) $\kappa=10; \lambda=2; \mu=12; \nu=5$: сравнение алгоритмов на задаче большей вычислительной сложности (табл. 2). Так как существенных различий не оказалось, далее для каждого лограничимся одним экспериментом;

Таблица 2

Эксперимент для " $\kappa=10; \lambda=2; \mu=12; \nu=5$ "

Процессор (число ядер / число потоков)	$\kappa=10; \lambda=2; \mu=12; \nu=5;$		
	Последовательно, с	Parallel.For, с	Task-based, с
Intel® Core™ i5-4200M (2/4)	1248,142	485,445	460,299
Intel® Core™ i5-7300HQ (4/4)	875,101	293,857	310,141
Intel® Core™ i5-9300H (4/8)	762,458	184,582	169,411
AMD Ryzen™ 7 2700X (8/16)	680,565	172,277	106,905
Intel® Core™ i7-8700 (6/12)	680,174	133,567	111,653
Вычислительная сложность	$O(537 \times 10^6)$		

2) $\kappa=8; \lambda=3; \mu=7; \nu=10$: число s -сечений 8. Не каждый из испытуемых процессоров имеет достаточно логических процессоров на перемножение каждой пары s -сечений (табл. 3);

Таблица 3

Эксперимент для " $\kappa=8; \lambda=3; \mu=7; \nu=10$ "

Процессор (число ядер / число потоков)	$\kappa=8; \lambda=3; \mu=7; \nu=10$		
	Последовательно, с	Parallel.For, с	Task-based, с
Intel® Core™ i5-4200M (2/4)	624,469	221,009	200,323
Intel® Core™ i5-7300HQ (4/4)	405,889	134,88	140,574

Intel® Core™ i5-9300H (4/8)	338,599	92,39	70,405
AMD Ryzen™ 7 2700X (8/16)	306,019	77,364	40,251
Intel® Core™ i7-8700 (6/12)	300,433	69,251	46,123
Вычислительная сложность	$O(268 \times 10^6)$		

3) $\kappa=8$; $\lambda=4$; $\mu=4$; $\nu=9$: число s -сечений 16. На процессоре, обладающим 16 потоками Task-based алгоритм показал максимальное ускорение ($\times 8,80$ раз) относительно последовательного (табл. 4);

Таблица 4

Эксперимент для " $\kappa=8$; $\lambda=4$; $\mu=4$; $\nu=9$ "

Процессор (число ядер / число потоков)	$\kappa=8; \lambda=4; \mu=4; \nu=9$		
	Последовательно, с	Parallel.For, с	Task-based, с
Intel® Core™ i5-4200M (2/4)	60,042	26,873	22,006
Intel® Core™ i5-7300HQ (4/4)	45,076	15,461	15,245
Intel® Core™ i5-9300H (4/8)	37,644	10,091	7,719
AMD Ryzen™ 7 2700X (8/16)	34,071	9,213	3,878
Intel® Core™ i7-8700 (6/12)	33,579	7,262	5,004
Вычислительная сложность	$O(33 \times 10^6)$		

4) $\kappa=10$; $\lambda=6$; $\mu=8$; $\nu=5$: число s -сечений 64. У всех процессоров будет приходиться по несколько пар s -сечений на один логический процессор (табл. 5).

Таблица 5

Эксперимент для " $\kappa=10$; $\lambda=6$; $\mu=8$; $\nu=5$ "

Процессор (число ядер / число потоков)	$\kappa=10; \lambda=6; \mu=8; \nu=5$		
	Последовательно, с	Parallel.For, с	Task-based, с
Intel® Core™ i5-4200M (2/4)	1293,972	529,952	451,599
Intel® Core™ i5-7300HQ (4/4)	900,824	301,58	311,908
Intel® Core™ i5-9300H (4/8)	763,135	196,63	157,013
AMD Ryzen™ 7 2700X (8/16)	684,062	160,509	79,427
Intel® Core™ i7-8700 (6/12)	677,198	140,077	98,828
Вычислительная сложность	$O(537 \times 10^6)$		

Выводы.

1. По результатам вычислительного эксперимента заметно, что параллельное умножение многомерных матриц получило существенное ускорение в сравнении с последовательным вариантом.

2. Task-based алгоритм показал наилучшее время работы практически во всех случаях; встроенный метод Parallel.For, несмотря на более продолжительное время работы, даёт ощутимое ускорение вычислений.

3. Исходя из опытных данных, можно утверждать, что блочный алгоритм умножения многомерных матриц обладает отличной масштабируемостью.

4. Исходя из опытных данных, можно заключить, что длительность программного выполнения операции (λ, μ) -свернутого произведения многомерных матриц зависит не только от размерностей перемножаемых матриц, но и от вариации разбиения индексов.

Литература

1. Мунерман В.И. Многомерно матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2012. – Т. 8, №. 3. – С. 019-022.

2. Гончаров Е.И., Мунерман В.И., Самойлова Т.А. Выбор параметров многомерных матриц для обобщенного алгоритма шифрования Хилла // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. – Вып. 20. – С. 111-116.

3. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Издательство “Наукова Думка”, 1972.

4. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2015. – Т. 2, №. 11.

5. Захаров В.Н., Мунерман В.И. Алгебраический подход к формализации параллелизма данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2016. – Т. 12, №. 1.

6. Robert A. van de Geijn and Jerrell Watts SUMMA: scalable universal matrix multiplication algorithm, Concurrency: Practice and Experience. – 1997. – Vol. 9, Is. 4. – P. 255–274.

7. Choi, J., J. J. Dongarra, and D. W. Walker PUMMA: Parallel Universal Matrix Multiplication Algorithms on distributed memory concurrent computers," Concurrency: Practice and Experience. – 1994. – Vol 6(7). – P. 543-570.

8. Oliver R. J. Read lock and write lock management system based upon mutex and semaphore availability :пат. 6029190 США. – 2000.

9. <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/api/system.threading.tasks?view=netcore-3.1>.

E.I. Goncharov, P.L. Iljin
Smolensk State University

COMPARISON OF REALISATIONS OF PARALLEL MULTIDIMENSIONAL MATRIX MULTIPLICATION ALGORITHMS

Keywords: *block multiplication algorithm; multidimensional matrix algebra; parallel programming.*

Abstract. *The operation of the (λ, μ) -convolution product is a fundamental operation of the multidimensional matrix algebra. Given the wide range of applications of the multidimensional matrix algebra in coding systems, building data models and others as well as the amounts of data that we have to deal with today, there is a need for a quick data handling. A natural solution is a concurrency. In the article, the rationale for the block algorithm of the (λ, μ) -convolution product of the multidimensional matrices is proposed. Various implementations of the block algorithm of the (λ, μ) -convolution product in the framework of the C # programming language are considered: using the built-in Parallel.For and a heuristic Task-based algorithm. A computational experiment was conducted to compare these algorithms with the sequential multiplication of multidimensional matrices. According to the results of the experiment, the effectiveness of the proposed options for parallelizing computations is noted.*

А.В. Городилов, А.И. Кононова
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

УДК 004.72

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ РАЗДАЧИ ТОРРЕНТА КАК ПУТЬ К ЭФФЕКТИВНОМУ УПРАВЛЕНИЮ

Ключевые слова: *торрент; динамическая модель; управление, обыкновенные дифференциальные уравнения*

В статье рассматривается экспериментальное исследование развития раздачи на торрент-трекере. Описывается методика измерения, используемые инструменты, полученные результаты. Кроме того, рассматривается получение динамической модели на основе полученных данных. На основе исследования полученной модели делается вывод о неэффективности учёта рейтинга в управлении пользователями торрент-трекера.

1. Постановка задачи. Распространение информации в настоящее время немислимо без протокола BitTorrent [1], позволяющего пользователям обмениваться файлами напрямую, не создавая нагрузки на сервер. Тем не менее сервер (торрент-трекер) необходим для координации информационного обмена. Часто функциями торрент-трекера являются также распространение информации о доступных файлах и управление поведением пользователей. Основной задачей этого

управления является поддержание постоянной активности раздач (раздачей торрента часто называют и инфраструктуру распространения одного файла, и процесс информационного обмена в процессе его распространения).

Следуя сложившейся традиции, будем называть пользователей, участвующих в раздаче, соответственно сидерами (обладающие полной копией файла и предоставляющие доступ к нему пользователи) и личерами (не обладающие полной копией файла и скачивающие его у других). Таким образом, основной задачей управления является удержание на раздаче сидеров.

Традиционно для этого применяется учёт рейтинга, то есть отношения суммарного объёма отданных пользователем данных к суммарному объёму скачанных им. Пользователи с большим значением рейтинга имеют привилегии при скачивании данных, пользователей с низким рейтингом искусственно ограничивают в возможностях. Распространена критика системы учёта рейтинга на основе эмпирических данных; тем не менее, в настоящее время многие торрент-трекеры всё ещё используют именно её. Применяются и другие метрики качества участия пользователей — таймбонус (учёт общего времени, проводимого пользователем-сидером на раздаче), учёт редкости раздач (если файл раздаётся единственным сидером, его вклад оценивается выше, чем вклад одного сидера в популярную раздачу, где общее число сидеров измеряется десятками). Также в управлении раздачей, кроме поощрения сидеров, используются и другие меры — в частности, закрытие части раздач. Действительно, при наличии нескольких раздач одного и того же контента в сопоставимом качестве целевая аудитория этого контента дробится на несколько частей и поддерживать активность каждой из них в отдельности сложнее.

Для выработки рекомендаций по повышению запаса устойчивости раздач необходима модель, отражающая основные тенденции распространения файлов в таких сетях и при этом достаточно простая для исследования. Анализируя изменение запаса устойчивости модели при том или ином изменении параметров, можно будет выбрать наиболее эффективные из административных мер. При этом такая модель должна быть относительно простой. Сложные многопараметрические модели позволяют очень точно прогнозировать поведение описываемой системы, но для их построения необходимо получить большое количество информации об этой системе [2]. Исследование же качественного поведения простой модели в виде динамической системы (системы обыкновенных дифференциальных уравнений) позволяет определить характер эволюции системы в целом, абстрагируясь от чрезмерного количества деталей [3].

Для разработки такой модели необходимо исследовать развитие реальных раздач на торрент-трекерах, а также рассмотреть основные факторы, влияющие на него.

2. Жизненный цикл и фазовые переменные развития раздачи. На развитие раздачи влияет множество величин. Часть из них неизменна (как, в частности, содержание раздаваемого файла), часть более или менее интенсивно меняется на протяжении эволюции раздачи.

В каждый момент времени состояние раздачи должно описываться набором фазовых переменных. Так как основная задача управления — контроль количества сидеров, одной из фазовых переменных должно быть их количество (будем его обозначать как s). С ним тесно связано количество личеров (будем его обозначать как l). В каждый момент времени это целые неотрицательные числа: $s, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (в дальнейшем эти величины будут обобщены до $s, l \in \mathbb{R}$ [4]).

2. Методика экспериментального исследования развития раздач. Некоторые торрент-трекеры предоставляют данные о текущем количестве сидеров и личеров на раздаче в её описании. Используя синтаксический анализ html-страницы описания, можно извлечь эти данные.

Для исследования была сформирована база данных раздач, как уже существующих на протяжении продолжительного времени, так и созданных за несколько минут до начала измерений, с нескольких торрент-трекеров. База периодически пополнялась вновь созданными раздачами.

Кроме того, был написан программный модуль на интерпретируемом языке Bash оболочки GNU/Linux. При запуске он поочерёдно обращается к описанию каждой раздачи из базы, получает текущее количество сидеров s и личеров l на ней и добавляет строку с кортежем (s, l) в текстовый файл, соответствующей раздаче. Этот модуль запускался каждые 10 минут при помощи демона cron в течение года.

Таким образом было сформировано множество текстовых файлов, каждый из которой содержит последовательные значения фазовых переменных $s, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ во времени для каждой исследуемой раздачи — фазовые траектории раздач.

3. Результаты измерения. Анализ полученных экспериментально фазовых траекторий раздач показал, что особенный интерес представляет собой развитие новой раздачи в течение нескольких дней от момента создания.

Траектории раздач, давно существующих на трекере («старых»), представляют собой либо константную точку $(0, 0)$, либо более или менее хаотическое движение в окрестности некоторой точки (s^*, l^*) . В последнем случае можно выделить две составляющие изменение количество сидеров s и личеров l :

— хаотические блуждания (изменение s и l на ± 1 в произвольную сторону и произвольный момент);

— суточные колебания (как правило, увеличение s и l ночью и уменьшение днём).

Тем не менее усреднённые за несколько суток s и l остаются близкими к (s^*, l^*) , так что можно говорить о стабилизации в состоянии $(0, 0)$ или (s^*, l^*) .

Траектории новых раздач, прежде чем прийти к стабильному состоянию, описывают более или менее крупные петли на фазовой плоскости (s, l) (рис. 1). Развитие такой раздачи можно разделить на четыре основных этапа: создание, начальный набор личеров, массовое скачивание и стабилизация. Если раздаваемый контент через некоторое время полностью теряет актуальность, можно выделить и пятый этап — угасание. После стабилизации траектория новой раздачи выглядит так же, как и для «старых» раздач. Таким образом, имеет смысл рассматривать только траектории раздач, созданных во время эксперимента, так как они включают все перечисленные этапы. Некоторые из таких траекторий приведены на рисунке 1.

Рассмотрим подробнее каждый этап развития раздачи.

1. При **создании** раздачи её сидирует только автор, личеров нет. Таким образом, любая траектория стартует из точки $(1, 0)$ (то есть с $s = 1, l = 0$). Для популярных и, соответственно, быстро развивающихся раздач (рис. 1, в-е) этот этап может быть не отражён в экспериментально полученной траектории из-за сравнительно большого интервала между измерениями. После создания ссылка на раздачу попадает в новости трекера, и начинается этап начального набора личеров.

2. **Начальный набор личеров.** После появления раздачи в новостях к ней активно подключаются новые пользователи, ещё не имеющие файла (личеры), заинтересованные в раздаваемом файле и следящие за новостями (вертикальный отрезок траектории на рис. 1, в) и д).

3. На этапе **массового скачивания** присоединившиеся личеры скачивают файл и становятся сидерами (диагональный нисходящий слева направо отрезок на рис. 1, в) и д).

4. На этапе **стабилизации** большинство скачавших файл пользователей перестают сидировать файл и уходят с раздачи. Приток новых личеров значительно меньше, чем на этапе начального набора; они узнают о раздаче не из новостей, а из поиска (нисходящая справа налево часть траекторий на рис. 1, в-е) и сгущение в её нижней части).

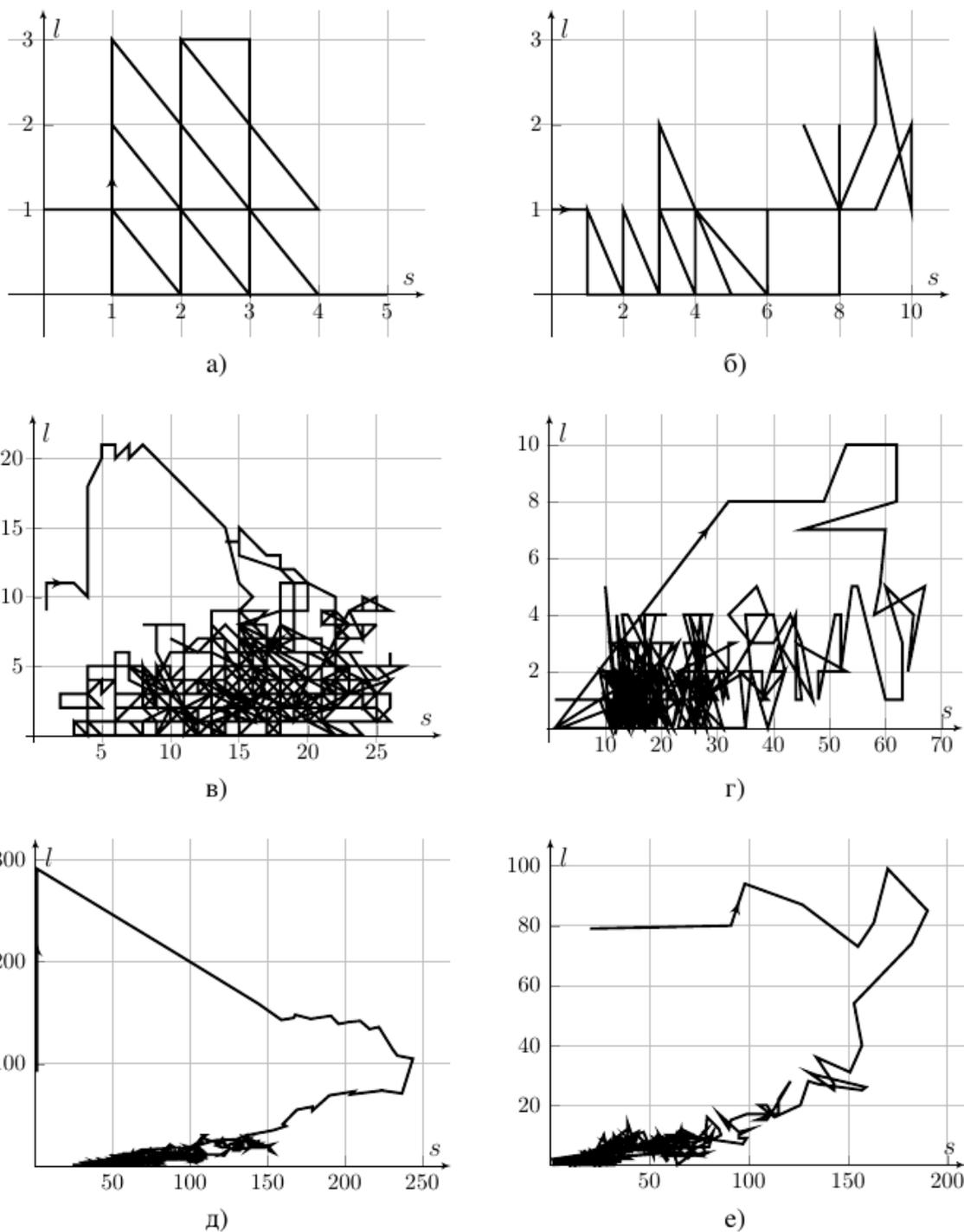


Рис. 1. Фазовые траектории раздач с малым (а, б), средним (в, г) и большим (д, е) количеством пользователей

Этапы часто перекрывают друг друга. Так, для небольших файлов начало этапа массового скачивания (когда первые личеры скачивают файл и становятся сидерами, резко увеличивая тем самым отдачу) отстоит от начала набора личеров не более чем на минуту, так что этапы 2 и 3 практически совпадают во времени.

Продолжительность этапов 2 (когда раздача ещё доступна в разделе новостей) и 3 (когда присоединившиеся на этапе 2 личеры скачивают

файл) на крупном торрент-трекере измеряется часами, крайне редко может составлять несколько суток. Продолжительность этапа стабилизации составляет от недели до двух-трёх месяцев.

На каждом из этих этапов наблюдаются суточные колебания и хаотические блуждания. После их сглаживания экспериментальные фазовые траектории раздач на этапах 1-3 имеют вид, подобный представленному на рисунке 2.

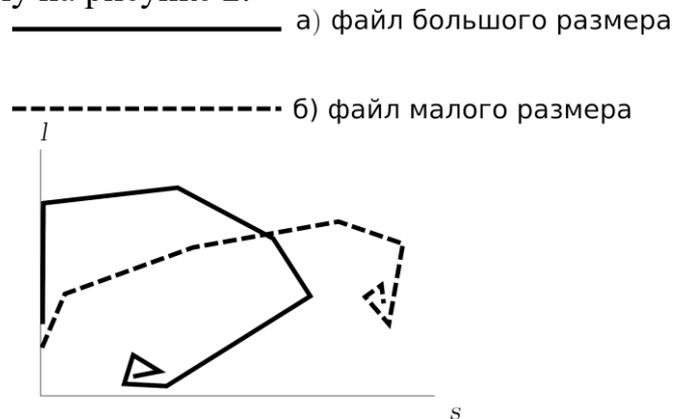


Рис. 2. Схематичное изображение фазовой траектория раздачи с большим количеством пользователей после исключения суточных колебаний и хаотических блужданий

После сглаживания значения фазовых переменных s и l уже не будут целочисленными. Действительно, обе переменные s и l постоянно изменяются; многие пользователи присутствуют на раздаче не круглосуточно, но при этом регулярно появляются по некоторому расписанию. Естественным будет обобщение s и l до вещественных чисел таким образом, чтобы вклад пользователя, проводящего на раздаче 12 часов из 24, в общее количество s или l составил 0,5.

4. Построение динамической модели. Для построения динамической модели развития раздачи рассмотрим те же фазовые переменные — количество сидеров и личеров на раздаче, обозначаемые как s и l соответственно, $s, l \in \mathbb{R}$.

Нецелые значения s и l , как сказано выше, соответствуют нерегулярному присутствию на раздаче. Также на практике ширина канала у различных личеров и различных сидеров может отличаться на порядок и более. Таким образом, будем считать, что вклад пользователя в количество соответствует среднему значению за некоторый интервал времени (поскольку обычно на раздачу по расписанию выходят ночью, имеет смысл рассматривать среднесуточное присутствие) с учётом ширины канала. Для упрощения модели ширина канала у различных личеров и различных сидеров считается одинаковой.

На величину s и l основное влияние оказывают три фактора:

— раздача-скачивание файла (личеры скачивают файл и становятся сидерами);

— приток пользователей (к раздаче подключаются новые личеры);
— отток пользователей (любой пользователь может в любой момент уйти с раздачи).

На их основе была построена динамическая модель, описанная в статье [4] и описывающая этапы 1-4 развития раздачи. При этом соотношение параметров на разных этапах развития различается, что и приводит к форме, показанной на рисунке 2. Анализ устойчивости полученной модели позволил сделать следующие **выводы**:

— система учёта рейтинга пользователя негативно влияет на устойчивость большинства раздач;

— система учёта таймбонуса, как и закрытие раздач с контентом, дублирующим уже имеющийся, увеличивает устойчивость раздач [4].

Таким образом, экспериментальное исследование динамики существующих раздач позволяет косвенно определить наиболее эффективные инструменты управления торрент-трекером.

Литература

1. Морозов Е. Как работает протокол BitTorrent. 2017. – URL: https://www.iguides.ru/main/other/kak_rabotaet_protokol_bittorrent/.
2. Гагарина Л.Г. Слюсарь В.В. Федоров А.Р. Федоров П.А. Разработка математической модели процесса поиска и обработки неструктурированной документированной информации // Современные наукоемкие технологии. – 2018. – № 9. – С. 41-44.
3. Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.
4. Кононова А. И. Динамическая модель процессов информационных обменов в пиринговой сети // Моделирование и анализ информационных систем (БАК, WoS). – 2018. – Т. 25, № 4. – С. 421–434.

A. V. Gorodilov, A. I. Kononova

National Research University of Electronic Technology

RESEARCH OF TORRENT DEVELOPMENT FOR EFFICIENT AUTOMATIC CONTROL

Keywords: *torrent; dynamical model; automatic control; ordinary differential equations*

Abstract. *In the article, we present the experimental research of the torrent development process in a torrent tracker. Method of measurement, tools, and results are described. Dynamical model based on collected data is reviewed. Simulation using the newly created model leads to the conclusion, that using rating criteria in automatic control of torrent trackers is inefficient.*

РЕАЛИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ БАЗЫ ДАННЫХ И ГРИД

Ключевые слова: *массовая обработка данных; параллельное программирование; программно-аппаратные комплексы; PostgreSQL; грид-кластер; контейнеры; Docker.*

В работе рассматривается задача распараллеливания JOIN запроса в реляционной СУБД при помощи локальной грид-системы с использованием контейнерных технологий, в частности с применением ПО Docker. Были исследованы несколько вариантов рабочих станций, а именно: полнофункциональная – рабочая станция, имеющая свою ОС, СУБД и БД; частично функциональная – рабочая станция, имеющая свою ОС и СУБД; потенциальная – рабочая станция, которая имеет у себя только предустановленную ОС. В данной статье изучается только полнофункциональная рабочая станция. В результате получена новая концепция локальной грид-системы, позволяющая применять концепцию симметричного горизонтального распределения только средствами СУБД, без необходимости написания контролирующего программного обеспечения.

Введение. В статье рассмотрен один из способов (вариантов) решения задачи симметричного горизонтального распределения данных [2; 4]. Решение этой задачи осуществляется на этапе подготовки данных (таблиц-операндов) для параллельной реализации операции JOIN. Поскольку решение проблемы симметричного горизонтального распределения ориентировано на работу с базами данных (БД), то желательно использовать только средства манипуляции данными, присущими одной или нескольким системам управления базами данных (СУБД), которые используются в каждом конкретном случае. Кроме того, в работе ставится цель использования минимального набора системных программных средств, обеспечивающих параллельную и распределённую обработку данных. Для достижения этой цели принято решение построения локальной грид-системы [5]. В качестве системных программных средств использованы системная служба Docker [6] и СУБД Postgre.

Контейнерная технология локальной грид-системы. Локальная грид-система представляет собою совокупность рабочих станций, на

которых действует системная служба Docker. Для реализации распределенной системы управления обработкой данных, основанной на принципе симметричного горизонтального распределения, целесообразно использовать предложенную комбинацию грид-архитектуры и контейнерной технологии. Используемые в этом случае вычислительные средства можно рассматривать как рабочие станции, способные эффективно реализовывать функции СУБД.

Предлагается система, состоящая из следующих компонентов:

- контейнерсодержащий СУБД, прикладное программное обеспечение для решения задач обработки данных и реализации симметрично горизонтального распределения данных. Вариант выполнения контейнера без СУБД возможен в случае, когда контейнер должен быть запущен на рабочей станции, на которой СУБД уже установлена;

- физическая машина (инициатор), содержит системное программное обеспечение, предназначенное для определения свободных ресурсов в сети рабочих станций, распределения задач для реализации симметрично-горизонтального распределения данных и запросов на обработку данных для выполнения контейнеров.

Симметрично горизонтальное распределение данных и параллельное выполнение операции Join реализуются по следующему алгоритму.

1. Инициатором определяются рабочие станции, обладающие достаточными ресурсами для выполнения операции «присоединение» и доступные в текущий момент времени для выполнения распределённых задач.

2. Выполняется симметричное горизонтальное распределение и свободным контейнерам (службам) инициатором отправляются индексные таблицы.

3. Как только службы получают индексные таблицы, в СУБД инициируется хранимая процедура запуска удалённой операции JOIN. Результаты работы каждой службы помещаются в единую таблицу у инициатора.

4. По завершении каждого из контейнеров реализации операции JOIN и записи результатов работы в таблицу БД инициатора служба сообщает инициатору о завершении своей работы и готовности к обработке последующих запросов.

Задача по реализации симметричного горизонтального распределения средствами базы данных. Для решения задачи была выбрана СУБД PostgreSQL. Выбор данной СУБД был обусловлен рядом причин:

- эта модель изоморфна теоретико-множественной (файловой) модели данных, которая обеспечивает возможность симметричного горизонтального распределения;

- она обеспечивает выполнение важнейшего требования грид-технологии. Это позволяет симметрично горизонтально распределить таблицы-операнды операции Join, и затем параллельно выполнить эту операцию над фрагментами таблиц. Кроме того, операции симметричного горизонтального распределения таблиц – создание индексов для индексно-последовательного доступа к таблицам, распределение таблиц алгоритмом бустрофедона – могут быть реализованы в процедурно-ориентированном диалекте языка SQL – PL/PGSQL. Таким образом, выбор SQL-реляционной модели данных позволяет использовать вычислительные средства, реализованные на различных платформах: различные операционные системы, различные, но поддерживающие SQL-реляционную модель, СУБД. Это полностью решает проблему интероперабельности. Применение грид-технологии в сочетании с СУБД PosrgreSQL позволяет создавать для конкретных приложений локальные параллельные программно-аппаратные комплексы или локальные грид-системы;

- наличие функции dblink, позволяющей выполнять удалённый Join запрос в удалённой базе данных. Когда этой функции передаются два аргумента типа text, первый сначала рассматривается как имя постоянного подключения; если такое подключение находится, команда выполняется для него. Если не находится, первый аргумент воспринимается как строка подключения для функции dblink_connect, и заданное подключение устанавливается только на время выполнения этой команды.

Рабочие станции и их виды. Выделяется три возможных вида рабочих станций: *полнофункциональная, частичнофункциональная и потенциальная.*

- Полнофункциональная – рабочая станция, имеющая свою ОС, СУБД и БД (с набором хранимых процедур).

- Частичнофункциональная – рабочая станция, имеющая свою ОС и СУБД.

- Потенциальная – рабочая станция, которая имеет у себя только предустановленную ОС.

В данной работе будет рассмотрена только полнофункциональная рабочая станция баз данных.

Процесс взаимодействия основной СУБД (инициатор) с СУБД, распределёнными по контейнерам (службами) показан на рисунке 1.

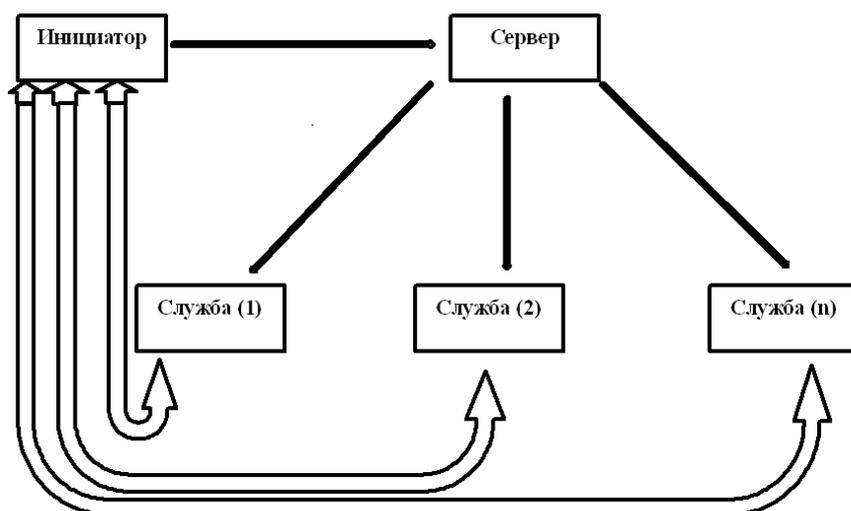


Рис. 1. Процесс взаимодействия рабочих станций в локальном гетто. Инициатор отправляет запрос на сервер (СУБД) с целью начать реализацию симметричного горизонтального распределения. Сервер определяет свободные службы и отправляет им команду начала. Далее каждая служба берёт свою часть распределённых данных у инициатора, параллельно обрабатывает и возвращает в единую таблицу обратно инициатору

Физическая СУБД и СУБД из контейнера связаны между собой при помощи встроенной в PostgreSQL функции dblink. В БД физической машины хранятся IP адреса виртуальной машины, где располагаются контейнеры, а также порт каждого контейнера. В свою очередь, в каждой БД из контейнерной СУБД имеется адрес физической машины. При первом запуске контейнера, он иницирует подключение к физической машине с целью установить флаг готовности данного контейнера к выполнению распределённой операции JOIN. На данном этапе подготовка системы к работе завершена.

СУБД на физической машине получает запрос, который требует исполнения операции Join над некоторым множеством данных. В этот момент СУБД выясняет количество доступных контейнеров в сети из соответственной таблицы и распределяет данные на количество доступных контейнеров. После при помощи функции dblink происходит передача этих данных каждой СУБД из контейнера, где после исполнения команды JOIN, данные будут отправлены обратно.

Описание программно-аппаратного комплекса.

- Рабочая станция – PC с процессором типа IntelCorei7 8750h и оперативными памятью 12 Гб.
- Локальная вычислительная сеть.
- Однородная СУБД Postgre.
- Docker Toolbox с VMware

Заключение. Таким образом, разработана грид-система, основанная на контейнерных технологиях (службе Docker), позволяющая применять симметричное горизонтальное распределение данных при помощи средств самой СУБД без необходимости написания дополнительного программного обеспечения. Были рассмотрены различные варианты (виды) рабочих станций (полнофункциональная, частично функциональная и потенциальная), особенно подробно разобран вариант полнофункциональной рабочей станции как максимально быстро развёртываемый из всех представленных в статье. На основе исследований была разработана архитектура программно-аппаратного комплекса для реализации симметричного горизонтального распределения баз данных СУБД Postgre. Приведено описание этого комплекса и алгоритма симметричного горизонтального распределения.

Литература

1. <https://www.postgresql.org/docs/10/static/index.html>.
2. Левин Н.А., Мунерман В.И. Модели обработки больших объемов данных в системах массового параллелизма // Системы высокой доступности. – 2013, Т. 9, № 1. – С. 35-43.
3. Мунерман В.И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. – 2014, Т. 10, № 4. – С. 3-16.
4. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Параллельная реализация симметричного горизонтального распределения данных на основе сетевых технологий // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование». – 2017. – Vol. 13, № 3. – Р. 38-43.
5. Munerman V., Munerman D. Realization of Distributed Data Processing on the Basis of Container Technology // 2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EConRus). – IEEE. – 2019. – С. 1740-1744.
6. Overview of Docker Compose <https://docs.docker.com/compose/>.

O.E. Diev

Smolensk State University

IMPLEMENTATION OF A SYMMETRIC HORIZONTAL DISTRIBUTION IN DATABASE AND GRID TECHNOLOGY

Keywords: *massively data processing; parallel programming; software and hardware complexes; PostgreSQL; grid cluster; containers; Docker.*

Abstract. *The paper considers the task of parallelizing a JOIN request in a relational DBMS using a local grid system using container technologies, in particular, using Docker software. Several options for workstations were investigated, namely: full-featured - a workstation with its own OS, DBMS and DB, partially-functional - a workstation with its own OS and DBMS and*

potential - a workstation that has only a pre-installed OS. The article deals only with a full-featured workstation. As a result of writing the article, a new concept of the local grid system was obtained, which allows applying the concept of symmetric horizontal distribution only by means of the DBMS, without the need to write monitoring software.

Г.А. Довгерд, А.М. Ольшанский
Московский Авиационный Институт, АО «НИИАС»

УДК 004.021

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОВЕДЕНИЕМ ИНС Т. КОХОНЕНА

Ключевые слова: *нейронные сети; оптимальное управление; наблюдатель; обучение.*

В статье рассматривается задача оптимального управления потенциалом самоорганизующейся нейронной сети Кохонена. Для этого в конструкцию сети Кохонена вводится блок наблюдателя. Данная конструкция реализована на языке обработки данных R. Получены опытные кривые изменения потенциала нейронов во времени. Составлено дифференциальное уравнение этого процесса. Решаются задачи оптимального управления Больца и Лагранжа. В ходе работы устанавливается невозможность управления нейроном Кохонена при сделанных предположениях.

В мировой и отечественной научной практике часто встречаются задачи, в которых искусственная нейронная сеть выступает в роли генератора управляющих сигналов [3]. Однако сама она, как правило, не выступает в роли объекта управления. Цель настоящей работы – рассмотреть ИНС Кохонена как объект управления.

Сети (слои) Кохонена (Kohonen T.) относятся к самоорганизующимся нейронным сетям. Самоорганизующаяся сеть позволяет выявлять кластеры (группы) входных векторов, обладающих некоторыми общими свойствами.

Кластеризация – это разделение исследуемого множества объектов на группы «похожих» объектов, называемых кластерами. Синонимами термина «кластер» (англ. cluster – сгусток, пучок, группа) являются термины «класс», «таксон», «сгущение». Задача кластеризации принципиально отличается от задачи классификации. Решением задачи

классификации является отнесение каждого из объектов к одному из заранее определенных классов. В задаче кластеризации происходит отнесение объекта к одному из заранее неопределенных классов. Разбиение объектов по кластерам осуществляется при одновременном формировании кластеров.

Важно отметить роль содержательной интерпретации каждого кластера. Каждому кластеру необходимо присвоить содержательное название, отражающее суть объектов кластера. Для этого необходимо выявить, признаки, объединяющие объекты в кластер. Это может потребовать статистического анализа свойств объекта кластера.

С помощью сетей Кохонена производится кластеризация объектов, описываемых количественными характеристиками [1].

Для целей настоящего исследования автором была сформирована сеть Кохонена из трех нейронов при помощи следующего скрипта на языке R:

```
rm(list=ls())
ler<-0.02
setwd("c:/Dat")
df<-read.csv2("kohonen1.csv",sep = ",", header = F)
df<-df/max(df)
df$V6<-0
df$V7<-0
df$V8<-0
df$V6[1:200]<-1
df$V7[201:400]<-1
df$V8[401:600]<-1
df1<-df[1:200,] #первое подмножество
df2<-df[201:400,] #второе подмножество
df3<-df[401:600,] #третье подмножество
Kohonen<-data.frame(0, nrow=5, ncol=3) #инициализация случайными весами
for (i in 1:5) {
  for (j in 1:3) {
    Kohonen[i,j]<-runif(1,0,1)
  }
}
n_epochs=20 #число эпох
count<-as.data.frame(matrix(0,n_epochs,3))
names(count)<-c("Similar to 1","Similar to 2", "Similar to 3")
#место для записи средних по эпохам мер близости
#расчет выхода сети Кохонена
answer<-as.data.frame(matrix(0,nrow(df),3)) #матрица ответов сети Кохонена
diff<-as.data.frame(matrix(0,nrow(df),3))#
матрица для записи ошибок на каждой эпохе
for (z in 1:n_epochs) {
  #расчет первичного выхода сети Кохонена
  for (i in 1:nrow(df)) {
    for (j in 1:3) {
```

```

answer[i,j]<-sqrt(sum((df[i,1:5]-Kohonen[,j])^2))
#answer[i,j]<-df[i,1:5]*Kohonen[,j]
}
}
#средний расчет наблюдаемых значений.загнать далее по числу эпох
ave<-c(0,0,0)
for (k in 1:3) {
ave[k]<-sum(answer[,k]/600)
count[z,k]<-ave[k]
}
#создаем ответ для презентации сети Кохонена
answer_pres<-answer
for (i in 1:nrow(answer_pres)) {
sluzh<-answer_pres[i,]
a<-which.min(sluzh)
Kohonen[1:5,a]<-Kohonen[1:5,a]*(1-ler)+df[i,1:5]*ler #ПересчетвесовКохонена
answer_pres[i,a]<-1
for (j in 1:3) {
if (j!=a) answer_pres[i,j]<-0
}
}
#ответ сети получен
diff<-answer_pres-df[,6:8]
}

```

В отличие от классических линейных систем управления [2] сеть Кохонена является системой ненаблюдаемой. Поэтому для получения функций, заменяющих функции состояния, был введен искусственный прием – сформирована программная структура, фиксирующая значение потенциала каждого из трех нейронов Кохонена на каждой эпохе обучения. Таким образом, были построены ряды $E(t)$, примеры которых отражены ниже (таблица 1).

Таблица 1

Весы нейронов сети Кохонена и аппроксимированные функцией $x(t)$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Нейрон_2_75	0,80	0,56	0,54	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Нейрон_3_75	0,90	1,03	0,74	0,65	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62
Нейрон_1_100	0,81	0,55	0,54	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Нейрон_1_125	0,79	0,59	0,62	0,64	0,65	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
Нейрон_2_125	0,73	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Нейрон_1_175	0,88	0,54	0,53	0,52	0,53	0,54	0,54	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
Нейрон_2_250	0,79	0,66	0,63	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62
Нейрон_3_250	0,72	0,71	0,67	0,67	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66
$x(t) = A_0 e^{-kt}$	0,79	0,68	0,64	0,62	0,61	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию каждого нейрона, была проведена аппроксимация полученных рядов, причем достаточной точностью признавалось расхождение в 10% и менее.

Таблица 2

Среднеквадратическое отклонение (в%)

Нейрон_2_75	Нейрон_3_75	Нейрон_1_100	Нейрон_1_125	Нейрон_2_125	Нейрон_1_175	Нейрон_2_250	Нейрон_3_250	Среднее отклонение по серии
0,055	0,101	0,0581	0,035	0,039	0,074	0,039	0,016	0,0476

Таким образом, аппроксимирующая функция может быть представлена в виде: $A_0 e^{-kt}$, где A_0 – начальное значение функции выхода нейрона, k – скорость убывания потенциала нейрона.

Зададим дифференциальное уравнение потенциала нейрона Кохонена как

$$\frac{dE}{dt} = A_0 e^{-kt} + u(t), \quad (1)$$

где $t \in [t_0; t_1]$, $E(t_0) = e_1$, $E(t_1) = e_2$, $e_2 < e_1$, $k \in R$, $u(t)$ – управление, и функционал

$$I = \int u^2(t) dt + E(t_1) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Решаем задачу Больца, смысл которой состоит не только в минимизации управления, но и в нахождении минимального остаточного значения потенциала нейрона в момент окончания управления [2].

1. Составляем гамильтониан:

$$H = \psi f - u^2 - E = \psi A_0 e^{-kt} + \psi u - u^2 - E.$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0. \text{ Отсюда } u^* = \frac{\psi}{2}.$$

3. Выписываем уравнения системы с учётом результата п. 2:

$$\frac{dE}{dt} = A_0 e^{-kt} + u(t) = \frac{dE}{dt} = A_0 e^{-kt} + \frac{\psi}{2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{dH}{dE} = 1$$

$$\psi(t) = t + c_1$$

$$u^* = \frac{t}{2} + c_1 \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dt} = A_0 e^{-kt} + \frac{t}{2} + c_2$$

$$\int \frac{dE}{dt} = E(t) = \frac{A_0 e^{-kt}}{-k} + \frac{t^2}{4} + c_1 t + c_2. \quad (4)$$

Представим $\frac{A_0}{-k}$ в виде B , тогда:

$$B e^{-kt} + \frac{t^2}{4} + c_1 t + c_2$$

Подставим наши значения $E(t_0)$ и $E(t_1)$ в полученное уравнение:

$$\begin{cases} Be^{-kt_0} + \frac{t_0^2}{4} + c_1 t_0 + c_2 = e_1 \\ Be^{-kt_1} + \frac{t_1^2}{4} + c_1 t_1 + c_2 = e_2 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{Be^{-kt_1} + \frac{t_1^2}{4} + Be^{-kt_0} + \frac{t_0^2}{4} + c_1 t_0 - e_1 - e_2}{t_1} \\ c_2 = Be^{-kt_0} + \frac{t_0^2}{4} + c_1 t_0 - e_1 \end{cases}$$

Таким образом, найденное оптимальное управление (3) является возрастающим со временем, в то время как нормальным является процесс убывания потенциала нейрона.

Если же решать задачу Лагранжа при заданном критерии(5)

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min \quad (5)$$

тогда максимум гамильтониана по управлению: $\frac{\partial H}{\partial u} = \psi - 2u = 0$.

Отсюда $u^* = \text{const}$.

Так как критерий (5) квадратичный, то лучшее управление принимается равным нулю. То есть сеть Кохонена признается системой неуправляемой, и наилучшим поведением её нейронов следует признать график, представленный на рисунке 1.

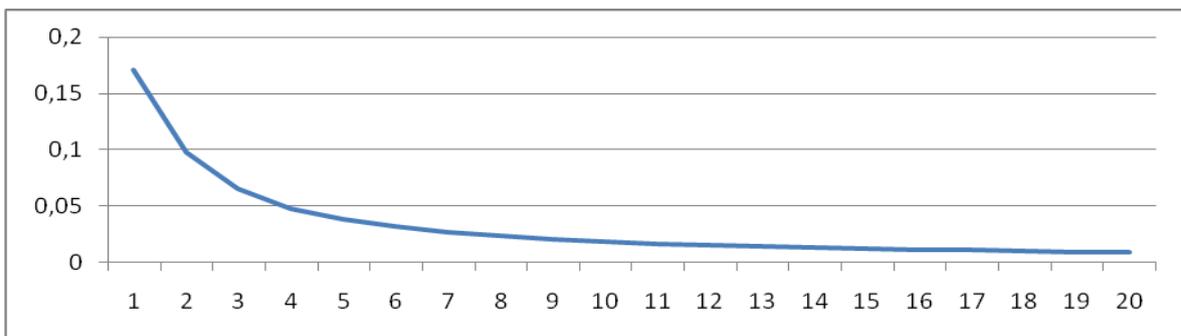


Рис. 1. График естественного изменения потенциала нейрона

При сохранении принципиального вида дифференциального уравнения эволюция потенциала нейрона как (1), так и вне зависимости от вида функции $f(t)$, нейрон Кохонена является неуправляемым.

Литература

1. Горбаченко В.И. Сети и карты Кохонена. URL: <http://gorbachenko.self-organization.ru/>
2. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

3. Чернодуб А.Н., Дзюба Д.А. Обзор методов нейруправления // Проблемы программирования. – 2011. – № 2. – С. 79-94.

G.A. Dovgerd, A.M. Olshansky
Moscow Aviation Institute (MAI), JSC «NIIAS»

ABOUT CONTROL TASK OF KOHONEN NEURAL NETWORK

Keywords: *neuralnetworks; optimal control; observer; learning.*

Abstract. *The article deals with the problem of optimal control of the potential of a self-organizing Kohonen neural network. To do this an observer block is introduced into the construction of the Kohonen network. This construction is written in the data processing language «R». Experimental curves of changes of the neuron potential as time series are obtained. The differential equation of this process is transformed into Bolz problem and Lagrange problem. In the course of the paper it is established that it is impossible to control the Kohonen neuron under the given assumptions.*

И.Б. Дроздов
Смоленский государственный университет

УДК 004.021

ВЫБОР СХЕМЫ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ АЛГОРИТМА ТРАССИРОВКИ ЛУЧЕЙ

Ключевые слова: *трассировка лучей; компьютерная графика; параллельные вычисления; балансировка нагрузки.*

В статье рассматривается несколько схем разделения изображения, которые могут использоваться для распределения работы по вычислению значений пикселей по нескольким блокам обработки. Выполнена программная реализация этих схем с использованием технологии OpenCL и их сравнение.

Введение. Ключевой вопрос распределения отрисовки изображения по количеству блоков обработки – как назначить пиксели для каждого блока. Рабочие нагрузки обычно встречаются в средствах рендеринга трассировки путей, которые моделируют взаимодействие света с материалами света. Свет часто отражается и преломляется

несколько раз, прежде чем путь его прохождения завершается. Количество отражений, а также стоимость оценки каждого материала резко различаются в разных областях сцены. Рассмотрим, например, автомобиль в куполе бесконечной среды. Лучи, которые пропускают всю геометрию и немедленно попадают в окружающую среду, чрезвычайно дешевы для вычисления. Напротив, лучи, попадающие на фару автомобиля, повлекут за собой более высокие затраты на трассировку лучей и будут отражаться вокруг фары десятки раз, прежде чем достигнуть излучателей фары или выйти в окружающую среду. Таким образом, пиксели, которые покрывают фару, могут быть на порядок дороже, чем пиксели, которые покрывают только окружающую среду. Важно отметить, что эта стоимость не известна заранее и поэтому не может быть принята во внимание для расчета оптимального распределения работы [1].

Основы трассировки лучей. *Трассировка лучей* – метод отрисовки изображения, при котором отслеживаются пути, которые луч света проходит от окна просмотра (то есть монитора) до каждого объекта, от которого он отражается, вплоть до источника этого луча. Трассировка лучей использует механизм нахождения ближайшего пересечения луча и объекта для рекурсивного вычисления цвета луча. Например, при попадании в зеркало новый луч пускается из точки попадания в направлении отражения. Аналогично прозрачные или стеклянные объекты могут порождать как отражающий, так и преломляющий луч. Этот процесс происходит рекурсивно, при этом каждый новый луч потенциально порождает дополнительные лучи отражения и преломления. Обычно устанавливают некоторый предел рекурсии, например максимальное количество отскоков. Полученное дерево проходится обратно по цепочке, чтобы вычислить цвет. При этом каждая точка пересечения проверяется на затенение, направляя луч к каждому источнику света чтобы вычислить тень [5].

Требования для схем балансировки нагрузки. Эффективная схема балансировки нагрузки должна обеспечивать хорошее масштабирование на большом количестве процессоров. Затраты на вычисления и связь должны быть низкими. В интересах простоты часто желательно назначить фиксированный набор рабочей нагрузки каждому процессору. Хотя размер набора может быть адаптирован с течением времени, например, на основе измерений производительности. Эта переконфигурация обычно происходит между кадрами. Это дает схему, которая является статической для каждого кадра, что упрощает уменьшение объема связи между балансировщиком нагрузки и процессорами. Правильное распределение работы имеет большое значение для достижения эффективного масштабирования со статической схемой. Каждому процессору должна быть назначена часть

работы, которая пропорциональна относительной производительности процессора. Это нетривиальная задача при генерации изображения, использующая трассировку лучей, особенно для трассировки на основе физических данных и аналогичных методов. Ситуация еще сложнее в гетерогенных вычислениях установки, где вычислительная мощность различных процессоров существенно различается.

Схемы балансировки. Далее рассматривается ряд схем распределения и исследуется их пригодность для эффективного распределения рабочей нагрузки в описанном контексте. В качестве иллюстрации будет рассматриваться распределение между четырьмя процессорами, например четырьмя графическими процессорами на одной машине. Однако следует обратить внимание, что описанные ниже подходы применимы к любому количеству и типу процессоров, включая комбинации разных типов процессоров.

1. *Простейшее разбиение.* При мультипроцессорной растеризации нередко изображение просто делят на большие плитки, назначая одну плитку каждому процессору. В нашем случае этот простой подход имеет серьезный недостаток, заключающийся в том, что стоимость пикселей обычно неравномерно распределяется по изображению. На рисунке 1 стоимость вычисления плитки в правом нижнем углу, вероятно, будет доминировать в общем времени визуализации кадра из-за дополнительной сферы. Все остальные процессоры будут простаивать в течение значительной части времени кадра, пока процессор, ответственный за эту плитку, завершит свою работу. Кроме того, все плитки одинакового размера, что делает этот подход ещё менее эффективным в гетерогенных системах.

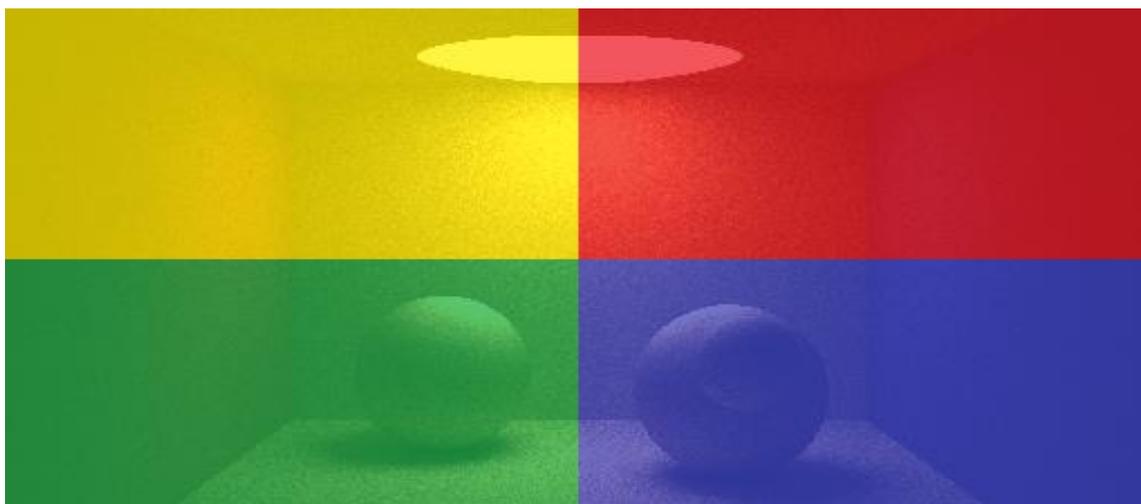


Рис. 1. Простейшее разбиение изображения на 4 части

2. *Минимизация размера задачи.* Обе проблемы, связанные с простейшим разбиением, могут быть улучшены путем разделения изображения на более мелкие области и распределения количества областей для каждого процессора. В крайнем случае размер области будет один пиксель. В большинстве случаев используют строки изображений или маленькие плитки. Выбор размера региона обычно является результатом компромисса между более тонкой гранулярностью распределения и лучшей эффективностью кэширования. Если регионы назначаются процессорам циклически, как показано на рисунке 2, а не в смежных блоках, распределение рабочей нагрузки значительно улучшается.

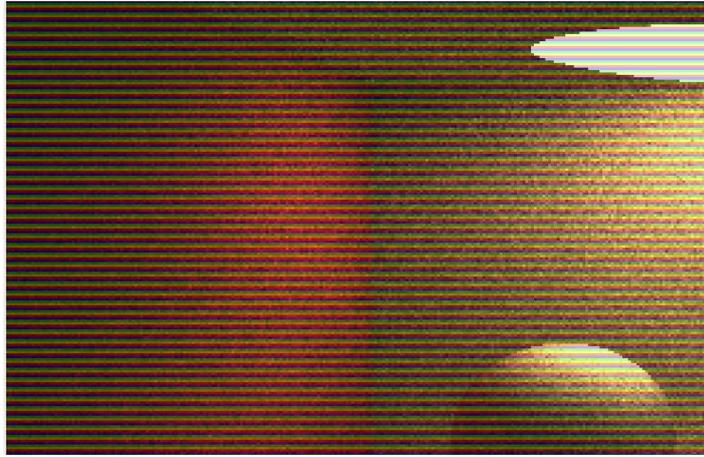


Рис. 2. Разбиение изображения на строки

3. *Распределение задач по функции обращения битов.* Поскольку стоимость отдельных пикселей неизвестна во время распределения работы, остаётся предполагать, что все пиксели имеют одинаковую стоимость. Хотя это, как правило, далеко от истины, как описано ранее, предположение становится разумным, если каждый набор пикселей, назначенный процессору, хорошо распределен по изображению [3]. Для достижения этого распределения изображение из n пикселей разбивается на m областей, где m значительно больше, чем количество доступных процессоров p . Области выбираются как непрерывные полосы из s пикселей, так что изображение делится на $m = 2^b$ областей. Целое число b выбирается так, чтобы максимизировать m , сохраняя количество пикселей на область s выше определенного нижнего предела, например 128 пикселей. Размер области не менее $s = \lceil n/m \rceil$ необходим для покрытия всего изображения. Следует учитывать, что может потребоваться немного дополнить размер изображения до m дополнительных пикселей.

Набор индексов регионов $\{0, \dots, m - 1\}$ разбивается на p непрерывных диапазонов, пропорциональных относительной производительности рендеринга каждого процессора. Чтобы обеспечить равномерное распределение областей по изображению, индексы

областей затем переставляются определенным, детерминированным способом. Каждый индекс i отображается в область изображения j путем обращения b младших битов i , чтобы получить j . Например, индекс $i = 39 = 00100111$ отображается на $j = 11100100 = 228$ для $b = 8$. Выбранная перестановка распределяет области диапазона более равномерно по изображению, чем псевдослучайная перестановка. Функция обращения битов, используемая в перестановке, является дешевой в вычислении и не требует таблицы перестановок.

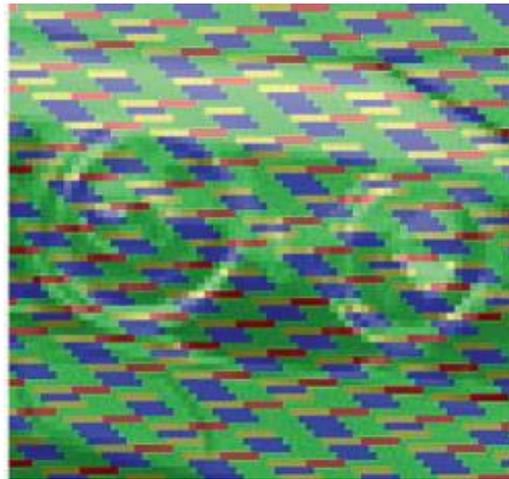


Рис. 3. Пример равномерного распределения областей

На практике регионы скорее всего не будут сильно коррелировать с особенностями изображения из-за различных форм. В результате ожидается, что пиксели, назначенные каждому процессору, будут покрывать репрезентативную часть изображения. Это гарантирует, что стоимость задачи становится примерно пропорциональной количеству пикселей в ней, что приводит к равномерной балансировке нагрузки [2].

Практическая реализация схем. Три типа схем были практически реализованы на языке C++ с использованием OpenCL-фреймворка, предназначенного для написания программ с параллельными вычислениями на различных графических и центральных процессорах. В качестве примера используется отрисовка сцены с несколькими сферами. Сперва происходит вычисление размера задачи на основе имеющегося количества потоков на используемом устройстве, после чего в зависимости от каждой из схем балансировки на каждый поток посылаются области пикселей и ссылка на буфер памяти для сохранения изображения. Внутри каждого потока через все полученные пиксели пускаются лучи, вычисляется их цвет и полученные данные сохраняются в буфер.

Результаты. Графики на рисунке 4 сравнивают эффективность трех схем балансировки нагрузки: простейшего разбиения с размером

области в 1 пиксель, разбиение на пиксельные строки и равномерное распределение диапазонов с использованием функции обращения битов. Данные получены при измерении времени в секундах отрисовки сцены со сферами, используя процессор AMD A10 5745M с 4 потоками и видеокарту AMD R7 M260 с 6 вычислительными блоками по 64 потока. По графикам видно, что простейшее разбиение является самой медленной схемой, потому что в используемой для отрисовки сцены сферы расположены неравномерно по экрану. Разбиение на пиксельные строки показывает лучшие результаты, особенно на видеокарте, что указывает на эффективность этой схемы при большом количестве потоков. Распределение по функции обращения битов одинаково эффективно как на большом, так и на малом количестве потоков.



Рис. 4 . Сравнение схем балансировки на разных устройствах

Литература

1. Haines E., Akenine-Moller T. A Simple Load-Balancing Scheme With High Scaling Efficiency // Ray Tracing Gems. – 2018. – P. 12-17
2. Dietz H.G. The Aggregate Magic Algorithms. Tech. rep., University of Kentucky, 2018. <http://aggregate.org/MAGIC/>.
3. Keller A., Wächter C., Raab M., Seibert D., van Antwerpen D., Korndörfer J., and Kettner L. The Iray Light Transport Simulation and Rendering System 2017. arXiv, <https://arxiv.org/abs/1705.01263>.
4. Haines E., Akenine-Moller T. Real-Time Rendering Fourth Edition Online chapter: Real-Time Ray Tracing version 1.4; 2018 <http://realtimerendering.com>.
5. Haines E., Akenine-Moller T. Ray Tracing Terminology // Ray Tracing Gems. – 2018. – P. 127–132.

I. B. Drozdov

Smolensk State University

SELECTION OF A PROCESSOR LOAD BALANCING SCHEME FOR A RAY TRACE ALGORITHM

Keywords: *ray tracing; computer graphics; parallel computing; load balancing*

Abstract. *The article discusses several image separation schemes that can be used to distribute the work of calculating pixel values across several processing. The software implementation of these schemes using OpenCL technology has been completed.*

В.Н. Захаров

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

УДК 004.021

ПОСЛЕДНИЕ СОВМЕСТНЫЕ ПРОГРАММЫ СОЦСТРАН В ОБЛАСТИ ИНФОРМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ (НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ И АРХИТЕКТУРЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ)

Ключевые слова: вычислительная система; алгоритм; архитектура; пакет прикладных программ; комплексный научный проект; социалистические страны.

В июне 1985 года в Праге на совещании Координационного совета академий наук социалистических стран по вычислительной технике и информатике была одобрена и утверждена «Концепция новых поколений вычислительных систем». В статье дается краткое описание истории разработки Концепции, представлена ее структура. Реализация Концепции проводилась в виде десяти комплексных научных проектов, осуществляемых международными исследовательскими коллективами. Основное внимание уделено рассмотрению комплексного научного проекта «Новые алгоритмы и архитектуры обработки информации» (КНП-9). Дано краткое описание результатов, достигнутых в ходе реализации этого проекта в период проведения работ (1985 – 1990 годы).

1. Введение. В июне 2020 года исполняется 35 лет с момента утверждения «Концепции новых поколений вычислительных систем», разработанной в 1984-1985 годах коллективом специалистов АН СССР, академий наук республик СССР, академий наук стран Восточной Европы. Это было одним из следствий действий, предпринятых в СССР в целях возрождения и усиления фундаментальных исследований в области компьютерных наук, а также для обеспечения технологического

паритета в области информационных технологий и вычислительной техники. 3 марта 1983 года было принято решение об образовании в Академии наук СССР Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации (ОИВТА). В состав ОИВТА вошли четыре ранее существовавших института, а также пять новых институтов, созданных в соответствии с выпущенными в один день, 29 июля 1983 года совместным Постановлением ЦК КПСС и Совмина СССР № 729-231 и детализирующим его Постановлением Совмина СССР № 730-232. Одним из созданных новых институтов был Институт проблем информатики АН СССР, который возглавил Борис Николаевич Наумов.

В декабре 1983 в столице Болгарии Софии в соответствии с рекомендацией совещания представителей академий наук социалистических стран состоялось I совещание Координационного совета академий наук социалистических стран по вычислительной технике и информатике (КСВТиИ), который возглавил вице-президент АН СССР академик Е.П. Велихов. На этом совещании было принято решение организовать временную рабочую группу (ВРГ) для выработки «Концепции новых поколений вычислительных систем» в социалистических странах и предложений об основных направлениях фундаментальных и прикладных исследований в области вычислительной техники и информатики (ВТиИ). В состав ВРГ вошли представители академий наук 11 социалистических стран – Народная Республика Болгария (НРБ), Венгерская Народная Республика (ВНР), Социалистическая Республика Вьетнам (СРВ), Германская Демократическая Республика (ГДР), Корейская Народно-Демократическая Республика (КНДР), Республика Куба, Монгольская Народная Республика (МНР), Польская Народная Республика (ПНР), Социалистическая Республика Румыния (СРР), СССР, Чехословацкая Социалистическая Республика (ЧССР). Председателем ВРГ был назначен директор Института проблем информатики АН СССР Борис Николаевич Наумов (тогда – член-корреспондент АН СССР, в 1984 году избран действительным членом АН СССР).

В течение 1984-85 годов коллектив специалистов АН СССР, академий наук республик СССР, академий наук стран Восточной Европы в результате интенсивной совместной деятельности разработал «Концепцию новых поколений вычислительных систем», которая была одобрена и утверждена в июне 1985 года в Праге (ЧССР) на 3-м заседании КСВТиИ [1]. Эта Концепция была в определенной степени ответом социалистических стран на программу ЕЭС ЭСПРИТ и на японскую программу ЭВМ 5-го поколения. В Концепции были сформулированы основные направления развития ВТиИ на период до 2010 года в социалистических странах и представлены главные направления исследований и разработок, которые следовало провести,

чтобы получить новые качества информационных и вычислительных систем. Концепция стала важной составной частью Комплексной программы научно-технического прогресса (КП НТП) стран-членов СЭВ, включенной в программу сотрудничества стран-членов СЭВ по приоритетному направлению «Электронизация народного хозяйства», основой проведения единой технической политики в академиях наук и промышленности социалистических стран.

2. Реализация Концепции. В рамках КП НТП СЭВ работы по реализации Концепции выполнялись в составе проблем 1.1.4 «Разработка и освоение промышленного производства персональных ЭВМ, создаваемых в составе ЕС ЭВМ и СМ ЭВМ», и 1.1.9 «Проведение фундаментальных исследований и создание нового поколения вычислительных систем». В согласованных программах работ по этим проблемам принимали участие более 60 организаций академий наук, промышленности и учебных заведений стран-участниц соглашения.

Выполнение Концепции предполагалось проводить в виде десяти комплексных научных проектов (КНП), осуществляемых международными исследовательскими коллективами:

- системы обработки знаний (КНП-1)
- системы обработки изображений и машинная графика (КНП-2)
- системы автоматизации проектирования вычислительных систем (КНП-3)
- сети ЭВМ (КНП-4)
- системы персональных компьютеров (КНП-5)
- отказоустойчивые системы (КНП-6)
- новые внешние запоминающие устройства (ВЗУ) (КНП-7)
- технология программного обеспечения ЭВМ новых поколений (КНП-8)
- новые алгоритмы и архитектуры обработки информации (КНП-9)
- учебная информатика (КНП-10).

Для руководства реализацией Концепции в качестве рабочего органа КСВТиИ была организована комиссия по новым поколениям вычислительных систем (КНВС), председателем которой был назначен академик Б.Н. Наумов. В качестве основной задачи перед КНВС была поставлена задача обеспечения практической реализации проектов с использованием всех эффективных форм международного сотрудничества – организации международных институтов и лабораторий, проведения международных конференций и симпозиумов, создания специального журнала, публикация сборников и пр. [2]. В соответствии с принятыми решениями в 1988 году в Центральном институте кибернетики и информационных процессов (Берлин, ГДР) издательство «Akademie-Verlag Berlin» начало издавать «Журнал новых

поколений вычислительных систем» («Journal of New Generation Computer Systems»). В нем освещался ход выполнения работ по реализации Концепции. Этот журнал выходил до середины 1991 года, когда деятельность по реализации Концепции фактически прекратилась в связи с известными изменениями во многих странах-участниках. Вышли в свет 14 номеров журнала.

3. Работы по КНП-9. Рассмотрим далее один из комплексных научных проектов, на примере его паспорта покажем структуру Концепции, а также приведем сведения об основных результатах, которые удалось получить в рамках реализации проекта в 1985-1990 годах [3].

КНП-9. Новые алгоритмы и архитектуры обработки информации. Страны – ответственные исполнители – СССР и НРБ. Страны – соисполнители: ГДР, ЧССР. Научные руководители – академики В.С. Пугачев, А.А. Самарский (СССР), академик С. Марков, д.т.н. К. Боянов, Й. Миклошко (НРБ).

Цель проекта:

а) разработка методов математического моделирования (ММ) и вычислительного эксперимента (ВЭ) на единой концептуальной основе с целью решения задач, связанных с созданием перспективной вычислительной техники и ее программного обеспечения (ПО);

б) разработка и исследование методов автоматического составления на ЭВМ уравнений для статистических характеристик в задачах анализа и фильтрации процессов в стохастических системах;

в) разработка алгоритмов и архитектур для новых типов вычислительных систем, включая алгоритмы для параллельных вычислений;

г) разработка алгоритмов и внедрение в практику пакетов прикладных программ на основе исследований, предусмотренных в п. а), б), в);

д) создание многопроцессорных систем с традиционной и нетрадиционной архитектурой на основе параллельной обработки. Отношение производительность / стоимость этих систем должно существенно превышать это отношение для суперкомпьютеров.

Далее подробно описывалось содержание проекта и 6 этапов его выполнения (1986, 1987, 1987-1989, 1989-1991, 1991-1993, 1993-1995 годы). Например, в качестве содержания этапа 6 указывалось: разработка ППП для фильтрации и экстраполяции процессов в стохастических системах на мультимикропроцессорной вычислительной системе. Разработка ППП для оптимальной организации вычислительных процессов в ЭВМ новых поколений.

Темы фундаментальных исследований были представлены в виде 9 крупных разделов, каждый из которых был детализирован по подзадачам:

- математические модели и алгоритмы для вычислительных систем новых поколений;
- математическое моделирование процессов теплообмена;
- математическое моделирование процессов получения полупроводниковых материалов;
- моделирование процессов микролитографии;
- моделирование физических процессов в электронно-дырочной плазме;
- создание математического обеспечения для анализа и синтеза стохастических систем с ориентацией на ЭВМ новых поколений;
- исследования по архитектурам вычислительных систем;
- исследования по влиянию алгоритмов на архитектуру вычислительных систем;
- разработка технологии вычислительного эксперимента, базовых интеллектуализирующих систем и создание программных систем для решения задач математического моделирования, динамики и управления.

Прикладные исследования были сформулированы в виде 7 разделов:

- математические модели и алгоритмы для вычислительных систем новых поколений;
- создание пакетов прикладных программ, ориентированных на расчет конструктивных узлов ЭВМ;
- вычислительный эксперимент при исследовании получения полупроводниковых материалов;
- разработка прикладного программного обеспечения по анализу и синтезу стохастических систем;
- разработка архитектур высокопроизводительных систем;
- связь алгоритмов с архитектурой вычислительных систем (в том числе создание систем автоматического распараллеливания последовательных алгоритмов, предназначенных для параллельных вычислительных систем конкретных типов);
- Разработка базовой программной системы для решения задач в области математического моделирования, динамики нелинейных систем и теории управления.

В проекте были предусмотрены пункты, описывающие требуемые ресурсы (в том числе создание международных лабораторий и их оснащение), связь с другими проектами. В качестве базовых были определены лаборатория высокопроизводительных систем и алгоритмов

для параллельной обработки Болгарской академии наук (рук. с.н.с. Ст. Марков), Отдел статистических методов в информатике (рук. академик В.С. Пугачев), Международная лаборатория математического моделирования и вычислительного эксперимента (рук. академик А.А. Самарский).

К 1990 году в рамках КНП-9 на основе выполненных фундаментальных исследований были получены следующие основные результаты:

- разработан комплекс программ «Момент» и интеллектуализированный пакет прикладных программ (ППП) «СтС-анализ» для статистического анализа стохастических систем проектирования условно оптимальных фильтров (СССР, ИПИАН);

- создана система на базе ПЭВМ для статистической обработки случайных сигналов (Система СТАДИА 2), предназначенная для статистического анализа, распознавания и моделирования случайных процессов, представляемых в виде электрических сигналов (АН Литовской ССР, Институт математики и кибернетики, НРБ, ЧССР);

- разработана базовая программная система, включающая инструментальные системы и пакеты прикладных программ (ВЦ АН СССР):

ФИКС – Инструментальная база знаний для решения задач в слабоформализованных предметных областях;

ВИКАР – Инструментальная система для создания и поддержки функционирования пакетов прикладных программ;

СИНУС – ППП по численным методам интегрирования сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;

КОНУС – ППП по комплексной оптимизации нелинейных управляемых систем;

Саяны – ППП построения количественных оценок динамики и синтеза систем управления;

ПРЕС – ППП по моделированию принятия решений;

АВТОДОТ - ППП по автоматическому доказательству теорем и поиску логического вывода;

ВФЛ-ЕС – ППП по выводу теорем методом векторных функций Ляпунова;

УСТОЙЧИВОСТЬ – ППП по анализу устойчивости и других динамических свойств систем.

- создана программа для моделирования субмикронного полевого транзистора (ГДР);

- в НРБ создана методика для оценки производительности матричного процессора ЕС 2706. Создана программная система SIMDSIM для симулирования параллельных алгоритмов SIMD архитектуры;

- создан экспериментальный образец высокопроизводительного вычислительного комплекса, состоящего из одного универсального и четырех матричных процессоров, который по производительности относился к классу «суперкомпьютеров» (НРБ).

Ход выполнения работ по проекту контролировался и уточнялся на регулярно проходивших совещаниях экспертов по КНП-9:

Москва, 12-16 октября 1987 года. Отчет по каждой организации по работам за 1987 год;

Москва, 4-8 апреля 1988 года;

Прага (ЧССР), 13-17 июня 1988 года. Демонстрация системы STADIA на ЭВМ АДТ 4500 и ИМЦ-16Д (PDP-11/23). Совместная работа ИТИА ЧСАН и ИМК АН Лит. ССР

Приморско (НРБ), 25-29 сентября 1989 года. Отчеты по 6 организациям.

4. Заключение. В работе КНВС, руководимой академиком Б.Н. Наумовым, удалось увидеть главное среди многих деталей и сделать акцент на создании систем новых поколений, а не только средств вычислительной техники. Были установлены связи между отдельными проектами путем объединения их в комплексные проекты, которые, в свою очередь, были также тесно взаимосвязаны. Работы, выполнявшиеся в рамках комплексных научных проектов, были активно востребованы научными и промышленными организациями социалистических стран. Результаты работ по КНП передавались в них для доработки и внедрения в виде макетов, опытно-экспериментальных систем, пакетов программ, алгоритмов, технической документации, проектов стандартов и пр. Почти все, что было заложено в проекты Концепции, сегодня кажется очевидным – так и делаются современные информационные и вычислительные системы. Однако надо учесть, что разрабатывались эти проекты более 30 лет назад, когда многое не казалось столь очевидным (не было такой массовости ПК, Интернета, широкого распространения мобильной связи).

Литература

1. Концепция новых поколений вычислительных систем. М.: Изд-во «Международный центр научной и технической информации», 1985. 99 с.

2. Захаров В.Н., Лавренюк Ю.А. Концепция новых поколений вычислительных систем – последняя крупная инициатива социалистических стран в области вычислительной техники и информатики // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2007, № 3. – С. 44-51.

3. Zakharov V., Lavrenjuk Y. Conception of New Generation Computer Systems – The Last Large-Scale Initiative in Computers of the COMECON Countries: A Glance after Twenty Years // IFIP Advances in Information and Communication Technology. – 2011, Vol. 357/2011. – P. 50-63.

V.N. Zakharov

Federal Research Center «Computer Science and Control» of the
Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

**LATEST JOINT PROGRAMS OF COMECON COUNTRIES IN THE
FIELD OF INFORMATICS AND COMPUTER ENGINEERING
(NEW ALGORITHMS AND ARCHITECTURE OF INFORMATION
PROCESSING)**

Keywords: *computer system; algorithm; architecture; application package;
integrated research project; COMECON countries.*

Abstract. *In June 1985, in Prague, at the Meeting of the Coordinating Council of the Academies of Sciences of the Socialist Countries for Computer Science and Computer Science, the Concept of New Generations of Computer Systems was approved. The article gives a brief description of the history of the development of the Concept, presents its structure. The implementation of the Concept was carried out in the form of ten comprehensive scientific projects carried out by international research teams. The main attention is paid to the consideration of the Integrated Scientific Project "New Algorithms and Architectures for Information Processing" (KNP-9). A brief description of the results achieved during the implementation of this project in the period of work (1985–1990) is given.*

А.П. Карпенко, В.А. Овчинников
МГТУ имени Н.Э. Баумана

УДК 519.6

**СИНТЕЗ АТАКУЮЩЕГО ШУМА ДЛЯ ГЛУБОКИХ
НЕЙРОСЕТЕВЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Ключевые слова: *глубокая нейронная сеть; классификация изображений;
синтез атакующего шума; графический процессорный ускоритель.*

Целью исследования является разработка алгоритма синтеза шума для совершения атак на нейронные сети глубокого обучения, предназначенные для классификации изображений. Представляем анализ методов проведения таких атак, постановку задачи синтеза атакующего шума, схему предлагаемого алгоритма генерации шума, его программную реализацию, организацию вычислительного эксперимента

по исследованию эффективности разработанного алгоритмического и программного обеспечения, результаты указанного эксперимента и их обсуждение. Показываем высокую эффективность предложенного алгоритма как для атакуемой сети, так и для других сетей (универсальность атакующего шума).

Развитие глубоких нейронных сетей сделало актуальной проблему обеспечения безопасности информационных систем, построенных на их основе. Область исследования атак на нейронные сети довольно нова: первые серьёзные работы в данной области были опубликованы в 2013 году. За прошедшие годы эти исследования получили широкое развитие, и в настоящее время существует множество способов «обмана» нейросетевых систем обработки данных.

Известно значительное число публикаций, посвященных исследованию эффективности атак на конкретные глубокие нейросетевые классификаторы изображений. Так, в работе [1] исследована сеть, предназначенная для распознавания лиц. Авторы предложили алгоритм синтеза атакующего шума, который с высокой вероятностью позволяет изменить распознаваемый пол человека [1]. В работе [2] исследована эффективность атаки на нейросетевые системы, распознающие дорожные знаки. Показана высокая эффективность атак для нескольких таких современных систем.

Суть задачи классификации изображений состоит в отнесении изображения к *ожидаемому* классу. Задачу обучения классифицирующей нейронной сети формулируют следующим образом. Имеется совокупность (входных) изображений $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_{|\mathbf{I}|}\}$ и набор имён классов $C = \{c_1, \dots, c_{|C|}\}$, которым принадлежат эти изображения. Отображение $\mathbf{I} \rightarrow C$ известно для изображений *обучающей* выборки $\{(I_1^l, c_1^l), \dots, (I_m^l, c_m^l)\}$, где m – число изображений в выборке; $I_i^l \in \mathbf{I}$; $c_i^l \in C$. Требуется построить *классифицирующий* нейросетевой алгоритм $A_{NN}(I, W)$, который может правильно классифицировать произвольное изображение $I \in \mathbf{I}$, где W – вектор параметров (в частности, весов) нейронной сети NN .

Для отыскания алгоритма $A_{NN}(I, W)$ решают оптимизационную задачу вида $E(A_{NN}(I, W)) \rightarrow \min_W$, где $E(A_{NN}(I, W))$ – критерий эффективности классификации, в качестве которого может выступать, например, логарифмическая функция правдоподобия [3].

Атаку на нейронную сеть определяют как искажение входного изображения, которое не может быть детектировано экспертом, но

может привести к ошибке классификации нейронной сетью этого изображения.

Обозначим I_o – исходное (оригинальное) изображение, а I_p - искаженное изображение (полученное в результате атаки на нейронную сеть). Разность $P = (p_i, i \in [1:|P|]) = I_o - I_p$ называют (атакующим) шумом (adversarial perturbation), где размерность вектора шума равна размерности векторов изображений: $|P| = |I_o| = |I_p|$.

Выделяют следующие типы атак на нейронные сети: открытые и закрытые; направленные и ненаправленные; универсальные и неуниверсальные.

В случае *открытых* (white box) атак для генерации шума необходимо иметь доступ к нейронной сети, на которую совершается атака. Для *закрытых* (black box) методов необходимо знать только результат классификации нейронной сетью.

Направленные атаки имеют целью изменить класс изображения на необходимый атакующему, а *ненаправленные* атаки – на любой класс, отличный от исходного.

Неуниверсальные атаки предполагают поиск (уникального) шума для каждого конкретного изображения, *универсальные* атаки - генерацию *универсального* шума, способного уменьшить вероятность правильной классификации широкого класса изображений.

Постановка задачи и предлагаемый метод ее решения.

Полагаем, что требуется найти шум $P \in [P^-; P^+]$, который максимизирует критерий эффективности классификации $E(P)$. Здесь P^-, P^+ – векторы, определяющие нижнюю и верхнюю границы допустимых значений соответствующих компонентов шума P ; $|P^-| = |P^+| = |P|$. Задачу поиска такого шума ставим как задачу глобальной условной оптимизации вида

$$E(P) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e(A_{NN_j}(I_i^l + P, W), c_i^l) \rightarrow \max_{P \in [P^-; P^+]} , \quad NN_j \in \{NN_k\}, \quad (1)$$

где A_{NN_j} – алгоритм классификации, реализуемый нейронной сетью NN_j ; $\{NN_k\}$ – рассматриваемый набор нейронных сетей.

Для решения задачи (4) используем простую схему ограничения шума на основе формулы

$$P = clip(P, P^-, P^+).$$

Критериями эффективности $E(P)$ атакующего шума P являются классические рейтинги top-1, top-5 ошибок классификации, которые

имеют смысл оценки вероятности принадлежности исходного изображения первому наиболее вероятному классу, предсказанному сетью NN_j , и аналогичным пяти первым наиболее вероятным классам соответственно.

Условием окончания обучения нейронной сети NN_j является достижение заданного числа эпох обучения M , а условием окончания поиска при решении задачи (1) – достижение заданного числа итераций N .

Для обучения нейронной сети NN_j применяем алгоритмы обратного распространения ошибки и градиентного спуска Адама. Задачу оптимизации (4) решаем методом стохастического градиентного спуска [4].

В процессе обучения нейронной сети NN_j используем технику аугментации по следующей схеме: растягиваем изображения до $256*256$ пикселей; случайным образом вырезаем из полученного изображения кадр размером $224*224$ пикселей; случайным образом поворачиваем этот кадр в его плоскости.

Из набора Imagenet [5] выделяем подмножество, включающее в себя 50 000 изображений, разделенных на три части:

- тренировочная выборка (4 000 изображений) для обучения нейронной сети NN_j ;
- валидационная выборка (1 000 изображений) для обнаружения эффекта переобучения той же сети;
- тестовая выборка (45 000 изображений) для оценки эффективности алгоритма генерации шума.

Программное обеспечение. Разработанное программное обеспечение WorstNoise работает по управлению операционных систем Ubuntu 18.04 и CentOS 7, написано на языке программирования Python с использованием фреймворка динамического дифференцирования графа вычислений Pytorch. Среда разработки – Visual Studio Code. Для ускорения вычислений используется графический процессор Nvidia TITAN XP и технология CUDA.

Программа WorstNoise включает в себя следующие модули: модуль загрузки обученных нейронных сетей из библиотеки torchvision; модуль чтения и аугментации данных; модуль синтеза атакующего шума; модуль, реализующий вычисление значений рейтингов, полученных на этапах валидации и тестирования, а также взаимодействия с сервисом tensorboard. Каждый из указанных модулей содержит ряд основных и довольно большое число вспомогательных функций.

Вычислительный эксперимент и обсуждение его результатов.

Для тестирования эффективности разработанного алгоритмического и программного обеспечения используем набор $\{NN_k, k \in [1:6]\}$, состоящий из шести известных высокоточных нейронных сетей:

alexnet (NN_1) - около 60 миллионов параметров [5];

vgg9 (NN_2) - 19 слоев, примерно 144 миллионов параметров [6];

resnet152 (NN_3) - 152 слоя, 60 миллионов параметров [7];

densenet (NN_4) - 20 миллионов параметров [8];

googlenet (NN_5) - 11 миллионов параметров [9];

mobilenet (NN_6) – сеть для использования на мобильных устройствах (около 6,9 миллионов параметров) [10].

Рейтинги ошибок указанных неатакованных нейронных сетей представлены в таблице 1.

Таблица 1

Рейтинги ошибок неатакованных сетей

Рейтинг	Нейронная сеть					
	alexnet	vgg19	resnet152	densenet	googlenet	mobilenet
top-1(%)	43,4	27,6	21,7	22,4	30,2	28,1
top-5(%)	20,9	9,1	5,9	6,2	10,5	9,7

Вычислительный эксперимент выполнен при следующих значениях основных свободных параметров атакующего алгоритма: $P^- = (-0,05)^{|P|}$, $P^+ = (0,05)^{|P|}$, $N = 20$, $M = 20$, $|P| = 224 \times 224 \times 3$. Здесь размерность $|P|$ вектора шума определяется размером используемых изображений (224×224 пикселей) и цветовой RGB моделью.

Некоторые результаты вычислительного эксперимента представлены в таблице 2.

Таблица 2

Рейтинги ошибок атакованных сетей

Рейтинг	Нейронная сеть					
	alexnet	vgg19	resnet152	densenet	googlenet	mobilenet
top-1(%)	98,7	98,3	71,9	66,9	80,0	87,4
top-5(%)	96,2	95,7	54,4	48,9	63,6	74,4

Из таблиц 1, 2 следует, что предложенный генератор атакующего шума позволяет повысить ошибки сети в несколько раз.

Оценки эффективности предложенного атакующего алгоритма как генератора универсального алгоритма приведены в таблицах 3, 4.

Таблица 3

Оценки эффективности атакующего алгоритма как генератора универсального шума: рейтинг top-1

Атакующая сеть	Другие сети					
	alexnet	vgg19	resnet152	densenet	googlenet	mobilenet
alexnet	98,7	79,4	36,5	35,8	48,4	56,1
vgg19	81,1	98,3	34,9	35,0	45,5	54,0
Resnet152	78,7	74,7	71,9	43,9	52,3	60,4
densenet	79,8	77,6	43,7	66,9	51,1	59,9
googlenet	78,5	74,3	40,8	38,6	80,0	57,9
mobilenet	75,5	67,9	32,9	34,0	43,5	87,4

Таблица 4

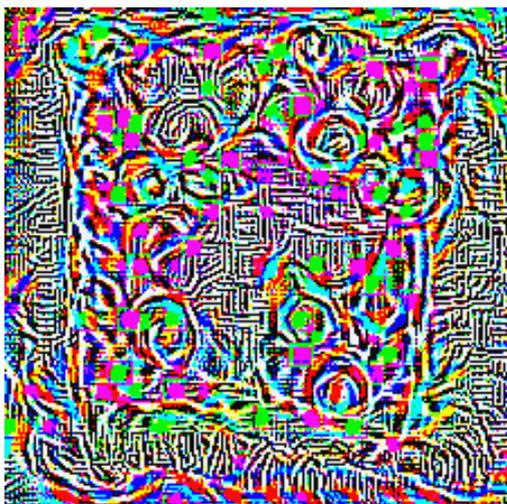
Оценки эффективности атакующего алгоритма как генератора универсального шума: рейтинг top-5

Атакуемая сеть	Другие сети					
	alexnet	vgg19	resnet152	densenet	googlenet	mobilenet
alexnet	96,2	61,6	15,8	15,4	24,8	32,2
vgg19	61,7	95,7	14,5	14,8	22,4	29,8
Resnet152	58,1	54,9	54,4	23,7	29,0	37,8
densenet	60,1	59,2	22,6	48,9	27,9	36,7
googlenet	57,8	54,8	20,1	18,4	63,6	35,0
mobilenet	53,5	45,7	13,3	14,3	20,6	74,4

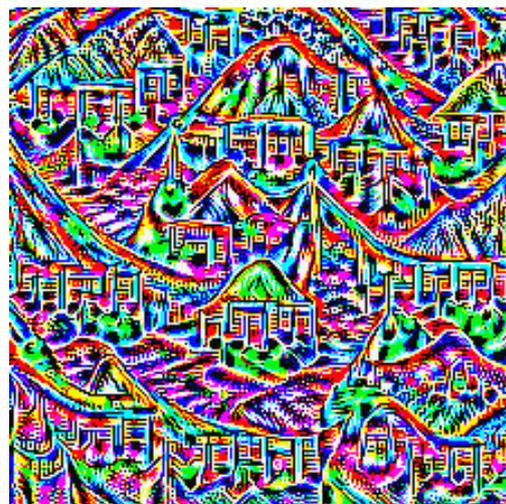
Таблица 3 показывает, что в среднем предложенный алгоритм синтеза атакующего шума увеличил значение рейтинга top-1 рассматриваемых сетей в два раза. Из таблицы 4 следует, что с точки зрения рейтинга top-5 синтезированные шумы смогли увеличить ошибки примерно в три раза по сравнению с неатакованными классификаторами.

На рисунке 1 показаны полученные атакующие шумы.

Заключение. Предложенный алгоритм синтеза атакующего шума обладает следующими свойствами: универсальность, открытость, ненаправленность, малое число существенных свободных параметров (только минимальное и максимальное допустимое значение синтезируемого шума), невысокая вычислительная сложность, малая заметность синтезированного шума для глаза человека. Алгоритм показал свою эффективность как для атакуемой сети, так и для других сетей (универсальность атакующего шума).



а) alexnet



б) vgg19



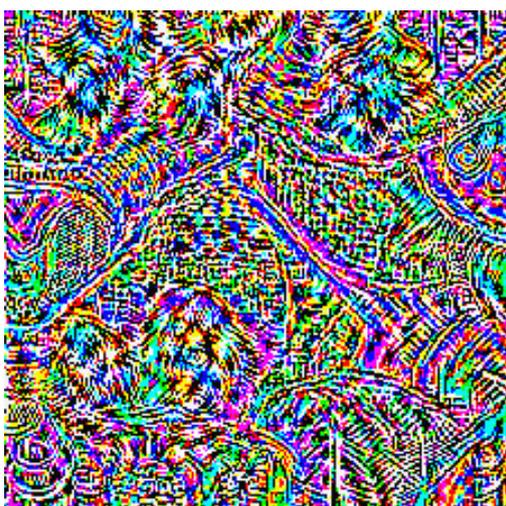
в) resnet152



г) densenet



д) googlenet



е) mobilenet

Рис. 1. Атакующие шумы, синтезированные для глубоких нейронных сетей $\{NN_k, k \in [1:6]\}$

Литература

1. Facial Attributes: Accuracy and Adversarial Robustness / Andras Rozsa, Manuel Günther, Ethan M. Rudd, Terrance E. Boult // Pattern Recognition Letters. – 2019. – Vol. 124. – P. 100–108.
2. Robust Physical-World Attacks on Deep Learning Models / Kevin Eykholt, Ivan Evtimov, Earlene Fernandes [et al.] // arXiv:1707.08945. 2017. Jul.
3. Janocha K. On Loss Functions for Deep Neural Networks in Classification // arXiv:1702.05659. 2017. Feb.
4. Kingma, D.P. Adam: A Method for Stochastic Optimization // arXiv:1412.6980. 2014. Dec.
5. Krizhevsky A. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // Advances in Neural Information Processing Systems. Curran Associates, Inc., 2012. P. 1097–1105.
6. Simonyan, K. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition // arXiv:1409.1556. 2014. Sep.
7. Facial Attributes: Accuracy and Adversarial Robustness / Andras Rozsa, Manuel Günther, Ethan M. Rudd, Terrance E. Boult // Pattern Recognition Letters. –2019. – Vol. 124. – P. 100–108.
8. Gatys L.A. A Neural Algorithm of Artistic Style // arXiv:1508.06576. 2015. Aug.
9. Going Deeper with Convolutions / Christian Szegedy, Wei Liu, Yangqing Jia [et al.] // arXiv:1409.4842 [cs]. 2014. Sep.
10. MobileNetV2: Inverted Residuals and Linear Bottlenecks / Mark Sandler, Andrew Howard, Menglong Zhu [et al.] // arXiv:1801.04381. 2018. Jan.

A.P. Karpenko, V.A. Ovchinnikov
Bauman Moscow State Technical University

SYNTHESIS OF ATTACKING NOISE FOR DEEP NEURAL NETWORK IMAGES CLASSIFIERS

Keywords: *deep neural network; image classification; synthesis of attacking noise; graphics processor accelerators.*

Abstract. *The purpose of the article is to develop a noise synthesis algorithm for attacks on deep learning neural networks designed to classify images. We present an analysis of the methods for carrying out such attacks, the formulation of the problem of synthesis of attacking noise, the scheme of the proposed noise generation algorithm, its software implementation, the organization of a computational experiment to study the effectiveness of the developed algorithmic and software, the results of this experiment and their discussion. We show the high efficiency of the proposed algorithm, both for the attacked network and for other networks (universality of attacking noise).*

МЕТОД КОМПОЗИЦИИ ХЕШ-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ключевые слова: *параллельное программирование; BigData; поиск изображений; хеш-функции; перцептивный хеш; кластеризация.*

В статье рассматривается способ построения хеш-функции, а также метод повышения эффективности поиска изображений в базах данных. В основу метода положены использование хеширования, «нейрокластеризация», возможность связи кластеризации и хеша, многоуровневое распараллеливание операций над данными и метаданными данных. Для реализации параллелизма в обработке данных использован принцип симметричного горизонтального распределения данных при учёте возможностей современных ЭВМ. В качестве метода кластеризации использована многоуровневая карта Кохонена.

В настоящее время задача поиска идентичных и схожих изображений актуальна во многих прикладных областях, таких как географические информационные системы [1], нейросетевые алгоритмы, мультимедийные системы и прочее.

Представленный метод основан на симметричном горизонтальном распределении данных для параллельной обработки, в основу этого метода положено оперирование метаданными. В качестве метаданных изображений будут выступать два ключа. Оба – значения хеш функций.

Первый является значением новой предложенной хеш-функции, основанной на кластеризации. Второй – значение перцептивного хеша – двоичный вектор, полученный путем сжатия и преобразования изображений в чёрно-белые прямоугольники с последующим использованием известных алгоритмов перцептивного хеширования [2]. Использование данных алгоритмов позволяет различать сходства в изображениях, основываясь на сходстве их хешей.

Данные для поиска изображений делятся на два типа: эталонные и оперативные. Оперативные изображения – те, поиск которых производится. Эталонные – те, среди которых производится поиск.

Эталонные данные делятся на серии кластеров алгоритмом, который будет описан ниже. Два сопоставимых изображения внутри кластера или серии кластеров будут считаться близкими, если расстояние Хэмминга между их вторыми ключами не превышает

заданной постоянной. При этом каждое поисковое изображение нужно сравнивать со всем кластером близких изображений по алгоритму горизонтального симметричного распределения [3].

Первичное хеширование – на основе кластеризации. Введем понятие «многоуровневой кластеризации». Назовем многоуровневой кластеризацией, вне зависимости от функции кластеризации и метрики на множестве объектов, процесс поэтапного разделения множества объектов на непересекающиеся кластеры, причем каждый полученный кластер также должен быть кластеризован вплоть до какого-либо фиксированного размера.

То есть первоначальное множество разбивается на кластеры. Далее процесс кластеризации происходит с каждым из получившихся на предыдущем этапе множествами. Таким образом, процесс может продолжаться до тех пор, пока после очередного процесса кластеризации получившиеся кластеры не будут иметь определенную фиксированную мощность.

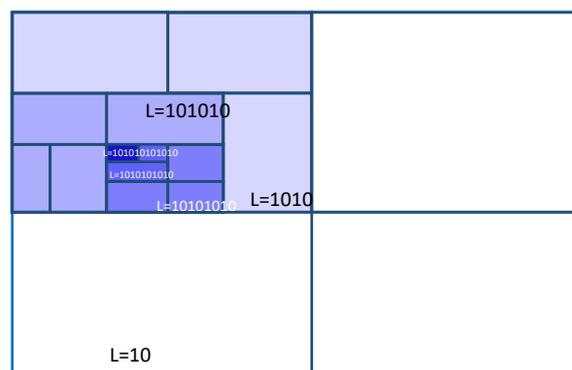


Рис. 1

На рисунке (см рис. 1) можно наблюдать пример кластеризации плоскости точек. Так как изображения являются сложной структурой, для кластеризации множеств выбрана модель сети Кохонена. Данный выбор позволит значительно ускорить алгоритм, выбрать число кластеров в зависимости от изначального множества, а также разработать сценарий, при котором алгоритм будет адаптивен к расширению множества кластеров при добавлении новых элементов в базу.

Архитектура сети состоит в следующем:

- имеется единственный слой нейронов (будем называть их кластерными центрами);
- каждый входной объект имеет связь с каждым нейроном. Таким образом, изображение пройдет сравнение с каждым центром.

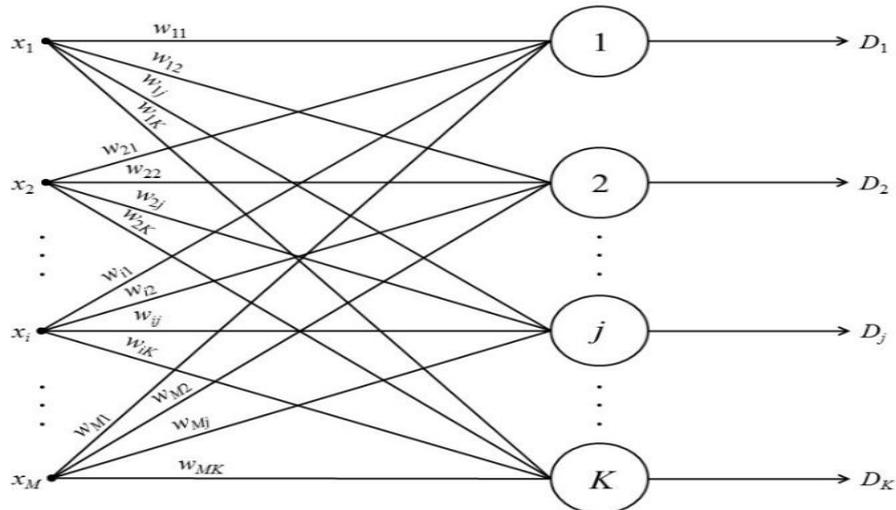


Рис. 2. Общая структура нейронной сети

Нормализация входных данных происходит в рамках:

$$[0,1]. \quad (1)$$

Далее следующий алгоритм:

1) задается структура сети – количество нейронов, данное число будет являться первоначальным количеством кластеров (в некоторых реализациях алгоритма оно может быть вычислено на основании выборки);

2) происходит случайная инициализация весов каждого нейрона, обычно размерность нейронов – количество весовых коэффициентов – совпадает с размерностью объектов или же берётся по формуле:

$$N_w = K * M, \quad (2)$$

где M – размерность изображения, K – количество кластеров;

3) подача на вход в случайном порядке объекта кластеризируемого множества и нахождение расстояния от него до нейронов производится по формуле:

$$R_j = \sqrt{\sum_{i=1}^M (x_i - w_{ij})^2}. \quad (3)$$

В данном случае координатами выступают цвета пикселя изображения. Возможен также выбор другой метрики, нежели евклидова;

4) выбирается ближайший к поданному объекту нейрон-победитель, то есть функцией активации можно считать:

$$f(R_1, R_2, R_3, \dots) = \min(R_i, i = \overline{1, n}), \quad (4)$$

после чего его вес изменяется, становясь ближе к поданному изображению:

$$w_{ij}^{q+1} = w_{ij}^q + v * (x_i - w_{ij}^q), \quad (5)$$

где ν – скорость обучения, обычно это убывающий со временем коэффициент;

5) переходим к шагу 3 до окончания множества объектов;

6) после сравниваем каждый объект из множества с нейронами, в результате положим p -й кластер как множество объектов, ближайшим к которым оказался p -ый нейрон – обозначим этот процесс для конкретного элемента O через

$$\begin{aligned} KL_S(O) = p \\ KL_S: O \rightarrow N, \end{aligned} \quad (6)$$

где S – идентификатор кластера, в котором выполняется функция; O – изображения;

7) повторяем шаги 1–6 для каждого получившегося кластера.

Таким образом, получаем систему вложенных множеств – многоуровневую кластеризацию. Если сохранить за каждым кластером его номер, то принадлежность элемента серии кластеров можно будет записать по номерам кластеров в виде:

$$(KL_{S_1}(O), KL_{S_2}(O), \dots). \quad (7)$$

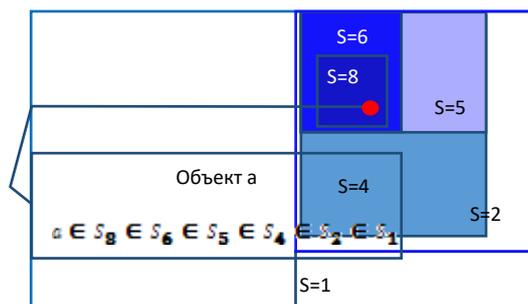


Рис. 3. Формирование хеша

Например, результат (рис. 3) – (1,2,4,5,6,8) означает, что элемент принадлежит 1-му кластеру, внутри него 2-му кластеру и так далее, на основании этой принадлежности, записывая номера вложенных кластеров для элемента в порядке вложенности через разделители, например символ «0», получим его хеш:

$$Kh_i = 102040506080. \quad (8)$$

Также в результате будет получена функция, являющаяся композицией сетей Кохонена, определения принадлежности к кластеру, соотносящая каждому элементу последовательности чисел – номера вложенных кластеров, из которых складывается хеш объекта, её назовём кластерной хеш-функцией. Более того, можно предположить, что существует возможность найти «частичный» хеш путём окончания определения кластера элемента ещё до конца цепочки кластеров, к которым относился бы элемент:

$$Kh_i = 102040506080. \quad (9)$$

Что означает принадлежность элемента i хотя бы к кластерной цепи $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, на основе чего будет возможен поиск не только идентичных, но и схожих изображений, причём с задаваемой, хоть и относительной, степенью схожести.

Вместе с этим также будут известны «центры» кластеров – нейроны, по которым определяется принадлежность элементов кластеру, и, зная расстояния между оперативным элементом и центром кластера, сможем находить максимальные расстояния между элементами кластера и оперативным элементом. Причем чем меньше различия хешей, тем меньше различия изображений, а значит, такой хеш можно отнести к перцептивным.

Таким образом, можно утверждать построение хеш-функции.

Приведение метаданных. Второй частью алгоритма поиска изображений является сверка оперативных изображений с системой кластеров. Она заключается в применении к изображению поэтапного определения вложенного кластера принадлежности этого изображения. То есть создается его частичный хеш. В какой-то момент выполнения станет известно, что расстояния до следующих по цепочке вложенности кластеров отличаются на малое фиксированное число. Таким образом, будет получен кластер (таблица) $R(Kh, Kph, w)$ изображений, заведомо близких к эталонному. Следует отметить, что скорость схождения оперативного изображения к его кластеру похожих изображений при построенной модели – задача сложности $O(1)$, поскольку являются применением хеш-функции к нему. Далее все изображения, вошедшие в данный кластер, семейством похожих изображений объединяются в таблицу $O(Kh, Kph, w)$ и будут искать схожие только в этом кластере – то есть только лишь в классе эквивалентности по ключу Kh , о чём ниже. За счёт чего ко второму этапу возможно существенное сокращение перебора.

Если рассмотрим пример поиска изображения θ среди n «нормально размещенных» изображений, то, при принятии максимального расстояния между «центрами» равным k , а также допущении константы «схожести» равной z , можно ожидать размер выборки равным:

$$n' = \left(\int_{\{[KL]_i | \rho(K_i, \theta) < z\}} N(0,1) dx \right) * n, \quad (10)$$

где KL_i – i -й кластер, K_i – центр кластера i .

Вместе с изображениями в базе возможно хранить также значение другой хеш-функции [3] для дальнейшей работы алгоритма. После этого начинается третья часть алгоритма поиска, а именно параллельный поиск при помощи горизонтального симметричного распределения на основе весов перцептивного хеширования w .

Симметричное горизонтальное распределение на основе веса значения хеш-функции. Для алгоритма необходимо использование веса ключа [4]. Основным преимуществом введения веса ключа является то, что для вычисления расстояния Хэмминга берутся не все элементы кластера. Ключ i -го поискового изображения w_i будет сравниваться лишь с теми изображениями из кластера, для весов которых выполняется следующее условие:

$$|w - w_i| \leq d, \quad (11)$$

где d – фиксированное число.

Разумеется, такой подход не может исключать случаев, когда попадать в сравнительную выборку будут изображения, в действительности далёкие от поискового, однако опыты показывают, что такой подход даёт возможность существенно сократить множество поиска. Имея таблицы $R(\text{img. } [Kh, K], hp)$ и $O(\text{img. } [Kh, K], hp)$, о которых говорилось выше, для поиска изображения используются также следующие метаданные: таблицы $indR(K_h, K_{hp}, w)$ и $indO(K_h, K_{hp}, w)$, имеющие идентичные схемы, где K_{hp} – это ключ изображения (значение второй хеш-функции), K_h – первичный хеш от кластеризации, w – вес ключа.

$$w(K_{ph}) = \sum_{i=1}^n k_i,$$

где n – размерность ключа, k_i – значение координаты ключа.

Каждому процессору присваивается фрагмент глобальной базы данных, который содержит фрагмент таблицы $indR$ и фрагмент таблицы $indO$. Далее применяется основная часть алгоритма распределённого поиска изображений по имеющимся данным и метаданным, то есть уже по двум ключам эквивалентности, что позволит существенно снизить число сравнений, а значит, и повысить скорость [4]. Другими словами, в итоговом распределении на каждом процессоре будет происходить сравнение эталонных и оперативных изображений, принадлежащих одному классу эквивалентности по ключам Kh и Khp и распределённых. Остальная часть алгоритма симметричного горизонтального распределения выполняется согласно [4].

На основании проведенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы:

- задачу построения хеш-функции для объектов можно свести к задаче кластеризации;
- при использовании данного подхода задача построения хеша сводится к нахождению метрики;

- на основе значения «кластеризационной» хеш-функции возможно разбивать множества на классы и определять принадлежность элемента к классу за малое время;
- использование перцептивного хеширования позволяет оперировать не данными, а метаданными, что снижает нагрузку на вычислительные устройства;
- концепция веса ключа позволяет ещё больше сократить выборку для поиска изображений.

Литература

1. Haynes D., Ray S., Manson S. M., Soni A. High-performance analysis of big spatial data // IEEE International Conference on Big Data (Big Data). – 2015. – P. 1953-1957.
2. Monga V., Evans B.L. Perceptual image hashing via feature points: performance evaluation and tradeoffs // IEEE Transactions on Image Processing. – 2006, 15(11). – P. 3452-3465.
3. Zakharov V. [et al]. Architecture of Software-Hardware Complex for Searching Images in Database // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus). – 2019. – P. 1735-1739.

A.V. Kirikova, A.I. Mironov, V.I. Munerman
Smolensk State University

THE METHOD OF COMPOSITION HASH-FUNCTIONS FOR OPTIMIZE A TASK OF SEARCHING IMAGES IN DATASET

Keywords: *parallel programming; big data, image search; perceptual hashing; databases; neural network.*

Abstract. *The article discusses a method of constructing a hash function, as well as a method to improve the efficiency of the task of search images in databases. The method will be based on the use of hashing, «neuroclustering», the possibility of union clustering and hash, multi-level parallelization of operations on data and metadata. To implement parallelism in data processing, the principle of symmetric horizontal data distribution will be used, taking into account the capabilities of computers. As a clustering method, a multi-level Kohonen map will be used.*

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНОК ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СУБД КЛАССА BIGDATA С РЕГУЛЯРНЫМ ПЛАНом ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ

Ключевые слова: параллельная СУБД; BigData; Clusterix-N; распределенные вычисления; параллельные вычисления; консервативная СУБД; регулярный план.

В статье исследуются возможности по улучшению оценок для консервативной (с эпизодическим обновлением данных) СУБД Clusterix-N с регулярным планом обработки запросов. Приводятся данные анализа распределения данных промежуточных отношений в результате выполнения операций хеширования на уровне JOIN. Рассматривается способ ускорения операций загрузки и удаления данных в MySQL. Предлагается модификация Clusterix-N как переход к 5 итерации конструктивного моделирования. Демонстрируются результаты экспериментов 5 итерации, а также величина полученного улучшения (достигнут паритет с ApacheSparkSQL по времени обработки теста).

Введение и постановка задачи. Объемы баз данных в сотни GB все чаще встречаются в относительно небольших организациях с ограниченными финансовыми возможностями. Такой объем данных может быть накоплен в результате длительного мониторинга работы различных автоматизированных систем (например, учет потребления энергоресурсов предприятия или аналитика поведения пользователя на web-портале), выполнения научно-исследовательских экспериментов, проведения разного рода испытаний, агрегации данных с множества источников [1] и т.д. Приобретение или аренда такими организациями вычислительных кластеров и специализированного ПО СУБД консервативного типа (с эпизодическим обновлением данных) делает возможной для них своевременную обработку накопленных данных.

Для консервативных СУБД свойственна OLAP нагрузка [2], характеризующаяся высоким удельным весом сложных запросов типа «селекция – проекция – соединение», оперирующих множеством таблиц с большим числом операций соединения. Сейчас уже существует множество таких СУБД. Например, коммерческие СУБД, такие как СУБД MS SQL Server 2016 или OracleDatabase обладают высокой производительностью и надежностью, но чрезмерно большой стоимостью

(~\$1 млн. за MSSQLServer [3] и ~\$9 млн. за OracleDatabase [4] для платформы с 192 процессорными ядрами и 1,5 TBRAM).

Удачной альтернативой дорогостоящим параллельным СУБД в области больших данных являются свободно распространяемые разработки с открытым исходным кодом Hadoop [5] и Spark [6]. Обе системы высокопроизводительны, хорошо масштабируются, и их требования к аппаратной платформе весьма скромные. Это делает Hadoop и Spark перспективными для аналитической обработки больших массивов данных.

Для консервативных СУБД наиболее важен случай обработки потока запросов, транслируемых к схеме

СЕЛЕКЦИЯ (σ) – ПРОЕКЦИЯ (π) – СОЕДИНЕНИЕ ($\sigma_{\theta}(R \times S)$).

Здесь $\langle x \rangle$ – декартово произведение. Селектирование в операции соединения ведется по θ -соответствию кортежей отношений R и S . Разработку параллельной СУБД желательно провести из условия реализации потоково-конвейерного способа обработки запросов. Выполнить такое условие непросто, ибо оно предполагает идеальную сбалансированность всех звеньев конвейера. Но если допустить достижимость приемлемой балансировки, то правомерен выбор регулярного плана обработки запросов [7]. Особенности его реализации были уже рассмотрены в [8].

В ранее проведенных исследованиях [9] было показано, что использование регулярного плана обработки запросов при соответствующей архитектурной и программно-алгоритмической разработке экономичных консервативных СУБД высокой эффективности класса BigData показывает результаты, сравнимые с лучшими открытыми системами (табл. 1, где T – время выполнения всего ПТ, M – среднее время ожидания ответа на запрос, σ – среднеквадратическое отклонение).

Таблица 1

Окончательное сравнение по T , M и σ итерации 4 и Spark, $V_{БД} = 120$ GB

	Итерация 4, мин	Spark, мин	Отношение и.4/Spark
T	403,8	260,6	1,55
M	6,3	3,1	2,03
σ	5,6	0,9	6,22

И все же по значениям T , M и σ СУБД Clusterix-N [9] заметно уступает системе Spark. Процессы удаления отношений и загрузки данных в MySQL остаются достаточно медленными. Согласно методологии конструктивного моделирования систем [10], отсюда вытекает основная задача данной статьи – ускорение операций удаления

отношений и загрузки данных в MySQL (выявленного «параметра порядка» в [9]).

Исследование возможного «перекоса» данных при хешировании по ядрам. Одной из причин перехода системы в режим работы на одном ядре может быть неравномерное распределение данных. Чтобы это выяснить, достаточно в конце загрузки каждого из отношений посчитать его размер. Для реализации такого подсчета требуется модифицировать драйвер инструментальной СУБД путем добавления метода получения объема отношения.

В составе MySQL имеется служебная база данных INFORMATION_SCHEMA [11], хранящая информацию о схемах БД, пользователях, правах доступа и т.д. С ее помощью можно легко получить размер отношения выполнив запрос следующего вида:

```
SELECT ROUND((data_length + index_length) / 1024 / 1024), 2) AS "Size (MB)"
FROM information_schema.TABLES
WHERE table_schema = "database_name" AND table_name = "relation"
ORDER BY (data_length + index_length) DESC;
```

где database_name – имя базы данных, relation – имя отношения.

Этот запрос был встроен в драйвер инструментальной СУБД. Его вызов производится после каждой загрузки данных в отношение. В процессе выполнения первых 14 запросов теста TPC-H была получена статистика распределения данных по ядрам, представленная в таблице 2, где № Q – номер запроса, № R_п – номер промежуточного отношения, M – средний размер данных для одного ядра, Max – максимальный размер данных на одно ядро, Min – минимальный размер данных на одно ядро, σ – среднеквадратическое отклонение.

Таблица 2

Оценка «перекоса» данных по ядрам для всех запросов, V_{бд} = 120 GB, количество ядер CPU – 72

№ Q	№ R _п	M	Max	Min	σ	№ Q	№ R _п	M	Max	Min	σ
2	1	779,89	779,89	779,89	0,00	8	1	1,99	1,99	1,99	0,00
2	2	0,03	1,99	0,00	0,23	8	2	1,39	4,04	0,00	1,92
2	3	3,65	10,51	0,00	5,03	8	3	0,03	1,99	0,00	0,23
2	4	0,69	1,99	0,00	0,95	8	4	4,29	4,34	4,22	0,03
2	5	0,07	1,00	0,00	0,26	8	5	0,69	1,99	0,00	0,95
2	6	0,03	1,99	0,00	0,23	8	6	2,76	39,98	0,00	10,18
2	7	76,69	76,69	76,68	0,00	8	7	649,45	649,69	649,22	0,09
2	8	76,69	76,69	76,68	0,00	8	8	0,69	1,99	0,00	0,95
2	9	1,99	1,99	1,99	0,00	8	9	9,97	9,97	9,97	0,00
2	10	1,11	1,12	1,11	0,00	8	10	4,29	4,31	4,27	0,01
2	11	10,97	10,97	10,97	0,00	8	11	1,39	4,02	0,00	1,92

№ Q	№ RП	M	Max	Min	σ	№ Q	№ RП	M	Max	Min	σ
2	12	0,92	2,66	0,00	1,27	8	12	1,69	3,40	0,00	1,39
2	13	0,07	1,00	0,00	0,26	8	13	29,91	29,91	29,91	0,00
2	14	3,87	56,51	0,00	14,26	8	14	1,99	1,99	1,99	0,00
3	1	70,85	141,49	0,00	58,12	9	1	192,44	192,44	192,44	0,00
3	2	305,47	305,75	305,10	0,14	9	2	802,02	802,25	801,78	0,09
3	3	12,44	12,48	12,40	0,02	9	3	1,99	1,99	1,99	0,00
3	4	2,99	2,99	2,99	0,00	9	4	1,99	1,99	1,99	0,00
4	1	313,78	314,00	313,59	0,07	9	5	725,62	726,43	725,00	0,58
4	2	8,78	8,97	7,97	0,40	9	6	64,52	187,98	0,00	89,09
5	1	19,00	38,05	0,00	15,62	9	7	0,69	1,99	0,00	0,95
5	2	9,97	9,97	9,97	0,00	9	8	122,46	183,19	61,73	61,16
5	3	0,69	1,99	0,00	0,95	9	9	763,88	1145,81	382,07	384,37
5	4	14,95	14,95	14,95	0,00	9	10	39,61	39,69	39,53	0,03
5	5	3,72	11,05	0,00	5,14	10	1	58,97	59,84	58,84	0,33
5	6	1,99	1,99	1,99	0,00	10	2	153,58	153,58	153,58	0,00
5	7	139,09	139,31	138,88	0,08	10	3	141,55	141,71	141,38	0,07
5	8	0,03	1,99	0,00	0,23	10	4	0,69	1,99	0,00	0,95
5	9	7,69	110,80	0,00	28,36	10	5	4,91	9,51	0,00	3,91
5	10	572,67	572,88	572,42	0,09	10	6	120,85	348,88	0,00	166,87
7	1	197,86	198,29	196,77	0,49	11	1	76,69	76,69	76,68	0,00
7	2	0,06	1,99	0,00	0,33	11	2	0,03	1,99	0,00	0,23
7	3	0,06	1,99	0,00	0,33	11	3	0,03	1,99	0,00	0,23
7	4	1,99	1,99	1,99	0,00	11	4	76,52	222,74	0,00	105,66
7	5	32,59	94,94	0,00	45,00	11	5	1,99	1,99	1,99	0,00
7	6	32,94	65,57	0,00	26,94	11	6	1,99	1,99	1,99	0,00
7	7	198,02	198,20	196,90	0,20	11	7	76,52	222,74	0,00	105,66
7	8	197,33	573,22	0,00	272,47	11	8	76,69	76,69	76,68	0,00
7	9	9,97	9,97	9,97	0,00	12	1	3,82	4,78	3,76	0,20
7	10	96,72	96,72	96,72	0,00	12	2	192,44	192,44	192,44	0,00
13	1	9,97	9,97	9,97	0,00	14	1	36,89	36,89	36,89	0,00
13	2	122,79	245,77	0,00	100,96	14	2	7,41	7,44	7,39	0,01

Как видно из таблицы 2, существенных «перекосов» данных по ядрам нет (за исключением двух отношений запросов 7 и 9). Это означает, что причина перехода системы в режим работы на одном ядре никак не связана с «перекосом», поэтому необходимо изыскание способа повышения производительности операций загрузки и удаления данных в MySQL.

Повышение производительности операций удаления отношений и загрузки данных в MySQL. Практически все операции удаления отношений и загрузки данных в MySQL выполняются модулем JOIN, поэтому ограничимся только его модификацией.

Как уже было отмечено в [9], для ускорения указанных операций потребуется разработка специализированных «движков». Это предположение возникло в процессе изучения документации MySQL. Так, в [12] сказано, что для движка MEMORY блокировка производится на уровне таблиц. То есть при выполнении операций изменения данных

INSERT, UPDATE, DELETE, ALTER и других к таблице запрещается доступ вплоть до завершения названных операций. В Clusterix-N эти операции выполняются в режиме «запрос на таблицу», то есть блокировок возникать не должно. Но данные экспериментов [9] говорят об обратном.

Детальный анализ исходных кодов MySQL помог установить, что хранилище движка MEMORY представлено в виде кучи (heap) и является общим для всего процесса сервера MySQL. Поэтому блокировка одной таблицы вызывает блокировку всей памяти этого движка в рамках одного процесса. Обойти данное ограничение можно двумя способами. Во-первых, внести такие изменения в движок MEMORY, которые позволили бы выполнять блокировку в рамках таблицы или убрать ее вовсе. Во-вторых, запустить несколько экземпляров MySQL в количестве ядер CPU.

Первый вариант чрезвычайно трудоемок и может повредить стабильности работы системы. Второй вариант может быть реализован без модификации инструментальной СУБД (MySQL), поэтому этот вариант для нас предпочтителен. Для его реализации необходимо внести ряд изменений в работу Clusterix-N.

Работа с множеством серверов MySQL потребует установки множества подключений Clusterix-N↔MySQL, контроля распределения данных и тиражирования запросов в множестве подключенных серверов MySQL. Некоторые из этих изменений были реализованы в 4 итерации для модулей IO в рамках перехода к хешированию по ядрам на уровне IO: установка множества подключений к БД в рамках одного сервера MySQL и тиражирование запросов.

Поскольку работа модуля JOIN несколько отличается от работы IO, перенос этих наработок на другие модули (JOIN и SORT) был произведен с небольшими улучшениями. Реализована возможность подключения к нескольким серверам MySQL с обработкой одного отношения в каждом сервере. Доработан контроль распределения данных по серверам MySQL. Каждому соединению устанавливается в соответствие номер ядра процессора, что позволяет передавать данные в требуемый MySQL при работе с хешированными данными. Все это – позволяет организовать работу Clusterix-N с множеством MySQL на одном узле.

Как и прежде эксперимент был проведен на платформе GPU-кластера, состоящего из 7 узлов. Параметры узлов: 2 six-core E5-2640 CPU/2,5GHz/DDR3 128GB; 2 448-core GPU Tesla C-2075/1,15GHz/GDDR5 6GB (на Mgm GPU отсутствуют). Дисковая подсистема узла – RAID 10 из 4 WD1000 DHTZ/ 1TB суммарным объемом (за вычетом «зеркала») 2 TB. Операционная система – Windows Server 2012 R2. Интерконнект между узлами – Gigabit Ethernet с

24-портовым коммутатором SSE G24-TG4. Объем БД – 120 GB. Представительский тест (ПТ) – конкатенация 6 перестановок TPC-H ThroughputTest без операций записи.

На всех узлах запущено 13 серверов MySQL: 1 – для IO, 12 – для JOIN. MySQL для IO использует движок InnoDB, в котором нет проблем, описанных в начале раздела, но он неприменим для загрузки данных в реальном времени, так как эта операция с ним занимает длительное время. Схема эксперимента показана на рисунке 1.

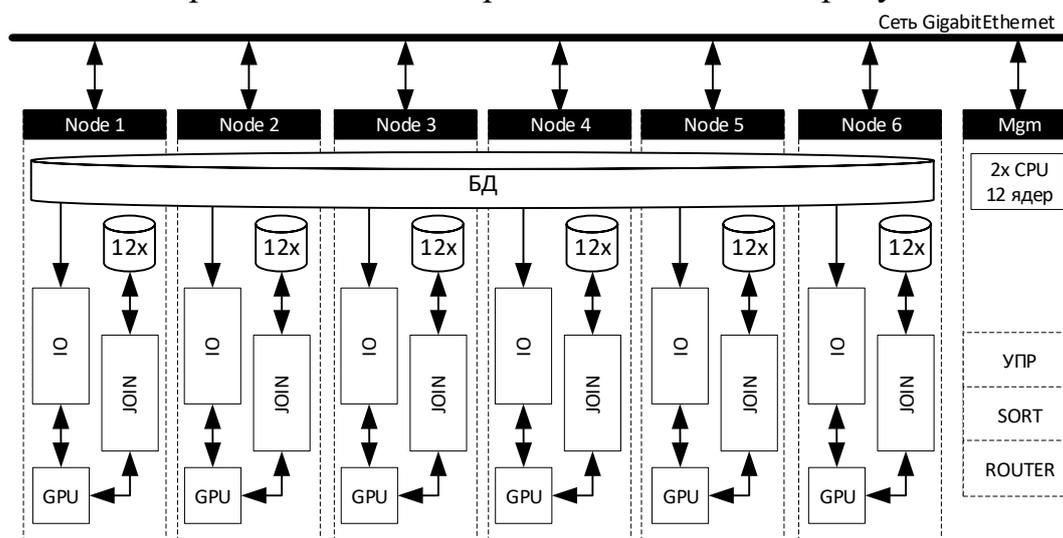


Рис. 1. Схема эксперимента

Результаты выполнения эксперимента представлены в таблицах 3 и 4. Из таблицы 3 видно, что операции удаления и загрузки данных в MySQL были существенно ускорены: в 3,4 и 2 раза соответственно. Среднее время выполнения других операций изменилось незначительно. Таблица 4 демонстрирует паритет Clusterix-Ни Spark по времени обработки всего теста. Но Clusterix-N все еще значительно уступает по параметрам M и σ .

Таблица 3

Сравнительная оценка ускорений для итераций 4 и 5

	Итерация 4, сек	Итерация 5, сек	Отношение и.4 /и.5
Передача данных	106,12	116,17	0,91
Удаление отношений R_i' , R_{vj}	140,91	41,06	3,43
Подготовка к загрузке в MySQL	24,15	25,29	0,95
Хеширование данных	56,43	56,14	1,01
Загрузка данных в MySQL	164,01	85,18	1,93
Выполнение «join»	54,77	26,76	2,05
Выполнение «select-project»	55,40	59,93	0,92
Выполнение «sort»	42,90	43,41	0,99

Сравнение по T, M и σ итерации 5 и Spark, V_{БД} = 120 GB

	Итерация 4, мин (и.4)	Итерация 5, мин (и.5)	Spark, мин (S)	Отношение	
				и.4/и.5	и.5/S
T	403,78	276,13	260,58	1,46	1,06
M	6,3	4,8	3,1	1,33	1,54
σ	5,6	4,5	0,9	1,26	4,78

Гистограммы по результатам эксперимента (рис. 2) показывают, что «параметром порядка» для 5 итерации является передача данных.

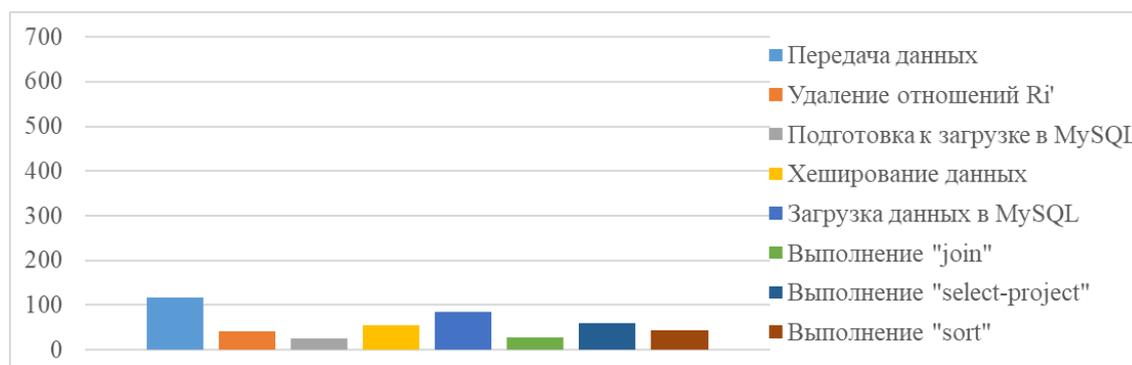


Рис.2. Среднее время выполнения отдельных операций для итерации 5, V_{БД} = 120 GB

Заключение. В результате проведенных исследований удалось значительно улучшить оценки для консервативной СУБД класса BigData с регулярным планом обработки запросов Clusterix-N вплоть до паритета по времени выполнения теста с открытой системой ApacheSpark. Тем не менее СУБД Clusterix-N заметно уступает системе Spark по значениям M и σ . Дальнейшее улучшение, как следует из гистограмм рисунка 2, связано с ускорением следующих операций: 1) передачи данных, 2) загрузка данных в MySQL, 3) хеширование данных, 4) «select-project». Операции (1, 4) могут быть ускорены работой со сжатыми базами данных. Операция (2) – разработкой специализированного движка MySQL. Вопрос с ускорением операции (4) остается пока открытым. Все это – предмет специальных исследований.

Литература

1. Ruili Wang, Wanting Ji, Mingzhe Liu, Xun Wang, Jian Weng, Song Deng, Suying Gao, Chang-an Yuan. Review on mining data from multiple data sources // Pattern Recognition Letters. – 2018. – Vol. 109. – P. 120-128. URL: <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.01.013>.
2. OLAP // Википедия. 2019. URL: <https://ru.wikipedia.org/?oldid=103123363> (дата обращения: 03.11.2019).
3. Lenovo System x3950 X6 // TPC-H Result Highlights. 2016. URL: <http://www.tpc.org/3321> (дата обращения: 10.08.2018).

4. Oracle Exadata Database Machine X7 // Oracle Россия СНГ. 2018. URL: <https://www.oracle.com/ru/engineered-systems/exadata/database-machine-x7/index.html> (дата обращения: 10.08.2018).
5. EMC Education Services. Data Science and Big Data Analytics: Discovering, Analyzing, Visualizing and Presenting Data // John Wiley & Sons. 432 p.
6. Xin, Reynold & Rosen, Josh & Zaharia, Matei & J. Franklin, Michael & Shenker, Scott & Stoica, Ion. (2012). Shark: SQL and Rich Analytics at Scale. Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 10.1145/2463676.2465288.
7. Raikhlin V.A. Simulation of Distributed Database Machines // Programming and Computer Software. – 1996. – Vol. 22, No. 2. – P. 68-74.
8. Райхлин В.А., Классен Р.К. Сравнительно недорогие гибридные технологии консервативных СУБД больших объемов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2018. – Т. 68, №1. – С. 46-59.
9. Классен Р.К., Райхлин В.А. Повышение эффективности Clusterix-подобных СУБД для аналитической обработки больших данных // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2019. – №4. – С. 43-59.
10. Райхлин В.А. Конструктивное моделирование систем. – Казань: Изд-во «ФЭН» («Наука»), 2005. – 304 с.
11. INFORMATION_SCHEMA Tables // MySQL 8.0 Reference Manual. 2019. URL: <https://dev.mysql.com/doc/refman/8.0/en/information-schema.html> (дата обращения: 03.12.2019).
12. The MEMORY Storage Engine // MySQL 8.0 Reference Manual. 2019. URL: <https://dev.mysql.com/doc/refman/8.0/en/memory-storage-engine.html> (дата обращения: 03.12.2019).

R.K. Klassen

Kazan National Research Technical University
named after A. N. Tupolev – KAI

ASSESSMENTS IMPROVEMENT FOR BIGDATA CLASS CONSERVATIVE DBMS WITH REGULAR PROCESSING PLAN

Keywords: *parallel DBMS; BigData; Clusterix-N; distributed computing; parallel computing; conservative DBMS; regular plan.*

Abstract. *The article explores the possibilities of improving assessments for a conservative (with occasional data update) Clusterix-N DBMS with a regular processing plan. The data of the analysis of the distribution of data of intermediate relations as a result of performing hash operations at the JOIN level are presented. We consider a way to speed up data loading and drop operations in MySQL. The Clusterix-N modification is proposed as a transition to the 5th iteration of constructive modeling. The results of the 5th iteration experiments are shown, as well as the size of the improvement obtained (parity with Apache Spark SQL in terms of test processing time is achieved).*

ПРОБЛЕМА КОЭФФИЦИЕНТА ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ключевые слова: *информационная энтропия; надежность; контроль; проектирование систем; нормальный закон распределения; выборка.*

В статье рассматривается проблема коэффициента информационной энтропии на примере нормального закона распределения. Базируясь на основах математической статистики, понятии энтропии и вычислительном эксперименте, предложен способ вычисления коэффициента информационной энтропии. Приведены расчеты и рассуждения, доказывающие его достоверность и исключающие возможность использования известного метода расчета коэффициента информационной энтропии для нормального закона распределения.

В теории вероятностей нормальное (Гауссовское, или Лапласа – Гаусса) распределение представляет собой тип непрерывного распределения вероятностей для случайной величины. Общая форма его функции плотности вероятности:

$$f_{\text{нормальное}}[x] = \frac{e^{-\frac{(-a+x)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Параметр a – это среднее или математическое ожидание распределения, а также его медиана и мода. Параметр σ – его стандартное отклонение. Дисперсия распределения есть квадрат его стандартного отклонения. Нормальные распределения имеют важное значение в математической статистике и часто используются в естественных и социальных науках для представления реальных случайных величин, распределение которых неизвестно. Их важность частично обусловлена центральной предельной теоремой. Она утверждает, что при некоторых условиях среднее значение многих значений случайной величины с известным средним и дисперсией само по себе является случайной величиной, распределение которой сходится к нормальному распределению по мере увеличения числа экспериментов. Поэтому физические величины, которые, как ожидается, будут суммой многих независимых процессов (таких, как ошибки измерения), часто имеют распределения, которые являются

нормальными. Кроме того, нормальное распределение обладает некоторыми уникальными свойствами, которые оказываются ценными в аналитических исследованиях. Например, любая линейная комбинация фиксированного набора нормальных отклонений является нормальным отклонением. Многие результаты и методы, такие как распространение неопределенности и подгонка параметров методом наименьших квадратов, могут быть получены аналитически в явном виде, когда соответствующие переменные нормально распределены. Нормальное распределение иногда неофициально называют колоколообразной кривой. Однако многие другие распределения имеют колоколообразную форму, например, распределение Коши, Г – образное распределение Стьюдента и логистическое распределение.

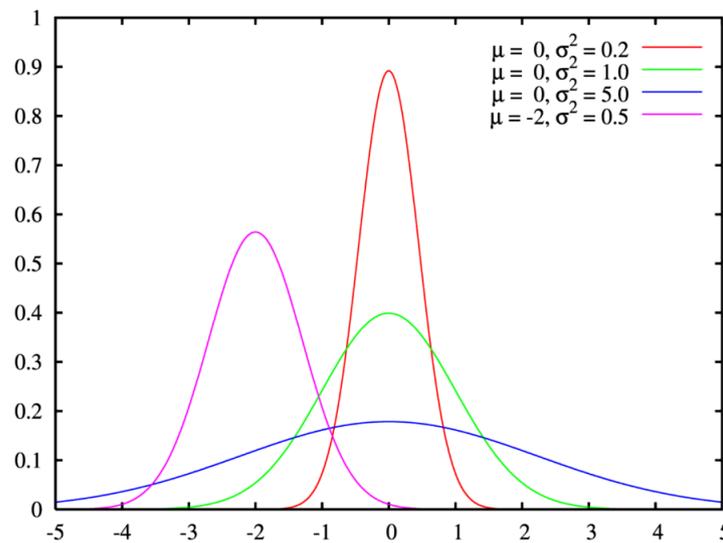


Рис. 7. Плотность вероятности нормального закона распределения.

Рассмотрим случайную величину X , имеющую стандартное нормальное распределение. Рассмотрим ее на интервале $[-5; 5]$, как на достаточном для предположения, что все элементы выборки находятся в данном интервале. Стандартное распределение взято для упрощения математических выкладок, так как система компьютерной математики не справлялась с вычислением общей формулы. Однако следующие утверждения были проверены и на случайных параметрах распределения, на которых тоже подтвердились. Число интервалов разбиения обозначим за n . Тогда вероятность попадания в i -й интервал:

$$P_{\text{нормальное}}[i] = \frac{1}{2} \left(-\text{Erf}\left[\frac{-5 + \frac{10(-1+i)}{n}}{\sqrt{2}} \right] + \text{Erf}\left[\frac{-5 + \frac{10i}{n}}{\sqrt{2}} \right] \right)$$

где $\text{Erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – функция ошибок (также известна как интеграл Лапласа). Согласно формуле энтропии для дискретных законов распределения вычислим энтропию выборки:

$$H_{\text{нормальное-дискретное}}[n] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(-\text{Erf} \left[\frac{-5 + \frac{10(-1+i)}{n}}{\sqrt{2}} \right] + \text{Erf} \left[\frac{-5 + \frac{10i}{n}}{\sqrt{2}} \right] \right) * \text{Log} \left[\frac{2}{-\text{Erf} \left[\frac{-5 + \frac{10(-1+i)}{n}}{\sqrt{2}} \right] + \text{Erf} \left[\frac{-5 + \frac{10i}{n}}{\sqrt{2}} \right]} \right]$$

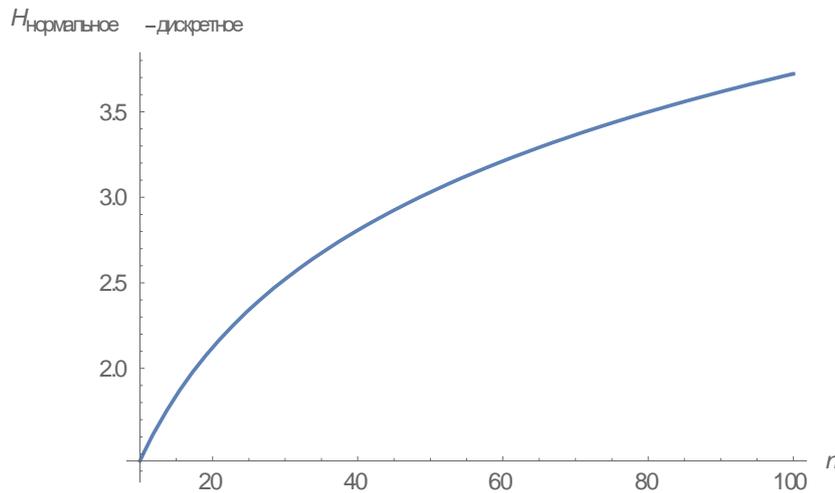


Рис. 3. График функции энтропии выборки, соответствующей стандартному нормальному распределению рассчитанной по формуле для дискретного закона распределения

Из полученного результата следует, что энтропия выборки, соответствующей стандартному нормальному закону распределения от количества интервалов разбиения. Согласно результатам остальных опытов при других значениях параметров a и σ энтропия выборки, соответствующей нормальному закону распределения с данными параметрами, также зависит от количества интервалов разбиения. Полученные функции схожи с представленной выше, но имеют незначительные отличия в численных коэффициентах, что позволяет заключить, что функция энтропии для выборок, соответствующих нормальному распределению, зависит не только от количества интервалов разбиения, но и от параметров a и σ нормального распределения.

Далее рассмотрим непрерывную модель распределения для данной случайной величины X . На интервале $[-\infty; \infty]$ плотность распределения задается следующей функцией:

$$f_{\text{нормальное}}[x] = \frac{e^{-\frac{(-a+x)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Вычислим энтропию модели данного распределения согласно формуле энтропии непрерывных законов распределения:

$$H1_{\text{нормальное}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{нормальное}}[x] * \text{Log} \left[\frac{1}{f_{\text{нормальное}}[x]} \right] =$$

$$= -\text{Log} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{\text{Log}[e]}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Далее сделаем замену переменной:

$$\frac{(x-a)}{\sigma} = t, \quad dx = \sigma dt.$$

После данной замены формула энтропии приобретает следующий вид:

$$H1_{\text{нормальное}}[t] = \text{Log}[\sigma\sqrt{2\pi}] + \frac{\text{Log}[e]}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 * e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Далее воспользуемся подходом «интегрирования по частям»:

$$u = t,$$

$$du = dt,$$

$$dv = t * e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$v = -e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

После данных замен формула примет следующий вид:

$$H1_{\text{нормальное}}[t] =$$

$$= \text{Log}[\sigma\sqrt{2\pi}] + \frac{\text{Log}[e]}{2\sqrt{2\pi}} \left(-\infty * e^{-\frac{-\infty^2}{2}} - \infty * e^{-\frac{-(-\infty)^2}{2}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \text{Log}[\sigma\sqrt{2\pi}] + \frac{\text{Log}[e]}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \text{Log}[\sqrt{2\pi}\sigma]$$

Полученная функция зависит только от параметра σ .

Как следствие, в данном случае даже для «идеального» распределения, полностью соответствующего своей модели, мы можем получить несколько различных значений коэффициента энтропии, просто взяв разное количество интервалов разбиения.

Вывод: для расчета коэффициента информационной энтропии для выборок, соответствующих нормальному распределению, следует использовать формулу энтропии для дискретных процессов.

Литература

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – Рипол Классик, 1963.

2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2005.

3. Heinhold I., Gaede K.W. Ingenieur statistic. – München; Wien: Springer Verlag, 1964. – 352 p.

4. Шторм Р., Федоров Н.Н., Федоров М.Г. Теория вероятностей; Математическая статистика; Статистический контроль качества: пер. с нем. – М.: Мир, 1970.

A.I. Makarov
Smolensk State University

THE PROBLEM OF INFORMATION ENTROPY COEFFICIENT FOR A NORMAL DISTRIBUTION

Keywords: *informational entropy; reliability; control; system design; normal distribution; sampling.*

Abstract. *The article deals with the problem of the coefficient of information entropy on the example of the normal distribution. A method for calculating the coefficient of information entropy is proposed based on the statistic's basics, the concept of entropy and computational experiment. Calculations and arguments are presented that prove its reliability and exclude the possibility of using the well-known method of calculating the information entropy coefficient for the normal distribution.*

А.Д. Маминов, М.А. Посыпкин
ФИЦ ИУ РАН

УДК 517.968.23

РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ НА ЯЗЫКЕ PYTHON¹

Ключевые слова: *интервальная арифметика; интервальный анализ; Python; интервальное расширение; численные интервальные методы.*

В статье рассматривается разработанная авторами библиотека интервальной арифметики на языке Python. В библиотеке реализованы все основные математические операции для интервальных величин, а также различные элементарные интервальные функции. Данная библиотека была разработана в связи с отсутствием в Python

¹Работа выполнена при частичной поддержке проекта РНФ 16-19-00148

аналогичных пакетов с требуемой функциональностью. В статье приводится краткое введение в интервальную арифметику, подробно описываются реализованные интервальные функции и операции, а также изучаются области применения созданного модуля.

Введение. *Интервальный анализ (интервальная математика, интервальные вычисления) – это метод, разработанный в 50–60-х годах прошлого столетия для определения границ ошибок округления и ошибок измерений в математических вычислениях и, таким образом, относящийся к разработке численных методов, которые дают надежные результаты, используя для вычислений не обычные числа, а интервалы. Такой тип методов оперирует не конкретными значениями, а диапазонами возможных значений, задаваемых началом и концом диапазона. Данная методика подходит для различных целей. Чаще всего она используется для отслеживания и обработки ошибок округления непосредственно во время расчета, а также неопределенности в знании точных значений физических и технических параметров. Такие ошибки часто возникают из-за неточностей измерений или из-за ограничений на точность вычислений, которые существуют во всех ЭВМ. Интервальная арифметика также помогает найти надежные решения с гарантированной точностью уравнений (таких, как дифференциальные уравнения, системы линейных и нелинейных уравнений), задач оптимизации и аппроксимации. Основным назначением интервальной арифметики является вычисление диапазона значений функции одной или нескольких переменных.*

Перед разработкой данной библиотеки нами был проведён анализ существующих пакетов интервальной арифметики для языка Python. Были рассмотрены следующие наиболее известные модули: `python-intervals` [1], `pyinterval` [2] и `mpmath` [3]. Наиболее поддерживаемой библиотекой, развиваемой в настоящее время, является `python-intervals`. Пакет поддерживает только теоретико-множественные операции над интервалами, в связи с чем использовать её для расчёта интервального расширения не представляется возможным.

Пакет `pyinterval` и модуль `iv` из библиотеки `mpmath` предполагают использование математических операций и функций, в том числе для расчёта интервальных расширений. Основным недостатком этих библиотек является их избыточная функциональность, сложность установки и плохая поддержка, что существенно затрудняло использование. В связи с чем было принято решение о написании собственного компактного модуля интервальной арифметики, содержащего только минимальный набор необходимых операций и функций.

Реализация интервальных математических операций и функций. В настоящем разделе дано краткое представление об интервальном анализе, за более подробной информацией можно обратиться к работам [4–6]. Как и в случае обычных математических вычислений с конкретными значениями, сначала необходимо определить простые арифметические операции и функции на элементарных интервалах.

В общем случае интервал задается неравенствами:

$a = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbf{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$. Допустимы значения $\underline{a} = -\infty, \bar{a} = +\infty$, то есть интервал может быть неограниченным.

В общем случае бинарная операция \circ для двух интервалов a, b определяется следующим образом:

$$a \circ b = [\underline{a}, \bar{a}] \circ [\underline{b}, \bar{b}] = \{a \circ b \mid a \in [\underline{a}, \bar{a}] \text{ and } b \in [\underline{b}, \bar{b}]\}.$$

Для четырёх основных математических операций (+, −, ·, /) это выражение можно переписать в виде

$$a \circ b = [\min(\underline{a} \circ \underline{b}, \underline{a} \circ \bar{b}, \bar{a} \circ \underline{b}, \bar{a} \circ \bar{b}), \max(\underline{a} \circ \underline{b}, \underline{a} \circ \bar{b}, \bar{a} \circ \underline{b}, \bar{a} \circ \bar{b})].$$

Операция деления рассматривается только для случая, когда $0 \notin [\underline{b}, \bar{b}]$. Для некоторых бинарных операций данное выражение можно упростить, учитывая их специфику:

– сложение:

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}],$$

– вычитание:

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}].$$

Для применения простых функций в интервальных вычислениях нужно их определить, используя уже известные свойства монотонности. Если $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ монотонна на интервале $a = [\underline{a}, \bar{a}]$, то получить диапазон значений функции на нем можно, вычислив значение функции на концах интервала (рис. 1). В случае монотонно неубывающей функции выполняется:

$$f([\underline{a}, \bar{a}]) = [f(\underline{a}), f(\bar{a})].$$

Если функция монотонно не возрастает, то

$$f([\underline{a}, \bar{a}]) = [f(\bar{a}), f(\underline{a})].$$

Исходя из этих свойств, получим интервалы значений основных математических функций:

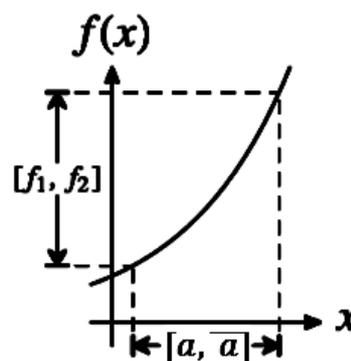


Рис. 1

– экспоненциальная функция:

$$x^{[\underline{a}, \bar{a}]} = [x^{\underline{a}}, x^{\bar{a}}], \text{ для всех } x > 1,$$

– логарифмическая функция:

$$\log_x [\underline{a}, \bar{a}] = [\log_x(\underline{a}), \log_x(\bar{a})], \text{ для положительных } \underline{a}, \bar{a} \text{ и } x > 1,$$

– нечётная степенная функция:

$$[\underline{a}, \bar{a}]^n = [\underline{a}^n, \bar{a}^n], n \in \mathbb{N},$$

– чётная степенная функция:

$$[\underline{a}, \bar{a}]^n = \begin{cases} [\underline{a}^n, \bar{a}^n], \text{ if } \underline{a} \geq 0, \\ [\bar{a}^n, \underline{a}^n], \text{ if } \bar{a} < 0, \\ [0, \max\{\underline{a}^n, \bar{a}^n\}] \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тригонометрические функции синуса и косинуса не являются монотонными для всей числовой оси. Поэтому нам требуется проверить, находится ли функция на монотонном участке. Рассмотрим алгоритм для расчёта выражения $\sin(\mathbf{a})$. Для косинуса алгоритм будет аналогичен:

1) $\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}] = [\sin(\underline{a}), \sin(\bar{a})],$

2) проверим, включает ли \mathbf{a} точку $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

3) включение точки можно проверить, решив неравенство:

$$\left\lfloor \frac{\underline{a} - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\bar{a} - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor,$$

4) если неравенство выполняется, то $\overline{\sin(\mathbf{a})} = 1,$ в противном случае $\underline{\sin(\mathbf{a})} = \bar{b},$

5) аналогично проверяем, включает ли \mathbf{a} точку $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ и соответственно при включении $\underline{\sin(\mathbf{a})} = 1,$ иначе $\overline{\sin(\mathbf{a})} = \underline{b}.$

Все вышеописанные операции были реализованы и протестированы в разработанной нами библиотеке. С помощью механизма перегрузки операций они заменяют стандартные операции Python при работе с интервальными величинами. Интервальные величины реализованы с помощью класса Interval, хранящего концы интервала в виде двухэлементного списка. Пример реализации операции сложения приведен на рисунке 2.

```

def __add__(self, other):
    ointerval = valueToInterval(other)
    ninterval = Interval(self.x)
    ninterval.x[0] = self.x[0] + ointerval.x[0]
    ninterval.x[1] = self.x[1] + ointerval.x[1]
    return ninterval

```

Рис. 2. Реализация суммы интервалов

Механизм перегрузки позволяет вычислять естественное интервальное расширение для функции над базисом перечисленных элементарных операций. Кроме этого, поддерживаются операции пересечения интервалов, проверка на вхождение числа или интервала в другой интервал и нахождение середины интервала.

Заключение. В результате нашей работы был создан программный модуль на языке Python (диалект Python 3) для работы с интервальными величинами и применения различных методов интервального анализа, в частности расчёта интервального расширения. В статье приведена краткая справка об интервальном анализе, а также анализ существующих библиотек по интервальной арифметике. Во втором разделе развёрнуто описываются основные математические принципы интервальных операций и объясняются способы реализации базовых функций. Данная библиотека была успешно применена для аппроксимации рабочей области робота, заданного системой недоопределённых уравнений. Разработанный модуль может быть использован, в частности, для вычисления гарантированных оценок площади рабочей области и ряда других ключевых характеристик робота, используемых в задачах оптимизации его конструкции [6; 7]. Планируется также применить разработанную библиотеку для дальнейшего развития подходов к аппроксимации рабочей области, приведенных в работах [8–10].

Кроме аппроксимации неявно заданных множеств, наша библиотека также может использоваться и в других методах интервального анализа: интервальные методы вычисления областей значений функций, методы решения систем линейных уравнений, оптимальное внешнее оценивание множеств решений. Планируется расширить функциональные возможности библиотеки, в том числе добавить возможность работать с концами, равными бесконечностям, реализовать поддержку закрытых и открытых интервалов, а также ряд других опций. Библиотека доступна для скачивания по ссылке: <https://github.com/artemmam/unified-interval/blob/master/interval.py>.

Литература

1. <https://github.com/AlexandreDecan/python-intervals>.
2. <https://github.com/taschini/pyinterval>.
3. <http://mpmath.org/doc/current/contexts.html#arbitrary-precision-interval-arithmetic-iv>.
4. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ // Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2010.
5. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. – 2000.
6. Gallant M., Boudreau R. The synthesis of planar parallel manipulators with prismatic joints for an optimal, singularity-free workspace // Journal of Robotic Systems. – 2002. – Т. 19, №. 1. – С. 13-24.
7. Maminov A.D., Posypkin M.A. Research and developing methods of solving engineering optimization problems for parallel structure robots // International Journal of Open Information Technologies. – 2019. – Т. 7, №. 11. – С. 1-7.
8. Evtushenko Y., Posypkin M., Rybak L., Turkin A. Approximating a solution set of nonlinear inequalities // Journal of Global Optimization. – 2018. – Т. 71, №. 1. – С. 129-145.
9. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А., Рыбак Л.А., Туркин А.В. Отыскание множеств решений систем нелинейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, №. 8. – С. 1248-1254..
10. Gorchakov A., Ignatov A., Malyshev D., Posypkin M. Parallel algorithm for approximating the work space of a robot // International Journal of Open Information Technologies. – 2019. – Т. 7, №. 1. – С. 1-7.

A.D. Maminov, M.A. Posypkin

Federal Research Center «Computer Science and Control» of
Russian Academy of Sciences

DEVELOPMENT OF AN INTERVAL ARITHMETIC LIBRARY FOR PYTHON 3

Keywords: *interval arithmetic; interval analysis; Python 3; interval expansion; numerical interval methods.*

Abstract. *In this article, we consider the development of interval arithmetic library for Python 3. We implement all the basic mathematical operations for interval values, as well as various elementary interval functions, were programmed and added to our library. This library has been developed because of the lack of suitable modules in Python 3 for studying different interval methods for approximating implicitly defined sets. The article provides a brief introduction to interval arithmetic, describes the implemented interval functions and operations in details, and explores the application areas of the created module.*

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ И ОПЕРАЦИЙ МАССОВОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц; оптимизация процессов; оптимизация операций; параллельная обработка данных.

В статье рассмотрены два метода повышения производительности вычислительных систем, реализующих операцию (λ, μ) -свернутого произведения многомерных матриц. Показано, что оптимизация возможна на уровне процессов за счет преобразования алгебраического выражения. Преобразование осуществляется полиномиальным алгоритмом, реализующим оптимизацию методом динамического программирования. Вторым методом обеспечивается ускорение выполнения операции за счет использования параллельных вычислений. Рассмотрено обобщение параллельного алгоритма блочного умножения на случай многомерных матриц. Предложен эффективный метод пересчета индексов для распределения блоков между процессорами на всех этапах алгоритма.

Введение. Повышение эффективности массовой обработки данных относится к числу наиболее актуальных проблем в теории и практике баз данных. Например, в декларативных языках запроса, подобных языку SQL, в формулировках запросов указывается, какими свойствами должны обладать данные, которые хочет получить пользователь, но ничего не говорится о том, как система должна реально выполнить запрос. Поэтому необходимо по декларативной формулировке запроса найти или построить программу (план выполнения запроса), которая выполнялась бы максимально эффективно и выдавала бы результаты, соответствующие указанным в запросе свойствам. Оптимизация состоит в построении всех возможных программ, результаты которых соответствуют указанным свойствам, и выборе из них наиболее эффективной программы [1; 2].

В статье рассматриваются два способа повышения эффективности процессов массовой обработки данных (МОД), основанные на многомерно-матричной модели данных, которая в общем случае гомоморфна, а в частных случаях изоморфна реляционной модели. На основе предложенного подхода:

1) использованы известные методы оптимизации для синтеза новых и преобразования уже имеющихся процессов;

2) разработаны методы организации данных, обеспечивающие эффективное распараллеливание отдельных операций, составляющих эти процессы.

Оптимизация на уровне процессов обработки данных. Метод динамического программирования обеспечивает выбор оптимальной последовательности операций для вычисления результата алгебраического выражения, состоящего из операций умножения двумерных (плоских) матриц, с помощью алгоритма, приведенного в [3]. Этот полиномиальный алгоритм может быть обобщен на случай многомерных матриц. Пусть $M=M_1 \times \dots \times M_n$. M, M_1, \dots, M_n – многомерные матрицы. Для любой пары матриц M_i и M_{i+1} сложность вычисления их произведения, независимо от того, последовательно или параллельно реализована операция умножения, зависит от величины $p^l \times p^s \times p^c \times p^m$, где $p^l = \prod_{i=1}^{\kappa} d(l_i)$ и $p^m = \prod_{i=1}^{\nu} d(m_i)$ – произведения размерностей свободных индексов матриц M_i и M_{i+1} соответственно; $p^s = \prod_{i=1}^{\lambda} d(s_i)$ и $p^c = \prod_{i=1}^{\mu} d(c_i)$ – произведения размерностей скоттовых и кэлиевых индексов матриц M_i и M_{i+1} .

На каждом шаге основного цикла алгоритма вычисляется величина w_{ij} – минимальная сложность вычисления частичного произведения $M_i \times \dots \times M_j$ ($1 \leq i \leq j \leq n$). При $i < j$ $w_{ij} = \underset{i \leq k < j}{\text{MIN}}(w_{ik} + w_{k+1,j} + p_{i-1}^l \times p_k^s \times p_k^c \times p_j^m)$.

Здесь w_{ik} – минимальная сложность вычисления матрицы $M' = M_i \times \dots \times M_k$, $w_{k+1,j}$ – минимальная сложность вычисления матрицы $M'' = M_{k+1} \times \dots \times M_j$, а $p_{i-1}^l \times p_k^s \times p_k^c \times p_j^m$ – сложность вычисления произведения многомерных

матриц M' и M'' , где $p_{i-1}^l = \prod_{i=1}^{\kappa} d(l_i)$ – произведение значений свободных

индексов матрицы M' ; $p_k^s = \prod_{i=1}^{\lambda} d(s_i)$ – произведение значений скоттовых

индексов матриц M' и M'' ; $p_k^c = \prod_{i=1}^{\mu} d(c_i)$ – произведение числа значений

кэлиевых индексов матриц M' и M'' ; $p_j^m = \prod_{i=1}^{\nu} d(m_i)$ – произведение размерностей свободных индексов матрицы M'' .

Такой подход возможен для повышения эффективности процессов МОД, если каким-либо образом получено алгебраическое выражение (модель процесса), состоящее или из одних операций умножения многомерных матриц или из суммы нескольких таких выражений. При

этом не имеет значения, на языке какой из гомоморфных алгебр-моделей данное выражение было записано. Естественно, что, если выражение записано на языке алгебры многомерных матриц, размерности индексов фиксированы и в обработку включаются все элементы матриц, в том числе и нейтральные. В отношениях записи (строки), содержащие универсальные неопределенные значения физически отсутствуют. Поэтому оптимизацию выражения целесообразно производить перед каждым выполнением запроса, заданного данным выражением. Это возможно потому, что рассмотренный алгоритм и ему подобные алгоритмы имеют полиномиальную сложность. Информация о количестве записей (строк), соответствующих экземплярам множеств ключей, которая необходима для реализации таких алгоритмов оптимизации, может содержаться в метаданных, определяющих свойства входящих в алгебраическое выражение отношений [4].

Оптимизация на уровне операций обработки данных. Типичным примером повышения эффективности операций обработки данных за счет распараллеливания алгоритмов, реализующих эти операции, служит алгоритм Кэннона [5], основанный на формуле Фробениуса для умножения матриц [6]. Обобщить этот алгоритм на случай многомерных матриц не так просто, как предыдущий алгоритм.

Особенность умножения многомерных матриц, отличающая его от умножения обычных (плоских) матриц, заключается в наличии скоттовых индексов, которые присутствуют в обеих матрицах-операндах и в матрице-результате. Эта особенность существенно сказывается на алгоритме умножения многомерных матриц. При отсутствии скоттовых индексов он мало отличается от алгоритма умножения плоских матриц. Далее рассматривается алгоритм параллельного умножения многомерных матриц при наличии скоттовых и кэлиевых индексов ($\lambda > 0$, $\mu > 0$). Для простоты, но без ограничения общности, удобно считать, что матрицы-сомножители A и B имеют порядок n [7], и n делится на целое число E .

Пусть даны: p -мерная матрица $A(A_{lsc})$, q -мерная матрица $B(B_{scm})$ и r -мерная матрица $C(C_{lsm})$ ($r = p + q - \lambda - 2\mu$), такая, что $C = {}^{\lambda, \mu}(A \times B)$. Если зафиксировать по одному значению каждого из скоттовых индексов, одинаковому во всех трех матрицах ($s_1^0, \dots, s_\lambda^0$), то будут получены: $(p - \lambda)$ -кратное сечение матрицы A , $(q - \lambda)$ -кратное сечение матрицы B и $(r - \lambda)$ -кратное сечение матрицы C . Все эти сечения будут иметь ориентацию (s_1, \dots, s_λ) . Пусть $s_1^1, \dots, s_\lambda^1$ и $s_1^2, \dots, s_\lambda^2$ – фиксированные наборы значений скоттовых индексов многомерных матриц A , B и C , отличающиеся друг от друга по крайней мере одним значением. Этим наборам значений скоттовых индексов соответствуют два различных

сечения каждой из матриц. Элементы указанных сечений матрицы C вычисляются по следующим формулам:

$$c_{l_1 \dots l_k s_1^1 \dots s_\lambda^1 m_1 \dots m_\nu} = \sum_{c_1, \dots, c_\mu=0}^n a_{l_1 \dots l_k s_1^1 \dots s_\lambda^1 c_1 \dots c_\mu} \cdot b_{s_1^1 \dots s_\lambda^1 c_1 \dots c_\mu m_1 \dots m_\nu},$$

$$c_{l_1 \dots l_k s_1^2 \dots s_\lambda^2 m_1 \dots m_\nu} = \sum_{c_1, \dots, c_\mu=0}^n a_{l_1 \dots l_k s_1^2 \dots s_\lambda^2 c_1 \dots c_\mu} \cdot b_{s_1^2 \dots s_\lambda^2 c_1 \dots c_\mu m_1 \dots m_\nu}.$$

Из приведенных формул вытекает следующее.

Утверждение 1. *Результат (λ, μ) -свернутого произведения двух многомерных матриц A и B размерностей p и q , при наличии скоттовых индексов $(\lambda > 0)$, есть r -мерная матрица C ($r = p + q - \lambda - 2\mu$), составленная из $(r - \lambda)$ -кратных сечений, каждое из которых есть произведение $(p - \lambda)$ -кратного сечения матрицы A и $(q - \lambda)$ -кратного сечения матрицы B . При этом наборы значений индексов s_1, \dots, s_λ сечений-сомножителей и сечения-результата совпадают.*

Как и в случае умножения плоских матриц, алгоритм умножения многомерных матриц – простых сечений матриц A и B ориентации (s_1, \dots, s_λ) реализуется параллельно выполняемыми процессами. Поскольку умножения этих сечений не зависят друг от друга, далее рассматривается умножение в рамках только одного сечения. Каждый процесс выполняет умножение блоков матриц A и B , в результате которого получается блок матрицы C .

Блок матрицы A – это ее сечение, в котором индексы разбиения l принимают E последовательных значений, индексы разбиения c принимают все возможные значения, индексы разбиения s – единственное значение.

Блок матрицы B – это ее сечение, в котором индексы разбиения m принимают E последовательных значений, индексы разбиения c принимают все возможные значения, индексы разбиения s – единственное значение.

Блок матрицы C – это ее сечение, в котором индексы разбиения l , m принимают E последовательных значений, индексы разбиения s – единственное значение.

Общее число процессов, необходимых для вычисления одного сечения ориентации (s_1, \dots, s_λ) матрицы-результата C , определяется общим числом индексов разбиений l и m , равным $k + \nu$ и, в рассматриваемом случае, числом E , которому кратен ранг матрицы n . Тогда индекс процесса можно представить в виде триады: $\{N_E^l; \langle s_1^0, \dots, s_\lambda^0 \rangle; N_E^m\}$, где N_E^l и N_E^m – числа в E -ричной системе счисления, принимающие значения от 0 до $E^k - 1$ и $E^\nu - 1$.

Следовательно, количество процессов, необходимых для вычисления одного сечения матрицы C равно $E^{\kappa+\nu}$. Далее приводится описание алгоритма блочного умножения многомерных матриц, аналогичного алгоритму Кэннона.

Как и большинство алгоритмов параллельного умножения матриц, предложенный алгоритм состоит из двух этапов.

На первом этапе производится «обнуление» (заполнение значениями нейтрального элемента) блоков сечения матрицы C в соответствующих процессах и распределение по процессам блоков сечений матриц A и B . Распределение может быть физическим, если каждый процесс связан с автономным запоминающим устройством, или логическим, если все процессы обрабатывают данные, расположенные на одном запоминающем устройстве.

В начальном состоянии предполагается, что каждый процесс связан с блоками матриц A и B , индексы которых соответствуют индексам процесса. Это означает, что для сечения ориентации $s_1^*, \dots, s_\lambda^*$ при фиксированных i и j ($i = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_\kappa$; $j = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_\nu$, где $\underbrace{E-1, \dots, E-1}_\kappa = E^\kappa - 1$, $\underbrace{E-1, \dots, E-1}_\nu = E^\nu - 1$), процессу $P_{l_1^* \dots l_\kappa^* s_1^* \dots s_\lambda^* m_1^j \dots m_\nu^j}$ будут

соответствовать блоки $A_{l_1^i \dots l_\kappa^i s_1^* \dots s_\lambda^* c_1 \dots c_\mu}$ и $B_{s_1^* \dots s_\lambda^* c_1 \dots c_\mu m_1^j \dots m_\nu^j}$ матриц A и B .

Распределение блоков основано на том, что наборы фиксированных значений индексов разбиений l и m можно рассматривать как числа в E -ричной системе счисления $(\overline{l_1^i \dots l_\kappa^i})_E$ и $(\overline{m_1^j \dots m_\nu^j})_E$. Тогда первый этап алгоритма состоит из следующих шагов.

1. Блок матрицы A с набором значений индексов $(\overline{m_1^j \dots m_\nu^j})_E$ разбиения m связывается с процессом, набор значений индексов разбиения $\overline{m_1^j \dots m_\nu^j}$ которого вычисляется по формуле $(E^\nu + (\overline{m_1^j \dots m_\nu^j})_E - j) \bmod E^\nu$; $j = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_\nu$.

2. Блок матрицы B с набором значений индексов $(\overline{l_1^i \dots l_\kappa^i})_E$ разбиения l связывается с процессом, набор значений индексов разбиения m которого вычисляется по формуле $(E^\kappa + (\overline{l_1^i \dots l_\kappa^i})_E - j) \bmod E^\kappa$; $j = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_\kappa$.

Второй этап алгоритма состоит из E итераций, на каждой из которых выполняются три действия.

1. Каждый процесс $P_{l_1^i \dots l_k^i s_1^* \dots s_\lambda^* m_1^j \dots m_v^j}$ выполняет умножение связанных с ним блоков матриц A и B и складывает результат умножения с соответствующим ему блоком матрицы C .

2. Блок матрицы A с набором значений индексов $(\overline{m_1^j \dots m_v^j})_E$ разбиения m связывается с процессом, набор значений индексов разбиения m которого вычисляется по формуле $(E^v + (\overline{m_1^j \dots m_v^j})_E - 1) \bmod E^v; j = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_v$.

3. Блок матрицы B с набором значений индексов $(\overline{l_1^i \dots l_k^i})_E$ разбиения l связывается с процессом, набор значений индексов разбиения m которого вычисляется по формуле $(E^k + (\overline{l_1^j \dots l_k^j})_E - j) \bmod E^k; j = 0, \dots, \underbrace{E-1, \dots, E-1}_k$.

Предложенный алгоритм есть естественное обобщение хорошо известного параллельного алгоритма умножения матриц. Подобным образом могут быть обобщены различные блочные алгоритмы умножения матриц.

Заключение. Рассмотренная в статье возможность преобразования алгебраических выражений процессов МОД средствами алгебры многомерных матриц без ограничений распространяется на другие модели данных, в частности реляционную. Это позволяет в общем виде решить проблему оптимизации запросов к системам баз данных с различной организацией.

Обобщение алгоритма Кэннона на случай произвольных многомерных матриц позволяет решить проблему повышения производительности параллельных вычислительных систем, ориентированных на реализацию умножения многомерных матриц. Это обобщение стало возможным благодаря предложенному алгоритму пересчета индексов процессоров для перемещения блоков матриц на всех этапах алгоритма.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что предложенные в работе алгоритмы позволяют существенно повысить производительность процессов МОД.

Литература

1. Bellamkonda S. [et al]. Enhanced subquery optimizations in Oracle // Proceedings of the VLDB Endowment. – 2009. – Т. 2, №. 2. – P. 1366-1377.
2. Mahajan D., Blakeney C., Zong Z. Improving the energy efficiency of relational and NoSQL databases via query optimizations // Sustainable Computing: Informatics and Systems. – 2019. – Т. 22. – P. 120-133.
3. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

4. Мунерман В.И. Реализация параллельной обработки данных в облачных системах // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т. 13, №. 2.

5. Gupta A., Kumar V. Scalability of parallel algorithms for matrix multiplication // International Conference on Parallel Processing-ICPP'93. – IEEE, 1993. – Т. 3. – P. 115-123.

6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

7. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова Думка, 1972.

V.I. Munerman, D.V. Munerman
Smolensk State University

OPTIMIZATION OF PROCESSES AND OPERATIONS OF MASS DATA PROCESSING

Keywords: *algebra of multidimensional matrices; process optimization; operations optimization; parallel data processing.*

Abstract. *The article considers two methods for increasing the productivity of computing systems that implement the operation of a (λ, μ) -convolution product of multidimensional matrices. It is shown that optimization is possible at the process level by transforming an algebraic expression. The transformation is carried out by a polynomial algorithm that implements optimization by dynamic programming method. Second method provides acceleration of the operation due to the use of parallel computing. The generalization of the parallel algorithm is considered Block multiplication by the case of multidimensional matrices An effective method for recalculating indices for distributing blocks between processors at all stages of the algorithm is proposed.*

А.А. Нанкевич
Смоленский государственный университет

УДК 519.769

ЛИНГВИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА НА ПРИМЕРЕ НАУЧНО- ТЕХНИЧЕСКИХ ТЕКСТОВ

Ключевые слова: *синтаксис; семантика; языковые структуры; формальные грамматики; машинный перевод.*

Статья посвящена изучению проблемы построения представлений фраз английского и русского языков с точки зрения функционально-семантического подхода. Целью работы является лингвистическое моделирование некоторых языковых структур средствами когнитивной трансферной грамматики. Были рассмотрены и систематизированы явления переноса функционального значения, в процессе перевода герундия и причастий прошедшего и настоящего времени. Частотные характеристики были найдены в результате анализа научно-технических текстов. Результатом исследования является получение новых грамматических структур из анализируемых текстов и разрешение неоднозначности в данном контексте, кроме того, возможно применение выявленных грамматических правил для машинного обучения системы перевода текстов.

Статья посвящена проблеме машинного перевода, а именно выявлению взаимосвязанных семантико-синтаксических конструкций на материале научно-технических текстов по методу Е.Б. Козеренко. Он представляет собой когнитивную трансферную грамматику (КТГ), которая в значительной степени реализована в соответствии с функциональным подходом и является разновидностью унификационно порождающей грамматики.

В отличие от контекстно-свободной грамматики данный вид формальной грамматики учитывает семантические связи, которые проявляются в наследовании признаков смысловых центров (головных вершин) фразы в процессе трансфера [2]. На основе вероятностной характеристики языковых структур выводятся лингвистические правила, которые расширяются за счет добавления новых структур, извлеченных из переводных параллельных корпусов.

Из предположения существования поля функционального переноса, в пределах которого происходит взаимодействие элементов разных языковых уровней, следует, что его структурной единицей выступает трансфема [1], то есть смысловое содержание с совокупностью категориальных и функциональных признаков, посредством которого устанавливается семантическое соответствие между языковыми структурами, относящимися к разным языковым уровням и языковым системам. В качестве трансфемы могут выступать лексема, словосочетание, придаточное предложение с подчинительной связью, независимое предложение, рассеянная группа, морфологические единицы [2].

Алгоритм грамматического разбора предложения заключается в определении вероятности соответствия P для дерева разбора T и предложения S . Вероятность возможного дерева разбора T можно определить как [1; 3]:

$$P(T, S) = \prod_{n \in T} p(r(n)),$$

где r – правила, необходимые для развертывания каждого узла n в дереве разбора T . Из чего следует, что вероятность разбора однозначного предложения равна $P(T, S) = P(T)$, а вероятность разбора неоднозначного предложения вычисляется как сумма $(\tau(S))$ вероятностей всех возможных деревьев разбора:

$$P(S) = \sum_{T \in \tau(S)} P(T, S) = \sum_{T \in \tau(S)} P(T).$$

В соответствии с КТГ необходимо вычислить вероятность дерева разбора с учетом категории каждой головной вершины для каждого узла.

Пусть k – синтаксическая категория для узла n , тогда $h(k)$ – головная категория узла n , а $m(k)$ – материнский узел для узла n . Следовательно, нужно вычислить вероятность $p(r(n))|k, h(k)$, которая может быть найдена с использованием первой формулы, таким образом, что каждое правило становится зависимым от своей головной вершины [1]:

$$P(T, S) = \prod_{n \in T} p(r(n)) p(r(n))|k, h(k) \times p(r(n))|k, h(m(k)).$$

Для обозначения категориальных функциональных свойств языковой структуры используются категориальные композиции, которые затем служат основой для создания правил трансфера при осуществлении перевода. Например, герундий обозначается как NounVerbIng [1], а причастие прошедшего времени определяется как PastParticiple. Обозначения категорий будут использованы в процессе грамматического разбора в качестве меток, которые запускают необходимую процедуру трансформаций при переводе.

Функциональное представление предложения «The microprocessor is the part of our computer designed to carry out or execute our programmes» будет иметь следующий вид: NP(Subj) NP(Subj) PP.

В результате анализа переводческих трансформаций наиболее часто встречались традиционные варианты соответствия.

1. [Category NounVerbIng] → [Category Noun]
*PC – as everyone calls it – marked the **coming** of age of personal computing.*
*ПК ознаменовал **приход** новой эры – эры персональных вычислений.*
2. [Category NounVerbIng] → [Category VerbInf]
*It's started **working** a path to one the other.*
*Программа должна **проложить** путь от одного пункта к другому.*
3. [Category NounVerbIng] → [Category ParticipleAdv]
*You can very successfully use a PC **without** really **understanding** it.*

*Вы можете вполне успешно пользоваться услугами компьютера, **не понимая** того, что в нем происходит.*

4. [Category NounVerbIng] → [Category RelativeClause]

*The decision to make the PC a 16-bit computer was extremely important **in making** the IBM PC the dominant desktop computer it is today.*

*Решение сделать ПК 16-разрядным компьютером было чрезвычайно важным **в достижении** того, что **IBM PC** стал самым распространенным настольным компьютером.*

Таким образом, схема трансфера для герундия может быть представлена в виде правил:

[Category NounVerbIng] → OR {[Category Noun]; [Category VerbInf]; [Category ParticipleAdv]; [Category RelativeClause]}.

Примеры трансфера, используемого при переводе причастия прошедшего времени, которое чаще всего используется для образования пассивного залога в сочетании с глаголом to be, представлены ниже.

1. [Category PastParticiple] → [Category Verb]

*Today, computers are something familiar to everyone, since they **are used** so much in our lives.*

*Сегодня компьютеры известны каждому, так широко они **используются** в нашей жизни.*

2. [Category PastParticiple] → [Category Noun]

*I am excited and **enthused** about the PC and the PC family.*

*Я уже давно стал восторженным **энтузиастом** семейства IBM PC.*

Схема правил: [Category PastParticiple] → OR {[Category Verb]; [Category Noun]}.

Примеры когнитивного перенос причастий настоящего времени представлены ниже.

1. [Category PrParticiple] → [Category Adjective]

*A larger and aster disk significantly increases the practical **working** capabilities of the computer, even though the XT has the same computing speed and the same internal working memory space as the PC.*

*Более объемный и скоростной диск существенно увеличивает **рабочие** возможности машины, несмотря на то, что модель XT имеет ту же скорость вычисления и такой же объем оперативной памяти, что и модель PC.*

2. [Category PrParticiple] → [Category ParticipleAdv] [1]

*IBM consolidates and refines the PC line, **preparing** to replace old models with a second generation.*

*IBM укрепляет и улучшает линию персональных компьютеров, **готовясь** заменить старые модели на модель второго поколения.*

3. [Category PrParticiple] → [Category Noun]

*The PC design is finished and, in August, the PC is announced, **surprising** everybody.*

*Разработка ПК закончена, и всем **на удивление** в августе объявлено о создании ПК.*

4. [Category PrParticiple] → [Category RelativeClause]

*This presented an obstacle to anyone **designing** a computer around the 8086.*

*Это было серьезным препятствием на пути тех, **кто создавал** компьютер на базе 8086-микроспроцессора.*

Схема правил: [Category PrParticiple] → OR {[Category Adjective]; [Category ParticipleAdv]; [Category Noun]; [Category RelativeClause]}.

В данной работе были рассмотрены концептуальные основы когнитивной трансферной грамматики, а также алгоритмическая реализация грамматического разбора с учетом головных вершин языковых структур. Далее посредством анализа специальных текстов были выявлены функционально-синонимические языковые конструкции на примере герундия и причастий прошедшего и настоящего времени в направлении перевода с английского на русский язык. По итогам исследования можно сделать вывод о том, что использование лингвистического моделирования, представленного в виде правил, в системах машинного перевода позволит повысить качество выходных текстов, так как на данный момент явление функционального переноса недостаточно отображено в алгоритмах данных систем, о чем свидетельствует анализ результатов машинного перевода, проведенный ранее.

В дальнейшем исследовании предполагается увеличить число типов трансформаций посредством анализа параллельных текстов, а также включить новые языковые пары в процесс сопоставления и использовать полученные правила для машинного обучения системы перевода.

Литература

1. Козеренко Е.Б. Лингвистическое моделирование для систем машинного перевода и обработки знаний // Информатика и её применения. – 2007. – Т. 1, №. 1. – С. 54-65.

2. Козеренко Е. Б. Стратегии выравнивания параллельных текстов: семантические аспекты // Информатика и её применения. – 2013. – Т. 7, №. 1. – С. 82-89.

3. Pang B., Knight K., Marcu D. Syntax-based alignment of multiple translations: Extracting paraphrases and generating new sentences // NAACL'03: Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics on Human Language Technology Proceedings. – 2003. – Vol. 1. – P. 102–109.

A.A. Nankevich
Smolensk State University

**LINGUISTIC MODELING FOR MACHINE TRANSLATION
SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF SCIENTIFIC AND
TECHNICAL TEXTS**

Keywords: *syntax, semantics; language structures; formal grammars; machine translation.*

Abstract. *The article is devoted to the study of the problem of constructing representations of phrases of the English and Russian languages from the point of the functional-semantic approach. The aim of this work is to a linguistic modeling of some linguistic structures by using cognitive transfer grammar. The phenomena of the transfer of functional significance in the process of transferring gerund, present participle and past participle were considered and systematized. Frequency characteristics were obtained as a result of the analysis of scientific and technical texts. The result of the study is to obtain new grammatical structures from the analyzed texts and to resolve the ambiguity in this context, in addition, it is possible to use the identified grammar rules for machine learning of the machine translation system.*

К.С. Николаев

Московский институт электронной техники

УДК 004.75

**ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УМНОЖЕНИЯ
МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ МЕТОДОМ РЕКУРСИВНОГО
СПУСКА**

Ключевые слова: *многомерные матрицы; рекурсивный спуск; параллельное программирование; CUDA; Nvidia; OpenCL; кластерные вычисления.*

В статье рассматривается задача перемножения многомерных массивов, интерпретируемых как многомерные матрицы согласно алгебре Н.П. Соколова. Анализируются существующие методы и подходы к решению данной задачи. Исследуются методы ускорения решения задачи при помощи различных технологий параллельного программирования.

Постановка задачи. Пусть дано некоторое числовое поле P . Тогда любая система из $n_1 \dots n_p$ элементов $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ($i_\alpha = 1, 2, \dots, n_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, p$) поля P , расположенных в точках p -мерного пространства, определяемых координатами i_1, i_2, \dots, i_p , образует p -мерную матрицу над P :

$$A = \left\| a_{i_1 i_2 \dots i_p} \right\| \quad (i_\alpha = 1, 2, \dots, n_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, p).$$

В случае если $n_1 = n_2 = \dots = n_p = n$, такая матрица называется p -мерной матрицей n -го порядка над P :

$$A = \left\| a_{i_1 i_2 \dots i_p} \right\| \quad (i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Совокупность элементов матрицы (1) с фиксированным значением \bar{i}_α индекса i_α ($1 \leq \alpha \leq p$) образует простое сечение ориентации (i_α) , являющееся $(p-1)$ -мерной матрицей n -го порядка:

$$\left\| a_{i_1 \dots i_{\alpha-1} \bar{i}_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_p} \right\| \quad (i_1, \dots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n).$$

Совокупность элементов матрицы (1) с фиксированными значениями $\bar{i}_\alpha, \bar{i}_\beta$ индексов i_α, i_β ($1 \leq \alpha < \beta \leq p$) образует двукратное сечение ориентации (i_α, i_β) , являющееся $(p-2)$ -мерной матрицей n -го порядка:

$$\left\| a_{i_1 \dots i_{\alpha-1} \bar{i}_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} \bar{i}_\beta i_{\beta+1} \dots i_p} \right\| \\ (i_1, \dots, i_{\alpha-1}, i_{\alpha+1}, \dots, i_{\beta-1}, i_{\beta+1}, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n). \quad (2).$$

По сути, матрица (2) представляет собой совокупность двух простых сечений ориентаций (i_α) и (i_β) соответственно.

Пусть матрицы $A = \left\| a_{i_1 \dots i_p} \right\|$ и $B = \left\| b_{j_1 \dots j_q} \right\|$ – p и q -мерные соответственно. Совокупности индексов этих матриц $i_1 \dots i_p$ и $j_1 \dots j_q$ разбиваются на четыре группы, содержащие соответственно κ, λ, μ и ν индексов ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0$). Причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, а $\lambda + \mu + \nu = q$. Для полученных групп индексов используются обозначения: $l = l_1, \dots, l_\kappa$, $s = s_1, \dots, s_\lambda$, $c = c_1, \dots, c_\mu$ и $m = m_1, \dots, m_\nu$. Тогда матрицы A и B можно представить в виде $A = \left\| a_{lsc} \right\|$ и $B = \left\| b_{scm} \right\|$. Индексы групп s и c в матрицах A и B полностью совпадают. Индексы разбиения c называются кэлиевыми, индексы разбиения s – скоттовыми, а индексы разбиения m , так же как и индексы разбиения l , свободными.

Матрица $C = \left\| c_{lsm} \right\|$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{lsm} = \sum_{(c)} a_{lsc} \times b_{scm}$, называется (λ, μ) -свернутым произведением матриц A и B .

Как следует из определения (λ, μ) -свернутого произведения, в матрицу-результат переносятся все свободные индексы обеих матриц-операндов и скоттовы индексы без дублирования.

Рекурсивный метод как средство повышения эффективности вычислений. Одним из вариантов оптимизации операции умножения многомерных матриц является рекурсивный метод. Суть рекурсивного метода состоит в том, чтобы свести умножение многомерных матриц к параллельному умножению двумерных матриц.

Пусть даны две многомерные матрицы $A = \parallel a_{l_1 \dots l_p s_1 \dots s_n c_1 \dots c_k} \parallel$ и $B = \parallel b_{s_1 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r} \parallel$, где $l_1, \dots, l_p, m_1, \dots, m_r$ – свободные индексы; s_1, \dots, s_n – скоттовы индексы; c_1, \dots, c_k – келиевы индексы. Исходя из этого, количество измерений матрицы A – $p \times n \times k$, B – $n \times k \times r$. Размерность индексов обозначается как $len(i)$, где i – индекс.

Матрица $C = \parallel c_{l_1 \dots l_p s_1 \dots s_n m_1 \dots m_r} \parallel$ – результат операции (n, r) -свернутого произведения матриц-операндов A и B .

Для рекурсивного метода нужно обратить внимание на скоттовы индексы. На каждом шаге рекурсии происходит уменьшение числа скоттовых индексов на единицу за счет того, что умножение исходных матриц сводится к умножению их сечений с меньшим размером скоттовых индексов.

Шаг 1. Выполняется сечение матриц A и B ориентации (s_1) . В результате будет получено $len(s_1)$ сечений каждой из матриц-операндов:

$$\begin{array}{ll} A_1 = \parallel a_{l_1 \dots l_p 1 s_2 \dots s_n c_1 \dots c_k} \parallel & B_1 = \parallel b_{1 s_2 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r} \parallel \\ \dots & \dots \\ A_{len(s_1)} = \parallel a_{l_1 \dots l_p 1 s_2 \dots s_n c_1 \dots c_k} \parallel & B_{len(s_1)} = \parallel b_{1 s_2 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r} \parallel. \end{array}$$

Для справедливости необходимо проверить, можно ли из этих сечений получить матрицу-результат C .

Утверждение 1. *Результатом выполнения операции $(n-1, r)$ -свернутого произведения соответствующих сечений матриц-операндов с одинаковым значением скоттового индекса будут сечения матрицы-результата.*

Доказательство.

$A_1 = \parallel a_{l_1 \dots l_p s_1 \dots 1 \dots s_n c_1 \dots c_k} \parallel$; $A_{len(s_i)} = \parallel a_{l_1 \dots l_p s_1 \dots len(s_i) \dots s_n c_1 \dots c_k} \parallel$ – сечения ориентации (s_i) ($1 \leq i \leq n$) матрицы A (их размерность на 1 меньше исходной матрицы-операнда);

$B_1 = \|b_{s_1 \dots 1 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\|$; $B_{len(s_i)} = \|b_{s_1 \dots len(s_i) \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\|$ – сечения ориентации (s_i) ($1 \leq i \leq n$) матрицы B (их размерность на 1 меньше исходной матрицы-операнда).

Выполним операцию $(n-1, r)$ -свернутого произведения над соответствующими матрицами-операндами:

$$C_1 = \sum_{c_1}^{len(c_1)} \dots \sum_{c_k}^{len(c_k)} a_{l_1 \dots l_p s_1 \dots 1 \dots s_n c_1 \dots c_k} \times b_{s_1 \dots 1 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r} = \|c_{l_1 \dots l_p s_1 \dots 1 \dots s_n m_1 \dots m_r}\|$$

...

$$C_{len(s_i)} = \sum_{c_1}^{len(c_1)} \dots \sum_{c_k}^{len(c_k)} a_{l_1 \dots l_p s_1 \dots len(s_i) \dots s_n c_1 \dots c_k} \times b_{s_1 \dots len(s_i) \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r} = \|c_{l_1 \dots l_p s_1 \dots len(s_i) \dots s_n m_1 \dots m_r}\|$$

Как можно заметить, матрицы $C_1 \dots C_{len(s_i)}$ не пересекаются и их совокупность есть матрица-результат C . Отсюда следует, что $C_1 \dots C_{len(s_i)}$ – сечения матрицы C ориентации (s_i) ($1 \leq i \leq n$).

Шаг 2. Имеющиеся после выполнения шага 1 сечения $A_1, \dots, A_{len(s_1)}$ и $B_1, \dots, B_{len(s_1)}$ также разбиваются на сечения, но уже другой ориентации, например ориентации (s_2) :

$$A_{11} = \|a_{l_1 \dots l_p 11s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k}\| \quad B_{11} = \|b_{11s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\|$$

...

$$A_{1len(s_2)} = \|a_{l_1 \dots l_p 1len(s_2)s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k}\| \quad B_{1len(s_2)} = \|b_{1len(s_2)s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\|$$

...

$$A_{len(s_1)1} = \|a_{l_1 \dots l_p len(s_1)1s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k}\| \quad B_{len(s_1)1} = \|b_{len(s_1)1s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\|$$

...

$$A_{len(s_1)len(s_2)} = \|a_{l_1 \dots l_p len(s_1)len(s_2)s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k}\| \quad B_{len(s_1)len(s_2)} = \|b_{len(s_1)len(s_2)s_3 \dots s_n c_1 \dots c_k m_1 \dots m_r}\| \cdot$$

Количество получившихся сечений для каждой матрицы-операнда – $len(s_1) * len(s_2)$. На этом шаге выполняется $(n-2, r)$ -свернутое произведение для всех соответствующих сечений.

На последнем шаге рекурсии получится $len(s_1) * \dots * len(s_n)$ сечений (размерность последних сечений матрицы $A - p \times k$; матрицы $B - k \times r$).

Таким образом, вычисление (n, r) -свернутого произведения матриц-операндов A и B сведено к параллельному (так как сечения по скоттовым индексам не пересекаются) вычислению $len(s_1) * \dots * len(s_n)$ $(0, r)$ -свернутых произведений соответствующих сечений. Иллюстрация рекурсивного спуска изображена на рисунке 1.

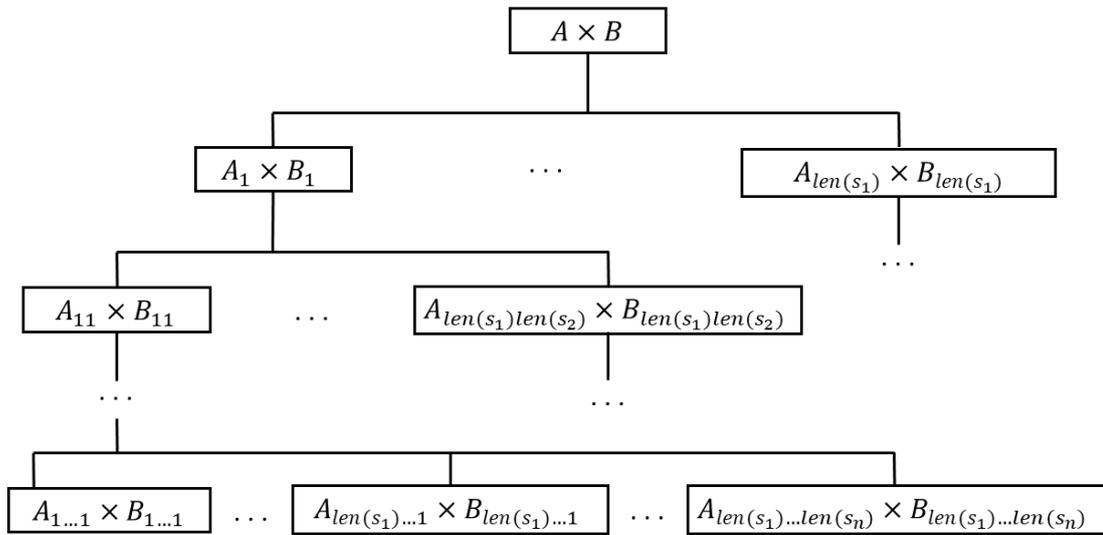


Рис 1. Общая схема рекурсивного спуска

Технологический подход к решению задачи. По своей сути, рекурсивная модель – это способ разделения многомерного набора данных на независимые части. Вследствие этого, если возникает задача умножения таких массивов, целесообразно использовать параллельные технологии.

Последний шаг рекурсивного метода – умножение элементов с последующим сложением (например, на последнем шаге может оказаться $(0, 1)$ -свернутое произведение, что является простым произведением матриц). С решением таких задач сегодня хорошо справляются графические процессоры, в частности процессоры в видеокартах компании Nvidia. Удобство работы с ними обусловлено наличием официального API, например CUDA или OpenCL.

В случае больших размеров и большого количества сечений, параллелизма графического процессора окажется недостаточно. Вследствие этого лучшим решением будет разделить все получившиеся сечения между кластерами. Соответственно, увеличение количества кластеров будет увеличивать скорость общих вычислений.

K.S. Nikolaev

Moscow Institute of Electronic Technology

**APPLICATION OF MODERN PARALLEL TECHNOLOGIES
TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF MULTIPLYING
MULTIDIMENSIONAL MATRICES BY THE METHOD
OF RECURSIVE DESCENT**

Keywords: *multidimensional matrices; recursive descent; parallel programming; CUDA; Nvidia; OpenCL; cluster computing.*

Abstract. *The article considers the problem of multiplication of multidimensional arrays, interpreted as multidimensional matrices according to N.P. Sokolov. Existing methods and approaches to solving this problem are analyzed. Methods of accelerating the solution of a problem using various technologies of parallel programming are investigated.*

А.И. Павлюков

Смоленский государственный университет

УДК 004.85

**ШЕЙДЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ПРОЦЕСС ПОЛУЧЕНИЯ
КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТРАВЫ**

Ключевые слова: *шейдерная геометрия; шейдеры; реальное время; анимация; графы; рендеринг в реальном времени; c#,hlsl; unity.*

Предложена программная реализация задачи крупномасштабного рендеринга травы в реальном времени. Более реалистичный и естественный эффект – когда каждый стебель качается с ветром. Рассмотрен относительно новый, недавно введенный геометрический шейдер для реализации логики создания отдельных стеблей на графическом процессоре. Программная часть выполнена средствами языков c# и hlsl. Предложенный геометрический шейдер может генерировать огромные пласты травы в реальном времени, требует небольшого объёма памяти и обеспечивает высокое качество каждого объекта и реалистичное движение под действием волн ветра.

Введение. Геометрические шейдеры могут дать больше гибкости, когда речь идет об оптимизации и настройке. Unity3D удобно сочетает вершинные, геометрические и фрагментные шейдеры, что открывает новые возможности в создании детализированных объектов.

Детальное моделирование отдельных травинок не имеет смысла, потому что количество полигонов, которое потребовалось бы для более крупных лугов, было бы слишком большим. Сцена с бесчисленными стеблями полигональной травы не будет отображаться в режиме реального времени с графическим оборудованием, доступным сегодня. Для решения этой проблемы использовалась недавно введенная шейдерная геометрия [1], которая позволяет реализовывать логику создания отдельных курсивных стеблей на графическом процессоре.

Схема рендеринга больших участков травы удовлетворяет следующим условиям:

- многоугольников для одной травы не может быть слишком много;
- с разных точек зрения трава должна казаться густой;
- расположение травы не должно быть слишком регулярным, иначе это будет неестественно.

Создание и настройка шейдера. Каждый стебель имеет 3 режима качества изображённых на рисунке 1; каждый из них занимает один, три, пять квадратов.

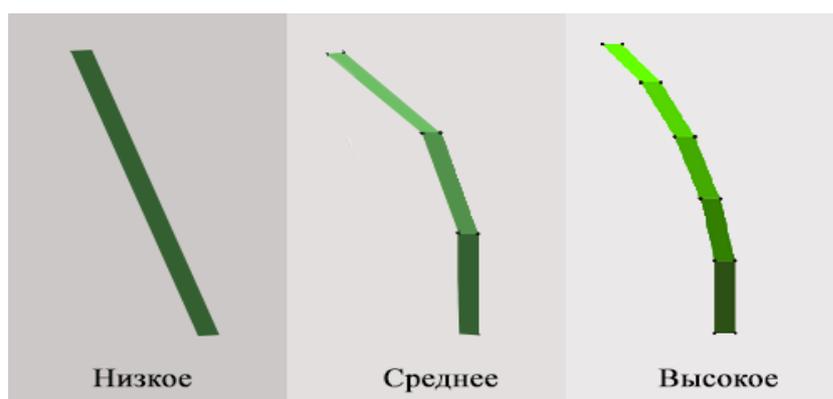


Рис. 1. Три режима качества

Поскольку вход в геометрический шейдер является примитивом (точки, треугольники, ...), а не вершиной, нам нужно создать примитив типа точки в CPU на основе случайного местоположения в качестве корневого местоположения этой травы [2]. Затем то самое на GPU через корневую позицию, чтобы сделать стебли травы. Высота и ширина самой травы также задаётся случайно.

После задание свойств создаётся новая вершина, имитирующую внешний вид листа [3]. Для формирования травы требуется 12 различных вершин, но, поскольку здесь не используется индекс, в итоге получается 30 вершин, чтобы составить 5 квадратов (рис. 2).

Основываясь на этом простом графе, вычисляем положение каждой вершины в зависимости от положения корня.

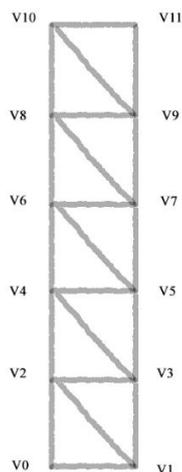


Рис. 2. Граф стебля

Также находим, что четные вершины соответствуют uv -координатам $(0, v)$, а нечетные вершины – UV -координатам $(1, v)$; здесь v находится в UV -координатах, поэтому вычисляем uv -координаты каждой вершины [4]. Таким образом, сетка стебля создается на графическом процессоре.

Для отображения травы обрабатываем её контур, вместо привычного использования альфа-смеси здесь используем альфа-покрытие, потому что при работе с сильно уложенными листьями травы у смеси есть некоторые проблемы с порядком отображения. Что касается использования альфа-покрытия, оно улучшает внешний вид краёв и точность наложения, в зависимости от используемого уровня MSAA.

Цвет задаётся по Полу-Ламберту, то есть получаем скалярное произведение вектора направленного света и вектора нормали мирового пространства, которое затем умножаем на 0,5 и добавляем к нему 0,5 [5]. Это делается, чтобы не освещенная напрямую трава была не полностью темной, а имела более плавный градиент. В цветовом канале использовались различные оттенки зеленого и желтого, чтобы получить лучшую дифференциацию одиночных стеблей

Сетка земли. В природе трава никогда не бывает равномерно распределена по земле. Различные внешние явления вносят хаос: вид грунта, наличие воды, камней, дорог и т.д. Все это влияет на плотность травы. Мы определяем плотность травы как количество травинок на единицу поверхности. Плотность травы в точке земли, которую мы называем локальной плотностью, можно определить с помощью карты плотности, нанесенной на рельеф местности. Поскольку верхняя граница вершин сетки для Unity равна 65 000, то можно предположить, что размер наземной сетки будет 250*250 [6]. Таким образом, создается естественная и реальная сетка земли (рис. 3).

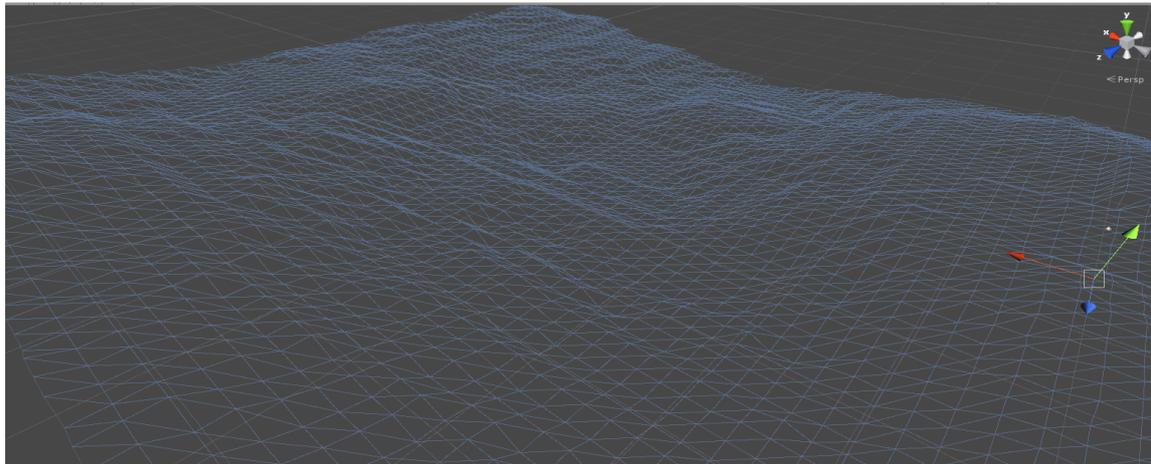


Рис. 3. Сетка земли

После этого появилась трава. Генерируется некоторая вершина, которая передается как корневая позиция стебля до завершения шейдера. Важно отметить, что, поскольку плотность травы должна быть достаточно большой, требуется более одной сетки травы: например, если мы хотим посадить 200 000 травинок, нам нужно 3 сетки. После создания сетки земли вы можете видеть, что расположение корней случайным образом распределяется по земле в количестве миллионов (рис. 4).

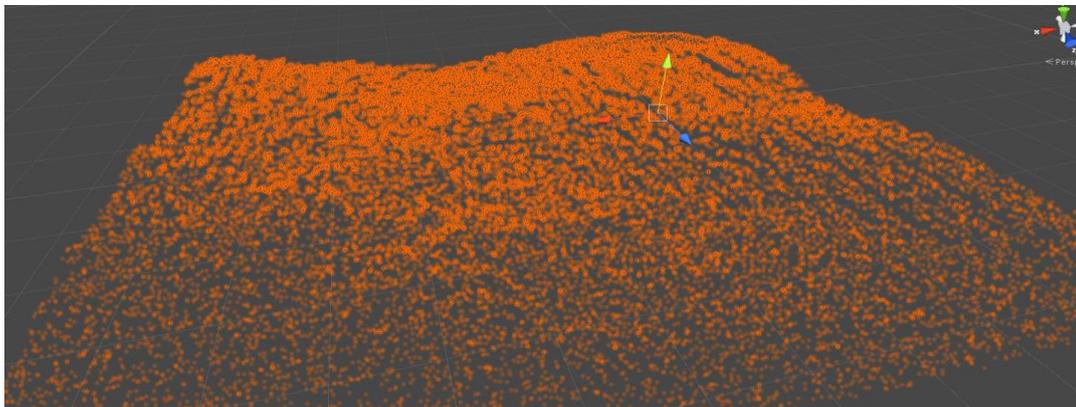


Рис. 4. Корневые позиции

Моделирование ветра. Для создания естественности надо, чтобы трава двигалась, имитировать эффект ветра. Идея состоит в том, чтобы использовать тригонометрическую функцию, заставить лист травы качаться. Для этого обеспечим начальную фазу тригонометрической функции в соответствии с положением корня травы, а затем добавляем некоторую случайность внутри, чтобы сделать эффект более естественным. Но каждый стебель имеет независимую сетку, чем ближе к верхушке листа, тем сильнее он подвержен ветру. Будем увеличивать влияние ветра на положение вершин: чем выше вершина, тем выше степень воздействия. В вершинном шейдере легко отличить эти

вершины от нижних, изучив координаты текстуры. Все верхние вершины имеют одну и ту же координату v для текстуры травы¹ на кончике травинок и 0 у основания, за счёт этого достигается более реалистичный эффект ветра. Результат работы можно увидеть на рисунке 5.

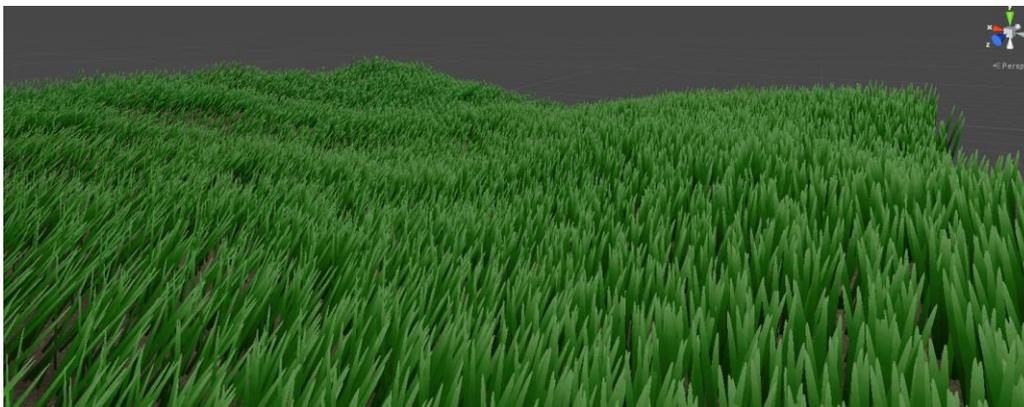


Рис. 5. Колеблющая трава

Заключение. Предложена программная реализация процесса получения колеблющейся травы в реальном времени, основанного на геометрическом шейдере. Она имеет ряд преимуществ. А именно, сложные вычисления анимации производятся с помощью алгоритмов на базе процессора, здесь нет никаких искажений, из-за постоянного расстояния верхних вершин многоугольника, изменение положения вершины в шейдере вершин позволяет обеспечить непрерывность пульсирования волн ветра, кластеры неразличимы. Несмотря на свою компактную структуру. Система чрезвычайно быстрая по сравнению со своими предшественниками, требует только миллисекунды времени на расчёт, обеспечивая при этом огромное количество рассеивания точек по площади. Предложенный подход показал свою эффективность и может быть использован для построения крупных природных ландшафтов в реальном времени.

Литература

1. GrassShader. URL: <https://roystan.net/articles/grass-shader.html>.
2. Tessellation Subdividing Triangles. URL: <https://catlikecoding.com/unity/tutorials/advanced-rendering/tessellation/>.
3. My take on shaders: Grass Shader. URL: <https://halisavakis.com/my-take-on-shaders-grass-shader-part-ii/>
4. [Unity3D] Intro to Geometry Shader. URL: <https://jayjinguylu.wordpress.com/2018/01/24/unity3d-intro-to-geometry-shader/>.
5. Shaders in Unity. URL: <http://shaderslab.com/shaders.html>.
6. Harry A.D. My take on shaders: Geometry Shaders. URL: <https://halisavakis.com/my-take-on-shaders-geometry-shaders/>.
7. Chapter 7. Rendering Countless Blades of Waving Grass. URL: <https://developer.nvidia.com/gpugems/gpugems/part-i-natural-effects/chapter-7-rendering-countless-blades-waving-grass>.

8. Geometry Shader Stage. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/windows/win32/direct3d11/geometry-shader-stage?redirectedfrom=MSDN>.

9. Rendering Grass Terrains in Real-Time with Dynamic Lighting. URL: <http://kevinboulanger.net/publications/grassSiggraph2006ppt.pdf>.

A.I. Pavlykov
Smolensk State University

SHADER GEOMETRY, PROCESS OF RECEIVING OSCILLATING HERBS

Keywords: *shader geometry; shaders; real time; animation, graphs; real-time rendering; c #, hlsl; unity.*

Abstract. *A software implementation for the task of large-scale grass rendering in real time is proposed. A more realistic and natural effect when each stem sways with the wind. A relatively new, recently introduced geometric shader for implementing the logic of creating individual stems on a GPU is considered. The software part is made using the c # and hlsl languages. The proposed geometric shader can generate huge layers of grass in real time, requires a small amount of memory and provides high quality of each object and realistic movement under the influence of wind waves.*

Е.И. Парфенова
*Национальный исследовательский университет
«МИЭТ»*

УДК 004.424.22

О ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ В РАЗРАБОТКЕ РЕДАКТОРА МЕНЮ ТЕРМИНАЛОВ

Ключевые слова: *функция; редактор меню терминалов; цифровая подстанция.*

В данной статье рассматривается пример функции, написанной для редактора меню терминалов программного комплекса САПР «Сириус». Приводится объяснение, для чего нужна данная среда и что выполняет данная функция. Описаны результаты выполненной работы.

Введение. В статье рассматривается пример функции, написанной для редактора меню терминалов – одного из редакторов узкоспециализированной среды, известной как программный комплекс «Система автоматизированного проектирования Сириус» (САПР

«Сириус»). Данный программный комплекс необходим для создания программного обеспечения цифровой подстанции.

Согласно [1], цифровая подстанция (ЦПС) – подстанция с высоким уровнем автоматизации, в которой практически все процессы информационного обмена между элементами подстанции и управление ее работой осуществляются в цифровом виде на основе стандартов из серии МЭК 61850. Таким образом, одним из выводов, следующих из данного определения, является необходимость исключения из процесса разработки человеческого фактора. Необходимость исключения ошибок, причиной которых является человеческий фактор, в электроэнергетике и электротехнике потребовала разработки специального программного обеспечения, позволяющего воспроизвести действия человека искусственно, то есть создания специальной среды. При этом важно не только разработать соответствующее программное обеспечение, но и сделать его максимально удобным и понятным для пользователя, а также оно должно подчиняться международным стандартам.

Описание проекта. Редактор меню терминалов предназначен, как следует из названия, для разработки меню терминалов. Меню терминала представляет собой древовидную структуру, состоящую из пунктов, содержащих информацию о типе данных оперативного контроля и порядке их вывода на экран терминала. Редактор позволяет как создавать описание меню терминала «с нуля», так и импортировать описания из файлов. Созданное описание меню также можно экспортировать. Последние используются для генерации кода меню на языке С, который затем компилируется и загружается в терминалы [2].

Описание использованных программных средств. Редактор создан в среде Microsoft Visual Studio Professional 2012 на языке программирования С#. Использование устаревшей на текущий момент версии среды разработки объясняется тем, что для работы с САПР ЦПС необходимо постоянное подключение к Интернету, что требует соответствующего кода, несовместимого с разными версиями сред разработки. Использование языка С# обосновано требованиями, выдвигаемыми на предприятии по отношению к сотрудникам, в данном случае к инженерам-программистам.

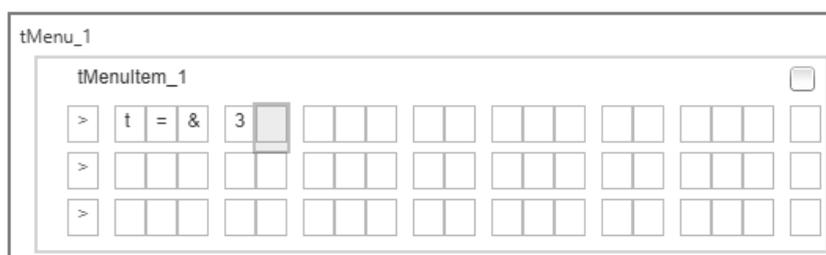


Рис. 1. Объект в редакторе пункта меню терминалов

Задача. Для оптимальной работы проекта и для облегчения поиска в созданных редакторах ошибок рекомендуется регистрация действий пользователя. Регистрация нужна для последующего проигрывания, то есть возможности воспроизведения пользовательских действий в автоматическом режиме для будущего поиска так называемых багов в цифровой подстанции, одним из редакторов которой является редактор пункта меню терминалов. Следовательно, необходимо, чтобы проигрывание точно повторяло ручные действия.

Описание функции. Функция регистрирует действия пользователя при введении в ячейки пункта меню терминалов посредством нажатия пользователем клавиш с клавиатуры, начиная от обычных символов и заканчивая служебными, например, & (значение «&» в поле предполагает, что, начиная с этого поля, на экране терминала будет выводиться значение переменной, связанной с данным полем, в указанном формате [2]). Данный редактор интересен тем, что представляет собой не обычный текстовый редактор, а вложение нескольких дочерних объектов, хранящихся в памяти временно, что существенно затрудняет работу с функцией.

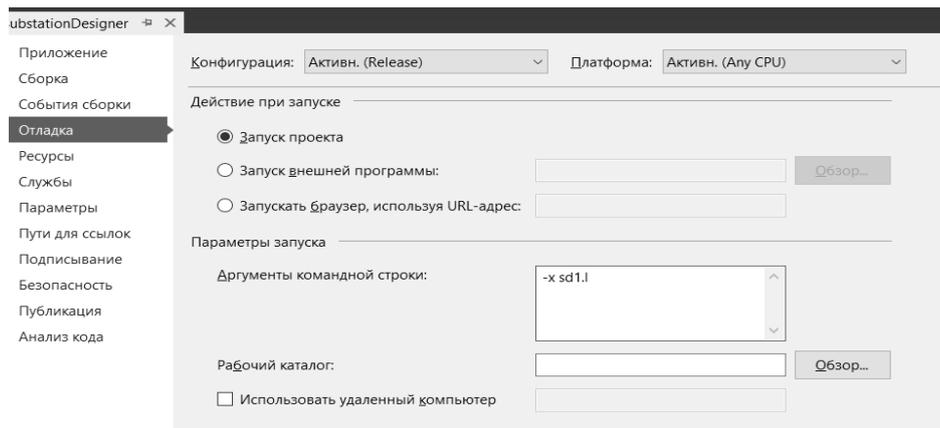


Рис. 2. Запуск среды в ручном режиме

Функция получает на вход несколько параметров: ведется ли проигрывание (переменная `aAutomation` типа `double`, старое и новое значения в ячейках `aTextBoxText` и `aOldTextBoxText`, индекс (номер) ячейки `aCellIndex`, в которой находится курсор и код нажатой клавиши `aEventKey`). Важным параметром является объект, который подается в функцию. По причине требований к объему ресурсов объекты, отвечающие за работу с ячейками (`gridCellObj`), являются временными и уничтожаются каждый раз при сворачивании пункта меню терминалов либо новом запуске ЦПС. Поэтому более предпочтительной является работа с родительским объектом `terminalMenuItemObj`, имеющимся всегда.

Фрагмент кода функции приведен ниже.

```
if(aAutomation == 0){
```

```

gridCellObj = aObj;
menuItemGridObj = gridCellObj.ParentObj;
terminalMenuItemObj = menuItemGridObj.ParentObj;
border = gridCellObj.Node.Port as Border;
textBox = border.FindName("xCellText") as TextBox;
if(aEventKey != (int)Key.Delete)
{
    Globals.LogProcHeaderLine(proc);
    Globals.LogString(String.Format(" Params=5: <"));
    Globals.LogObj(terminalMenuItemObj);
    Globals.LogString(String.Format("><{0}><{1}>",           aCellIndex,
aEventKey)); }
} else {
    foreach(Obj m1Obj in aObj.MemberObjs)
    {
        if(m1Obj != null && m1Obj.IsDeleted == false)
        {
            foreach(Obj m2Obj in m1Obj.MemberObjs)
            {
                if(m2Obj != null && m2Obj.IsDeleted == false)
                {
                    if((int)m2Obj.VoltageClass == aCellIndex)
                    {
                        gridCellObj = m2Obj;
                        menuItemGridObj = gridCellObj.ParentObj;
                        terminalMenuItemObj = menuItemGridObj.ParentObj;
                    }
                }
            }
        }
    }
}
break;
}
}
}
}
}
}
}

```

Данный фрагмент кода отвечает за запись действий пользователя и их воспроизведение. Если работу в редакторе осуществляет пользователь, то функция осуществляет так называемое логирование, то есть запись в специальный файл параметров функции для их последующего воспроизведения в автоматическом режиме. Если же включен режим воспроизведения файла-лога, то функция ищет дочерний объект по параметрам объекта-родителя, а затем воспроизводит действия пользователя.

Для оптимальной работы в ЦПС в ней предусмотрены отмена и повтор операций до 20 раз. Для этого в ЦПС создан класс TimeMachine, содержащий ссылки на функции для изменения переменных и состоящий из блоков кода, отвечающих за повтор и за отмену операций, выполненных пользователем. Соответствующий код проверяет наличие изменений (изменение объекта), копирует значение объекта на предыдущем шаге (возврат в «прошлое» или «будущее») и вызывает функцию изменения, о которой идет речь.

Ниже приведен фрагмент кода для отмены-повтора действий пользователя.

```
#if UNDO_REDO
```

```

if(aRegisterInTimeMachine == true)
{
    Globals.ChangeDBLevel();
    if(aObj != null)
    {
        Obj tObj = new Obj();
        tObj.ObjData = new ObjData();
        tObj.ObjData.SetIndex = terminalMenuItemObj.SetIndex;
        tObj.ObjData.ObjIndex = terminalMenuItemObj.ObjIndex;
        tObj.ObjData.IVal1 = (int)gridCellObj.VoltageClass;
        tObj.ObjData.SVal1 = aOldTextBoxText;
        tObj.ObjData.SVal2 = aTextBoxText;
        tObj.ObjData.DevKind = aEventKey;
        Globals.AddUndoRedoEdit2List4Obj(tObj,
Globals.eUndoRedoUsage.Both, null, false, false, false);
    }
}
#endif

```

Данный код выполняется только при условии разрешения записи события, то есть сам факт отмены либо повтора операции не фиксируется. Для сохранения состояний создается пустой объект, в свойства которого записываются значения параметров на текущем шаге, а затем осуществляется вызов функции, добавляющей объект к предыдущим состояниям.

Выводы. В процессе работы был создан и протестирован код, обрабатывающий действия с клавишами символьного ввода, навигации (стрелки, Tab, комбинация Shift+Tab, кнопки Home и End), кнопками Backspace и Delete. В настоящее время идет обработка команд при условии, что пользователь включил режим вставки посредством нажатия клавиши Insert. Код функции, о которой идет речь, находится в доработке и по завершении будет занесен в новую версию цифровой подстанции.

Литература

1. Проект «РЗА»: всё о защите и автоматике электрических сетей. URL: <https://pro-rza.ru/что-такое-цифровая-подстанция/> (дата обращения: 07.03.2020).
2. Программный комплекс САПР «Сириус»: САПР Цифровой подстанции. URL: <https://siriuscad.rza.ru/pdf/SaprPS.pdf> (дата обращения: 07.03.2020).

E.I. Parfenova

National Research University of Electronic Technology (MIET)

ABOUT THE FUNCTION WHICH IS USED IN THE DEVELOPMENT OF THE TERMINAL MENU ITEM EDITOR

Keywords: *the function; terminal menu item editor; digital substation.*

Abstract. *The example of function created for the terminal menu item editor in applied program «SAPR SIRIUS» is considered. The explanation of the said development environment and the function used in it is held. The results of the work are explained.*

Т.А. Самойлова, Ю.А. Грибер
Смоленский государственный университет

УДК 004.91

МЕТОДОЛОГИЯ КЛАСТЕРИЗАЦИИ В РЕЗУЛЬТАТАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЦВЕТОВЫХ АССОЦИАЦИЙ РАЗНЫХ КУЛЬТУР

Ключевые слова: социологические исследования; цветовые ассоциации; кластеризация; язык R; статистика Хопкинса; k-means, PAM; дендрограмма; валидация.

Предложена методология кластеризации данных, полученных по результатам экспериментального исследования респондентов и содержащих значения цветовых ассоциаций. Представлены шаги, которые необходимы для решения проблемы качества кластеризации этих данных: (1) определение влияния входных значений на результат; (2) оценка тенденции кластеризации; (3) оптимизация количества кластеров; (4) компьютерный анализ кластеров; (5) их валидация. Выполнена валидация алгоритмов k-means, PAM и иерархической кластеризации средствами библиотек языка программирования R.

Введение. Выбор метода кластеризации для решения аналитических задач в различных предметных областях относится к числу трудных. Это связано с тем, что не существует формального подхода к обоснованию как самого метода кластеризации, так и соответствующего ему алгоритма. Решение таких задач можно рассматривать как интуитивное, когда оценкой качества кластеризации является проверка, производимая аналитиком вручную [1]. Более востребованными становятся автоматические методы оценки качества, реализованные в виде функций, включенных в пакеты кластерного анализа. Цель настоящего исследования – выяснить, какие методы

кластеризации помогут выполнить анализ цветовых ассоциаций, определив, как респонденты из разных культур связывают слова с цветами [2]. Для данной предметной области авторами применялись различные алгоритмы кластеризации: k-means, k-medoids, hierarchical. В статье приводятся результаты вычислительного эксперимента, в котором качество этих алгоритмов оценивается по мерам связности, коэффициенту силуэта и индексу Данна. При этом использовалось стандартное программное обеспечение языка R. В результате эксперимента было доказано, что метод кластеризации позволяет решить поставленную задачу, а выбор алгоритма определяется как особенностями входных данных, так и полученными оценками качества. Предложенная методика выбора алгоритма кластеризации может быть эффективно использована для решения других аналогичных задач в гуманитарной сфере.

Постановка задачи. В настоящей работе исходная информация для проводимого эксперимента бралась из анкет, заполненных в девяти разных странах: Германии, Иране, Непале, России, Саудовской Аравии, Турции, Уганде, Швеции, Японии. Анкета каждой страны содержала 24 ответа по выбору предпочитаемых цветов для различных концептов: теплый (Warm), холодный (Cold), грустный (Sorrow), радостный (Happiness), спокойный (Calm), беспокойный (Upset), близкий (Near), далекий (Distant), молодой (Young), старый (Old), женственный (Feminine), мужественный (Masculine), быстрый (Fast), медленный (Slow), сильный (Strong), слабый (Weak), фальшивый (False), искренний (True), дешевый (Cheap), дорогой (Expensive), безопасный (Friendly), опасный (Dangerous), я (Me), другие (Others). Каждый ответ допускал выбор одного из 27 оттенков атласа Естественной системы цвета (NCS). Ответы непосредственно задавались цветовым кодом из множества A1÷A9, B1÷B9, C1÷C9. Результаты анкетирования по каждой стране были сведены в таблицу, аналогичную таблице 1.

Таблица 1

Процент ассоциаций для каждого оттенка цвета (Россия)

	A1	A2	A3	...	C6	C7	C8	C9
Warm	0.0	7.1	22.9	...	0.0	0.0	0.0	1.4
Cold	4.3	0.0	0.0	11.4	2.9	1.4	1.4
Sorrow	0.0	4.3	0.0	10.0	4.3	1.4	10.0
Happiness	1.4	2.9	2.9	1.4	0.0	0.0	0.0
...
Me	4.3	2.9	4.3	...	0.0	0.0	1.4	0.0
Others	2.9	4.3	4.3	...	7.1	4.3	1.4	2.9

Поля таблицы содержат указания на процент респондентов соответствующей страны, давших в качестве ответа названный оттенок цвета. Предполагается, что строки, сгруппированные в кластеры, имеют высокое сходство друг с другом и низкое сходство со строками вне группировки. Такую группировку можно сделать несколькими алгоритмами, но неясно, какой из них лучше подходит для цветовых ассоциаций и как количественно оценить качество произведенной кластеризации. С учетом числового характера входных данных, их величины и наличия неравномерностей, для анализа были выбраны три алгоритма R-библиотеки `cluster` [3]: `k-means`, `k-medoids` и `hierarchical`. В R наиболее применим алгоритм `k-medoids` – `Partitioning Around Medoids` (PAM). Выбор иерархического алгоритма был обусловлен тем, что результатом его работы, как правило, является дендрограмма. На её основе аналитик может сам выбрать желаемое разбиение.

Для выбора алгоритмов, которые обеспечат эффективность кластерного анализа цветовых ассоциаций, были решены следующие задачи:

- (1) определено влияние входных значений на результат;
- (2) проведена оценка тенденции кластеризации (возможна она или нет);
- (3) произведен выбор оптимального количества кластеров;
- (4) выполнена визуализация промежуточных и итоговых результатов кластеризации;
- (5) представлена валидация предложенного метода кластерного анализа.

Реализация этих задач выполнена средствами библиотек среды R-Studio.

Влияние входных значений на результат. Любая ассоциация характеризуется набором из 27 параметров, соответствующих процентам выбора оттенков цвета. Значения этих параметров чаще всего варьируются в заданных границах. Возможны ситуации, когда один или несколько параметров выходят за эти границы. Такие ситуации определяются алгоритмами кластеризации как ошибочные (неравномерности или выбросы). Для их обнаружения использована функция `boxplot()` библиотеки `ggplot2` [4]. На рисунке 1 приведены результирующие коробчатые графики, построенные по входным данным двух стран (России и Непала) и содержащие такие неравномерности.

Горизонтальная ось – цвета, выбираемые респондентами, вертикальная – их ответы. В обоих графиках неравномерность входных данных определяется точками, находящимися за пределами «ограды». Наличие неравномерностей определяет выбор алгоритма кластеризации.

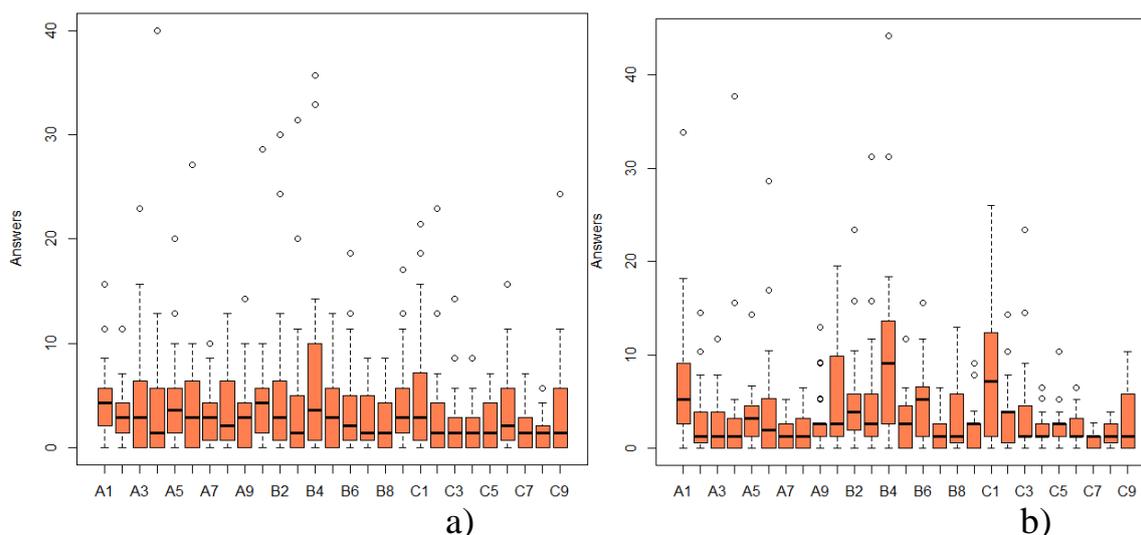


Рис. 1. Входные данные России (а) и Непала (b)

Оценка тенденции кластеризации. На следующем шаге проводится оценка исходных данных на возможность их кластеризации. Оценка проводится статистическим способом, заключающимся в вычислении числа Хопкинса [5]. Она позволяет установить, что исходные данные распределены равномерно. Для этого использована функция `get_clust_tendency` библиотеки `factoextra` [6]. Если число Хопкинса больше или равно 0.5, то данные кластеризуемы. Например, для России значение функции `get_clust_tendency` = 0.6931. Это означает высокую степень их кластеризации.

Оптимизация количества кластеров. Многие алгоритмы кластеризации требуют задания фиксированного числа кластеров. Существуют разные методы для определения оптимального количества кластеров. Однако последнее слово остается за аналитиком, который выбирает это количество на основе знания особенностей предметной области. В ходе экспериментального исследования была выбрана статистика разрыва (`gap statistic`, Tibshirani et al., 2001) и соответствующая ей функция `gap_stat` библиотеки `cluster` в сочетании с функцией визуализации `fviz_nbclust` библиотеки `ggplot2`. На рисунке 2 приведены результаты вычисления оптимального числа кластеров для алгоритмов – `k-means`, РАМ и иерархической кластеризации.

Анализ графиков показал, что для выбранных алгоритмов оптимальное число кластеров заключено в интервале от 2 до 5.

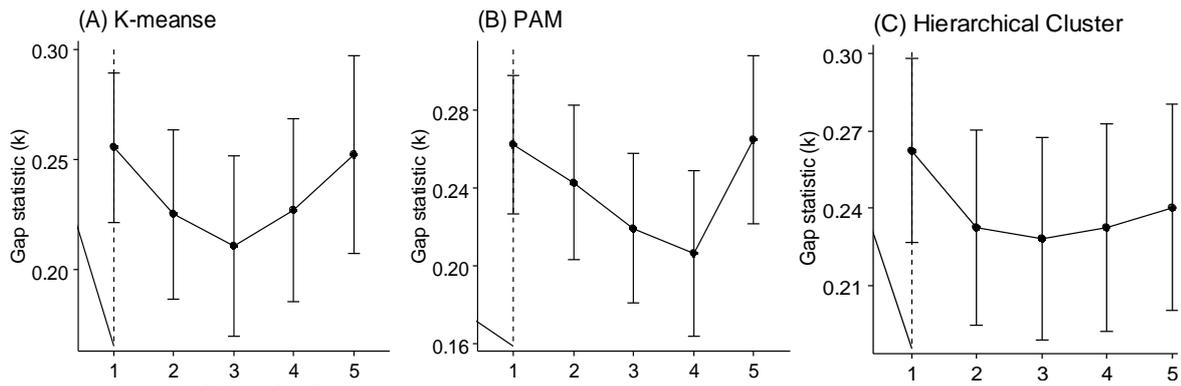


Рис. 2. Оптимальное число кластеров для разных алгоритмов

Компьютерный анализ кластеров. Для кластеризации и последующего анализа ее результатов были использованы R-библиотека `cluster` и функция `fviz_cluster`. Алгоритмы библиотеки выполняли кластеризацию. Функция отображала результаты кластеризации. Особенность функции визуализации `fviz_cluster` заключается в том, что она с высокой степенью точности отражает расстояния, характеризующие ассоциации логических характеристик (`warm`, `cold` и т.д.).

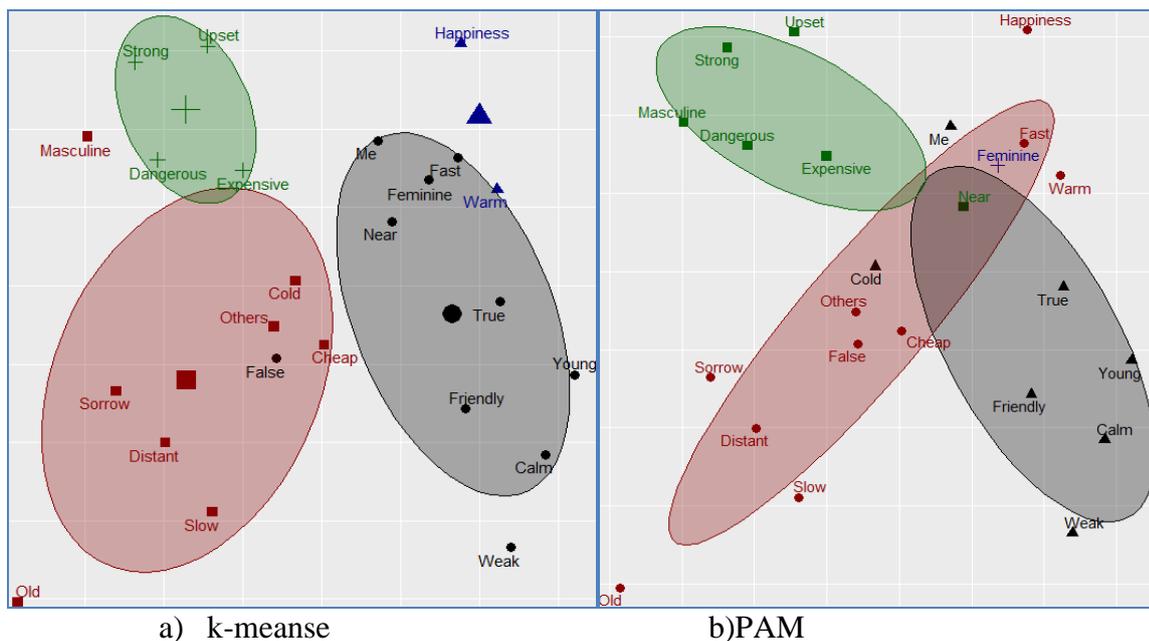


Рис. 3. Многомерная визуализация по 27 оттенкам цвета

На рисунке 3 приведена визуализация результатов работы алгоритмов `k-means` и `PAM` (число кластеров равно четырем) на основе данных из таблицы 1.

Графики на рисунке 3 свидетельствуют о том, что алгоритмы `PAM` и `k-means` незначительно различаются по составу ассоциаций.

Наилучший алгоритм иерархической кластеризации для решаемой задачи, как показал эксперимент, основан на методе Уорда (Ward's

method) [7]. На рисунке 4 приведены результаты иерархической кластеризации для цветовых ассоциаций для данных из таблицы 1. При этом дополнительное разбиение дендрограммы на кластеры реализовано функцией `rect.hclust`.

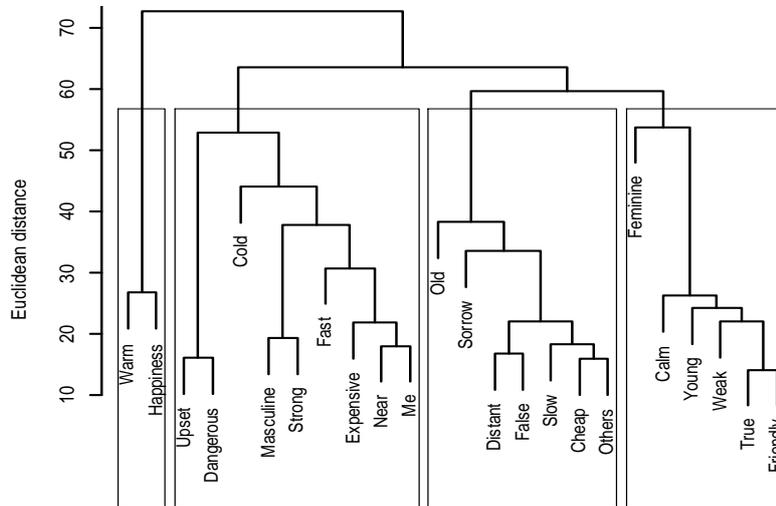


Рис.4. Дендрограмма для данных из таблицы 1 по методу Ward

Валидация кластерного анализа. Ни один из методов кластеризации не является идеальным для всех случаев. Его качество зависит от свойств исходных данных, которые не всегда понятны аналитику. Сделать правильный выбор алгоритма и количества кластеров ему помогает специальная метрика качества – внутренняя статистика валидации. В языке R она реализована библиотекой `clValid` [8], позволяющей пользователю одновременно оценивать несколько алгоритмов кластеризации, используя такие меры, как связность (Connectivity), коэффициент силуэта (Silhouette) и индекс Данна (Dunn). На рисунке 5 представлены зависимости этих мер от числа кластеров для трех алгоритмов кластеризации и входных данных таблицы 1.

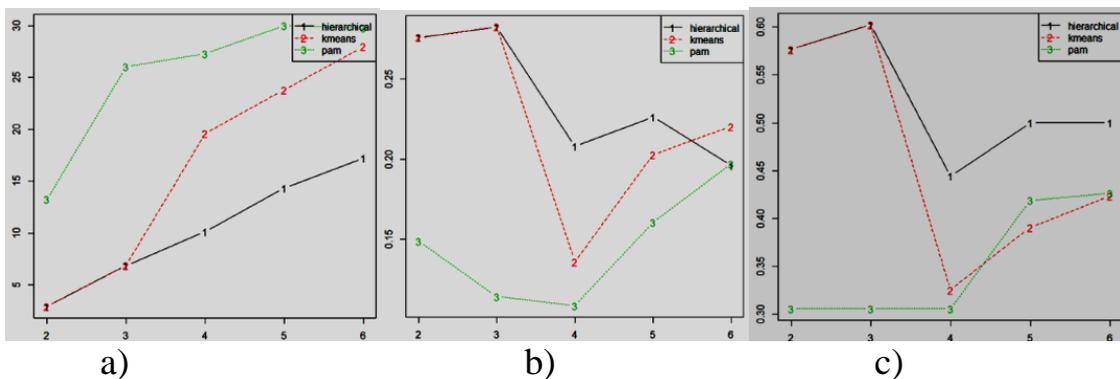


Рис. 5. Зависимость мер Connectivity(a), Silhouette(b) и Dann(c) от числа кластеров

Замечание. Для наборов данных других стран были получены аналогичные результаты.

График на рисунке 5а отражает степень связности (Connectivity) кластеров. Эта мера показывает близость элементов или их расположение в одном кластере. Она принимает значение в интервале $[0, +\infty]$, и лучшими считаются алгоритмы с наименьшими значениями степени связности. На основе графика аналитиком были выбраны алгоритмы hierarchical и k-means.

Значение Silhouette измеряет степень достоверности в конкретном назначении кластеризации и лежит в интервале $[-1, 1]$, причем хорошо кластеризованные данные имеют значения больше 0, а плохо кластеризованные имеют значения меньше 0. Этот параметр имеет для всех трех алгоритмов положительные значения, лучший из них – hierarchical.

Индекс Dunn – это отношение между наименьшим расстоянием между наблюдениями, не находящимися в одном и том же кластере, и наибольшим внутрикластерным расстоянием. Он имеет значение в интервале $[0, +\infty]$ и должен быть максимальным. По этому параметру лучшие алгоритмы кластеризации – hierarchical и k-means.

Аналитик сделал вывод о том, что при выбранном им числе кластеров, равном 2, 3, 4, эффективно использовать алгоритмы k-means и hierarchical.

На следующем этапе эксперимента для сравнения и оценки качества алгоритмов использована методология консенсусной кластеризации. Консенсусная кластеризация позволяет оценить влияние небольших возмущений в наборах данных на состав кластера. Считается лучшим тот алгоритм, который в меньшей степени чувствителен к небольшим изменениям входного набора данных. R-библиотека diceR [9] вычисляет для разных алгоритмов статистические метрики консенсусной кластеризации. Эти метрики позволяют выбирать те алгоритмы, которые дают наиболее надежные кластерные структуры. Вычисленная посредством функции consensus_cluster значимость исследуемых алгоритмов следующая: kmeans – 0.917, hierarchical – 0.875, РАМ – 0.75. Из этого следует вывод, что алгоритм РАМ не позволяет достичь такого же удовлетворительного консенсуса, как k-means или hierarchical для конкретного набора данных.

Заключение. Мы представили методику выбора алгоритмов кластеризации на примере исследования цветовых ассоциаций представителей разных культур. В этой области отсутствуют практические рекомендации по использованию существующих методов кластеризации в зависимости от специфики предметной области и свойств входных данных. Исследование показало, что для определения

качества кластеризации требуется эксперт предметной области, который мог бы оценить результаты проделанной работы. Поэтому для проведения исследований было принято решение о создании человеко-машинного комплекса, в котором окончательный выбор методов кластеризации делал бы аналитик. Были проведены следующие исследования:

- оценка влияния входных данных на результат;
- оценка тенденции кластеризации;
- вычисление оптимального количества кластеров;
- валидация кластерного анализа.

Показано, что выбранные методы валидации, дополненные консенсусной кластеризацией, позволяют эффективно сравнивать различные алгоритмы и выбирать те, которые обеспечивают оптимальную устойчивость обнаруженных кластеров. Такой подход в наибольшей степени удовлетворил требования аналитика.

Литература

1. Alashwal H., El Halaby M., Crouse J.J., Abdalla A., Moustafa A.A.. The Application of unsupervised clustering methods to Alzheimer's disease // *Frontiers in Computational Neuroscience*. – 2019. – Vol. 13. – P. 31. – URL: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fncom.2019.00031>, DOI=10.3389/fncom.2019.00031.
2. Griber Yu., Jung I., Weber R. Color associations: Germany as a case study // *The Emissia. Offline Letters*. – 2018. – № 4. ART 2611. – URL: <http://www.emissia.org/offline/2018/2611.htm>.
3. *clusterv2* 1.0.2019. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/clusterv2/versions/1.0>.
4. *ggplot2* 3.2.1.2019. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/ggplot2/versions/3.2.1>.
5. Hopkins B., Skellam J. G. A new method for determining the type of distribution of plant individuals // *Annals of Botany*. – 1954. – № 18(2). – P. 213–227.
6. *factoextra* 1.0.3.2019. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/factoextra/versions/1.0.3>.
7. Ward J. H. Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function // *Journal of the American Statistical Association*. – 1963. – № 58. – P. 236–244.
8. *clValid* 0.6-6.2019. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/clValid/versions/0.6-6/topics/clValid>.
9. *diceR* 0.6.0.2019. URL: <https://www.rdocumentation.org/packages/diceR/versions/0.6.0>.

T.A. Samoylova, Yu.A. Griber
Smolensk State University

**CLUSTER METHODOLOGY OF RESULTS OF EXPERIMENTAL
STUDY OF COLOR ASSOCIATIONS OF DIFFERENT CULTURES**

Keywords: *sociological research; color associations; clustering; R language; Hopkins statistics; k-means, PAM; dendrogram, validation.*

Abstract. *The authors suggest a methodology for clustering data obtained from an experimental survey of respondents and containing the values of color associations. The paper presents the steps that are required to address the quality problem of clustering these data: (1) determination of the impact of input values on the result; (2) assessment of the clustering trend; (3) optimization of the number of clusters; (4) computer analysis of clusters and (5) their validation. Validation of k-means, PAM, and hierarchical clustering algorithms by means R programming language libraries is performed.*

В.В. Сенчилов, Г.М. Григорьева, В.Ю. Ходченков
Смоленский государственный университет

УДК 004.022:004.027

О РЕЗУЛЬТАТАХ ПРОБНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ

Ключевые слова: *интеллектуальный анализ данных; большие данные; нейронная сеть.*

В статье рассматривается внедрение системы компьютерной поддержки принятия решений в медицинской практике на основе диагностических данных пациента. Описан принцип комплексного решения, которое предоставляет врачам информацию, необходимую для выбора наиболее подходящего метода лечения. Сообщается о проведённом тестировании программного продукта.

Введение. Современная медицинская наука и практика характеризуются активным внедрением систем интеллектуального анализа данных (ИАД) [1]. Целью этих систем является организация компьютерной поддержки специалистов по постановке диагноза и выбору лучшего метода лечения. Решение таких проблем производится на основе информации, поступающей из систем электронных записей о заболевании. Эта информация характеризуется неоднородностью: лабораторные данные, показатели здоровья и многие другие. Поскольку в настоящее время накоплен большой объем информации о лечении пациентов с различными заболеваниями, технологии обработки больших

данных могут быть использованы для внедрения системы комплексного интеллектуального анализа медицинских данных (СКИАМД) [3].

Разработка и внедрение интеллектуальной медицинской диагностики заболеваний и их осложнений не только не заменят традиционное обследование пациента, но и не решат основной проблемы – выбора правильного метода лечения. Проявление одного и того же заболевания и развитие одних и тех же осложнений различается у разных пациентов и не всегда соответствует «классической» картине заболевания [2].

Основной проблемой инфекционных заболеваний является наличие осложнений, которые могут привести к летальному исходу. Следовательно, для достижения благоприятного результата лечения необходим дополнительный мониторинг пациентов с риском осложнений. Это побудило нас разработать систему, позволяющую прогнозировать вероятность осложнений у пациентов, находящихся в стационаре.

При разработке СКИАМД необходимо решить две основные проблемы:

1) проблема извлечения и структурирования информации из истории болезни. Необходимость решения этой проблемы обусловлена тем, что неструктурированный тип информации агрегируется в медицинских организациях: анамнестические данные, данные клинических исследований и другие. Эта информация заносится в систему ведения электронных историй болезни в текстовом формате на естественном языке. В настоящее время существует научное направление, решающее проблему анализа клинических текстов;

2) проблема выбора методов и алгоритмов для ИАД, способных решать конкретные медицинские проблемы, и разработка на их основе специализированной СКИАМД.

Решение этих проблем приведено в предыдущих статьях на данную тему.

В статье рассмотрен анализ полностью разработанной СКИАМД для решения конкретной медицинской задачи по выявлению осложнений инфекционных вирусных заболеваний на ранней стадии.

Исследование. Система комплексного интеллектуального анализа медицинских данных была разработана, обучена и проверена на реальных данных. Эта система состоит из следующих элементов:

– базы данных (БД), содержащей записи о состоянии 1600 пациентов, проходивших лечение в инфекционном отделении Клинической больницы №1;

– комплексного программного интерфейса и нейронной сети, которая анализирует данные пациента и определяет, подвержен ли пациент риску осложнений. Архитектура представляет собой гибридную

нейронную сеть на основе нейронных сетей Хеминга и Ворда. Функцией активации нейронной сети является логистический сигмоид. Выбор структуры нейронной сети сделан на основе статистического анализа в системе STATISTICA AutomaticNeuralNetworks [4]. Такая сеть показала наилучший результат на тестовых данных.

На рисунке 1 изображен график надежности решений двух нейронных сетей, который наиболее четко показывает принцип выбора подходящего типа и структуры.

Для ясности мы определим два фактора, которые являются критериями для подходящей нейронной сети. Линейность результатов (то есть расположение точек графика на одной прямой), а также сходимость на концах графика, в идеале в точках (0,1) и (1,0).

Для большей понятности результатов представлены только два графика нейронных сетей. Красные точки обозначают нейронную сеть, которая показала лучший результат по обоим критериям. Синие точки отмечают нейронную сеть с наибольшим отклонением от линейности, эта нейронная сеть имеет отличную конвергенцию в конце дуги, но достоверность результатов недостаточно высока.

Из результатов эксперимента следует, что гибридная нейронная сеть разработанного нами типа была наиболее эффективной.

Однако, так как такие системы нельзя считать точными, поскольку они построены на основе стохастических методов, большое значение имеет тестирование системы в реальных условиях. С учетом того, что система ориентирована на диагностическую и прогностическую деятельность медицинских работников, была поставлена задача практического тестирования системы с привлечением специалистов различного уровня опыта в качестве медицинских экспертов.

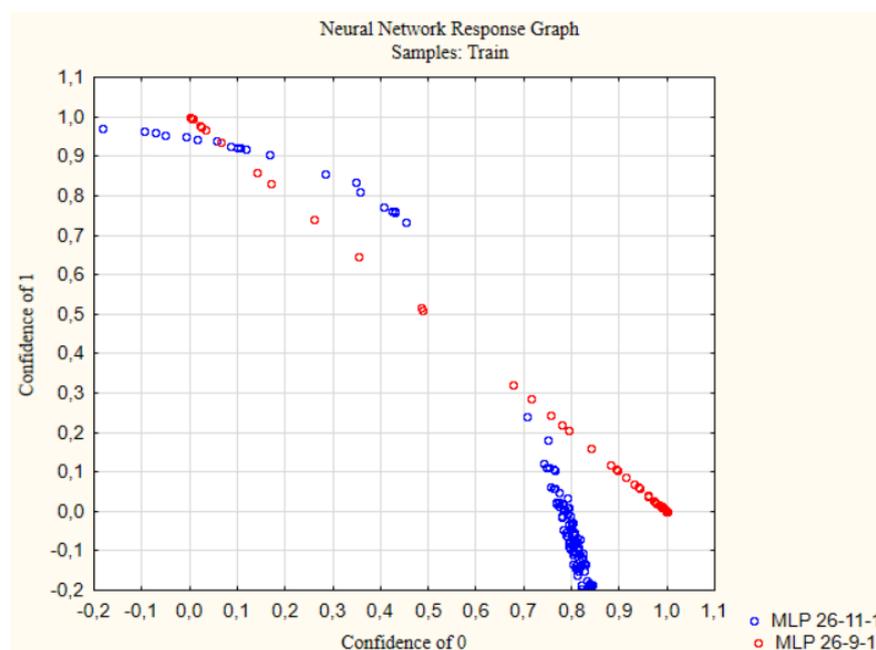


Рис. 1

Реализация СКИАМД. Архитектура. Поскольку система должна являться системой высокой доступности, была разработана сетевая модель на основе серверно-ориентированной структуры с использованием REST API. Создан сервис для хранения базы данных на уровне сервера и обработки данных через нейронную сеть.

Как изображено на рисунке 2, удаленный сервер содержит базу данных электронных историй болезни и программные решения для комплексного анализа медицинских данных. Основным активным элементом системы является нейронная сеть, обозначенная на рисунке как NN. Данные в нейронную сеть поставляются пользовательским интерфейсом, который отвечает за добавление данных в базу, их обработку, вывод результата в базу данных и предоставление их пользователю. Интерфейс представления решений (SMI) представляет выходные данные нейронной сети в виде окончательного решения и передает его в пользовательский интерфейс, который, в свою очередь, записывает его в соответствующую ячейку в базе данных. На данном этапе реализованы мобильный и десктопный клиенты.

Десктопный клиент. На рисунке 3 слева изображен десктопный клиент для пациента, который проходил тестирование в закрытом режиме, то есть тестирование проводилось для проверки быстрогодействия на основе искусственных тестов. Аналогично выглядит и десктопное приложение для врача, которое содержит информацию о пациенте из системы электронных историй болезни. А также доступ ко всем пациентам, проходящим лечение в настоящее время.

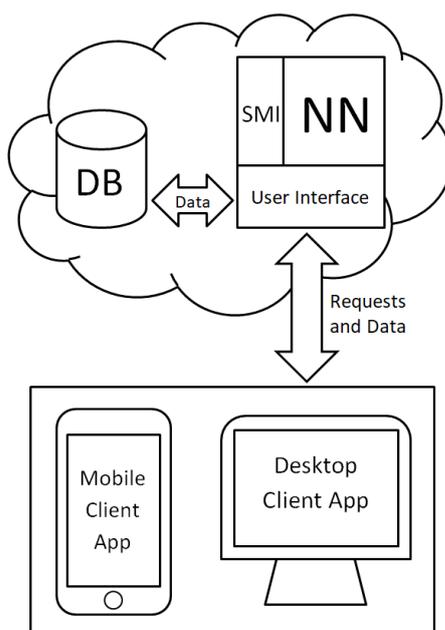


Рис. 2

Мобильный клиент. На рисунке 3 справа представлен мобильный клиент, который имеет упрощённую структуру и меньший функционал.

Было разработано кроссплатформенное приложение, которое содержит окно основной информации о течении заболевания и окно для заметок от пациента о его состоянии. Также в приложении есть возможность ознакомиться с текущими рекомендациями врача.

Описание эксперимента. Для проверки качества спроектированной системы были проведены испытания на базе инфекционного отделения Клинической больницы №1.

СКИАМД использовалась несколькими врачами, которые согласились вводить данные своей работы в систему. Программное обеспечение было установлено специалистам для взаимодействия со СКИАМД, ввода данных и настройки уведомлений. Ввод данных осуществлялся вручную для каждого классификационного раздела. При регистрации систематического ухудшения состояния пациента система предлагала врачу обратить внимание на этот клинический случай, тем самым снизив риск ошибки из-за невнимательности специалиста. Врачи фиксировали результаты наблюдений пациентов в системе в течение 12 недель.

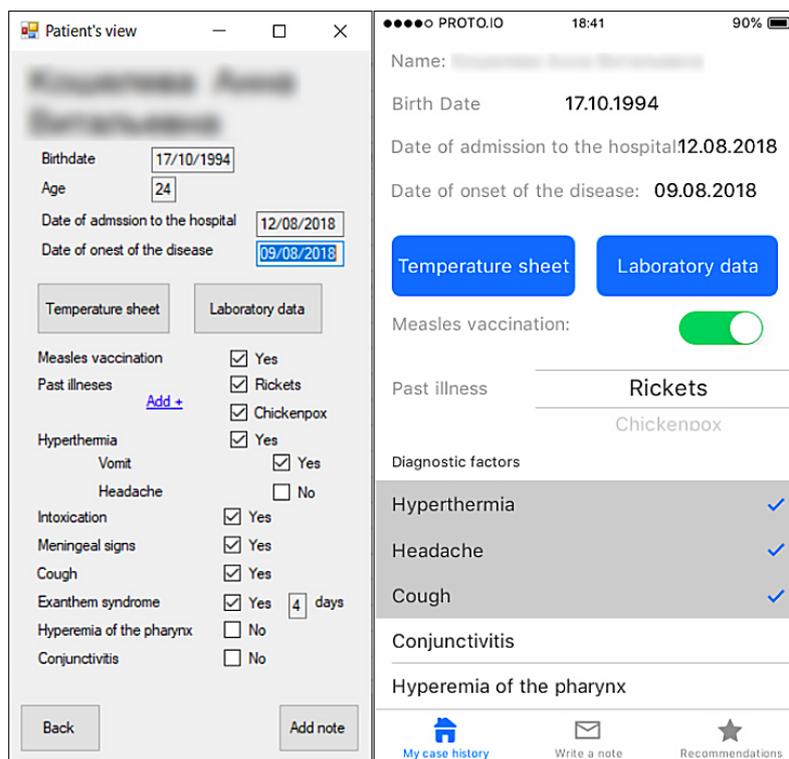


Рис. 3

В исследовании приняли участие репрезентативные выборки пациентов и врачей. Среди врачей были специалисты с опытом работы в практической медицине от 2 до 28 лет. Для участия в тестировании системы врачи отбирались по следующим критериям: наличие текущих пациентов с корью, наличие пациентов с корью в последний год практической деятельности, опыт работы, техническая грамотность, необходимая для взаимодействия с интерфейсом.

Пациенты для исследования были отобраны среди пациентов, наблюдаемых врачами, которые участвовали в эксперименте. Поскольку оценка производительности СКИАМД пациентами включает только оценку пользовательского интерфейса, основным критерием выбора была техническая грамотность и возможность установки мобильного приложения на смартфон.

В конце эксперимента были собраны мнения как врачей, так и пациентов о работе СКИАМД. Большинство участников из обеих выборок были довольны системой. В частности, пациенты высоко оценили возможность сохранения и дальнейшего просмотра рекомендаций, оставленных врачом. А врачи сочли полезными напоминания о пациентах, которые подвержены риску формирования осложнений при развитии инфекционных заболеваний. Обе группы также отметили удобство использования системного интерфейса.

Преимущество системы заключается в постоянном изменении в случае необходимости. При очередном переобучении нейронной сети были учтены замечания специалистов.

Таким образом, эксперимент подтвердил предположение о полезности такого рода системы, а также о ее преимуществах в виде высокой доступности и постепенной модернизации в процессе эксплуатации при необходимости. По завершении тестирования был подготовлен отчет о качестве работы СКИАМД.

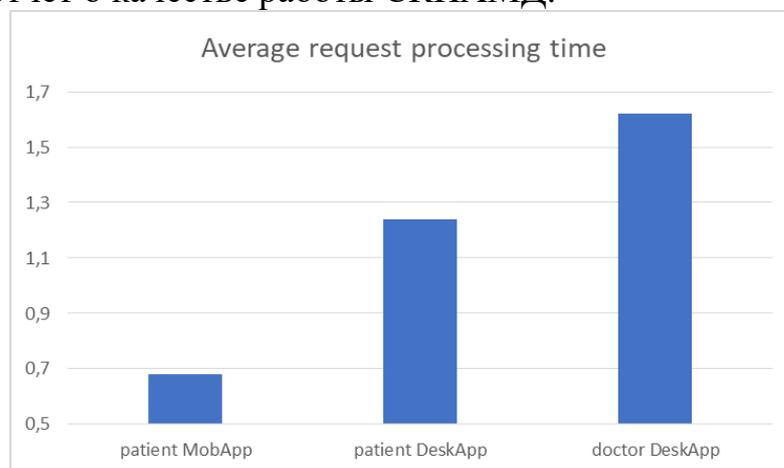


Рис. 4

На рисунке 4 представлено среднее время обработки запроса. Эта статистическая информация была собрана системой анализа данных на сервере по умолчанию. Как оказалось, самое длительное время обработки запроса – у настольного приложения врача. Основной причиной такой разницы между запросами врача и пациента является количество отправляемых данных. Запросы мобильных приложений – самые легкие и содержат меньше информации.

После окончания тестирования всем 87 пациентам было предложено оценить мобильное приложение по шкале от 1 до 5. 58

респондентов присвоили приложению высокий рейтинг (4–5), и только 29 человек считают, что рейтинг системы ниже 4 баллов. Этот результат говорит о том, что мобильное приложение довольно хорошо, но нуждается в некоторых улучшениях.

Эксперимент выявил несколько критических ошибок, в частности, нейронная сеть была переобучена с учетом изменений в динамике заболевания. Взаимодействие между врачом и СКИАМД также улучшилось, и пункт управления был представлен в более удобной и понятной форме. После сбора отзывов начали разрабатываться новые функции, такие как более подробная информация о принимаемых лекарствах, которая будет включать описание, среднюю стоимость, активные ингредиенты и противопоказания.

Заключение. Для практического тестирования системы были выбраны две группы: практикующие врачи и их пациенты – всего 93 человека. Обе группы были репрезентативными.

В результате эксперимента были собраны данные о правильности операций СКИАМД, об удобстве пользовательского интерфейса и дополнительных функциях, предназначенных для облегчения взаимодействия врача и пациента (например, сохранение записей о лечении для конкретного пациента и доступ к этим заметкам даже в автономном режиме). Большинство участников из обеих тестовых групп, участвующих в эксперименте, были удовлетворены системой.

Таким образом, эксперимент подтвердил предположение о полезности подобного рода системы. Преимуществом СКИАМД является его высокая доступность и постепенная модернизация в процессе работы при необходимости.

Кроме того, эксперимент позволил учесть рекомендации врачей при дальнейшем обучении нейронной сети на следующих итерациях.

Литература

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Интеллектуальные информационные системы. – М.: Финансы и статистика, 2016. – 424 с.
2. Анохин П.К. Узловые вопросы теории функциональной системы. – М.: Наука, 2015. – 197 с.
3. Кузнецова А.В., Сенько О.В. Возможности использования методов DataMining при медико-лабораторных исследованиях для выявления закономерностей в массивах данных // Врач и информационные технологии. – 2015. – №2.
4. Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю. О результатах внедрения в медицинскую практику методов интеллектуального анализа данных // Образование в цифровую эпоху: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции преподавателей, студентов, аспирантов, докторантов и заинтересованных лиц. – Н. Новгород: Изд-во Мининского университета, 2019. – С. 183-186.

V.V. Senchilov, G.M. Grigoryeva, V.Yu. Khodchenkov
Smolensk State University

ABOUT THE TESTING RESULTS OF THE SYSTEM OF COMPLEX INTELLECTUAL ANALYSIS OF MEDICAL DATA

Keywords: *data mining; big data, neural network.*

Abstract. *The article discusses the implementation of building a computer support system for decision-making in medical practice based on the diagnostic data of the patient. The principle of the solution, which provides doctors with the information necessary to select the most appropriate treatment method, is described. The article provides information on the ongoing testing of a software product.*

И.Н. Сеницын, Д.В. Жуков, Э.Р. Корепанов, Т.Д. Конашенкова
Федеральный исследовательский центр «Информатика и
управление» Российской академии наук

УДК 621

МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЙ

Ключевые слова: *вейвлет (ВЛ); вейвлет разложение (ВЛР); средний квадратический (с.к.) оптимальный линейный фильтр; ударная СФ; случайная функция (СФ); стохастический процесс (СтП)*

На основе вейвлет разложений (ВЛР) случайных функций (СФ) рассматривается метод с.к. синтеза линейных фильтров для обработки существенно нестационарных СФ, например ударных воздействий. Разработанное методическое и инструментальное программное обеспечение на ударных тестовых примерах подтверждает высокую эффективность подхода, основанного на ВЛР.

1. Постановка задачи. Как известно [1–5], для моделирования существенно нестационарных стохастических процессов (СтП), например наблюдаемых в условиях ударных воздействий (УВ), успешно применяются вейвлет методы на основе вейвлет разложений (ВЛР). Вопросы синтеза с.к. оптимальных линейных фильтров подробно

рассмотрены в [6]. Дадим развитие метода с.к. оптимальной обработки информации [7] посредством ВЛР.

2. Основной результат. Пусть скалярный наблюдаемый сигнал $Z(t)$ и скалярный сигнал $W(s)$, подлежащий воспроизведению, можно представить в виде суммы линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами и помехи в виде некоторой случайной функции:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t), \quad t \in T, \quad (1)$$

$$W(s) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(s) + Y(s), \quad s \in S. \quad (2)$$

Здесь $X(t)$, $Y(s)$ – случайные функции (СФ) с нулевыми математическими ожиданиями; $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$, $\zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$ – заданные структурные функции; U_1, \dots, U_N – случайные величины (СВ) с нулевыми математическими ожиданиями и не коррелированные со СФ $X(t)$ и $Y(s)$.

На основании (1) и (2) имеем

$$\Gamma_Z(t, \tau) = M \left[Z(t) \overline{Z(\tau)} \right] = \sum_{p, q=1}^N \gamma_{pq} \xi_p(t) \xi_q(\tau) + K_X(t, \tau) \quad (t, \tau \in T), \quad (3)$$

$$\Gamma_{WZ}(s, \tau) = M \left[W(s) \overline{Z(\tau)} \right] = \sum_{p, q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(\tau) + K_{YX}(s, \tau) \quad (s \in S, \tau \in T), \quad (4)$$

где в силу $MU_r = 0$ находим $K_X(t, \tau) = M \left[X(t) \overline{X(\tau)} \right]$, $K_{YX}(s, \tau) = M \left[Y(s) \overline{X(\tau)} \right]$, $\gamma_{pq} = M \left[U_p U_q \right]$. Если требуется найти такой оператор A_t , чтобы скалярная СФ

$$W^*(s) = A_t Z(t) \quad (5)$$

была с.к. оптимальной оценкой сигнала $W(s)$, то для того, чтобы линейный оператор A_t был с.к. оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению [6]:

$$A_t \left[K(t, \tau) \right] = K_{YX}(s, \tau) + \sum_{p, q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ \zeta_p(s) - A_t \left[\zeta_p(t) \right] \right\} \xi_q(\tau). \quad (6)$$

При этом для определения с.к. оптимального линейного оператора пригодны только такие решения уравнения (4), которые преобразуют СФ $X(t)$ в СФ, обладающие конечными дисперсиями, то есть когда уравнение (6) имеет следующий общий вид:

$$A_t \left[K_X(t, \tau) \right] = f(s, \tau) \quad (t, \tau \in T, s \in S), \quad (7)$$

где $f(s, \tau)$ – известная функция.

Исследование многих операторов, действующих в пространстве обычных или обобщенных функций, заметно упрощается, если используется подходящий вейвлет базис, то есть соответствующие матрицы становятся почти диагональными по отношению к разложению

по этому базису. Действие оператора на ВЛР, представляющее данную функцию, не приводит к каким-либо неконтролируемым последствиям, то есть ВЛР устойчиво. В определенном смысле вейвлеты устойчивы относительно операций интегрирования и дифференцирования. Поэтому вейвлеты, используемые в качестве базисных функций, помогают решать различные уравнения и появляются в виде собственных функций некоторых операторов. Применим вейвлет технологии для решения уравнения (7).

Сигналы $Z(t)$ и $W(s)$ определены в конечных областях T и S , поэтому в качестве ортонормированных вейвлет-базисов возьмем базисы, порожденные вейвлетами с конечным носителем. Пусть $T \in [t_0, t_1]$, $S \in [s_0, s_1]$. В области T определим ортонормированный вейвлет-базис вида

$$\{\varphi_{00}^t(t), \psi_{jk}^t(t)\}, \quad (8)$$

где $\varphi_{00}^t(t) = \varphi^t(t)$ – масштабирующая функция, $\varphi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \varphi^t(2^j t - k)$, $\psi_{00}^t(t) = \psi^t(t)$ – материнский вейвлет, $\psi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \psi^t(2^j t - k)$; $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$; J^t – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции $f(t) \in L^2(R)$ соответствующим ВЛР пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{2^{j^t}}}$ и постоянному

шагу $h^t = \frac{t_1 - t_0}{2 * 2^{j^t}}$ разбиения области T на $L^t = 2 * 2^{j^t}$ равных интервалов.

Аналогично в области $S \in [s_0, s_1]$ определим ортонормированный вейвлет базис вида

$$\{\varphi_{00}^s(s), \psi_{jk}^s(s)\}. \quad (9)$$

Пусть двумерные действительные функции $K_X(t, \tau)$ и $f(s, \tau)$ квадратично интегрируемы в областях $T \times T$ и $S \times T$ соответственно. Чтобы представить функцию $K_X(t, \tau)$ в виде сходящегося ВЛР, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (4) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) &= \varphi_{00}^t(t_1) \varphi_{00}^t(t_2), \quad \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) = \varphi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \\ \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) &= \psi_{jk}^t(t_1) \varphi_{jn}^t(t_2), \quad \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \end{aligned} \quad (10)$$

где $j = 1, 2, \dots, J^t$; $k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. Тогда двумерное вейвлет-разложение $K_X(t, \tau)$ в области $T \times T$ имеет вид:

$$K_X(t, \tau) = a^t \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \left[h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tH}(t, \tau) + b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tB}(t, \tau) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tD}(t, \tau) \right], \quad (11)$$

$$a^t = \iint_T K_X(t_1, t_2) \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) dt_1 dt_2, \quad h_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$b_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad d_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (12)$$

Чтобы представить функцию $f(s, \tau)$ в виде сходящегося ВЛР, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (8) и (9) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит по-разному:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^{sA}(s, t) &= \psi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \quad \Psi_{00}^{sH}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \quad \Psi_{j_1 k}^{sB}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \\ \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) &= \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$j_1 = 1, 2, \dots, J^s; \quad k = 0, 1, \dots, 2^{j_1} - 1; \quad j_2 = 1, 2, \dots, J^t; \quad n = 0, 1, \dots, 2^{j_2} - 1.$$

Тогда двумерное ВЛР $f(s, \tau)$ в области $S \times T$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(s, \tau) &= a^f \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{j'} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^f \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{j^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) + \\ &+ \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a^f &= \int_S \int_T f(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, t) dt ds, \quad h_{jk}^f = \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, t) dt ds, \\ b_{jk}^f &= \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, t) dt ds, \quad d_{j_1 k j_2 n}^f = \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) dt ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим выражения (11) и (14) в уравнение (7), тогда с учетом (8)–(10), (13) имеем:

$$\begin{aligned} A_t \{ &a^t \varphi_{00}^t(t) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{j'} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \varphi_{jk}^t(t) \psi_{jn}^t(\tau) + b_{jkn}^t \psi_{jk}^t(t) \varphi_{jn}^t(\tau) + d_{jkn}^t \psi_{jk}^t(t) \psi_{jn}^t(\tau)] = \\ &= a^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{j'} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^f \varphi_{00}^s(s) \psi_{jk}^t(\tau) \sum_{j=0}^{j^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \\ &+ \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(\tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда после преобразования находим

$$\begin{aligned} a^t A_t \left[\varphi_{00}^t(t) \right] \varphi_{00}^t(\tau) &+ \sum_{j=0}^{j'} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \{ h_{jkn}^t A_t \left[\varphi_{jk}^t(t) \right] \psi_{jn}^t(\tau) + b_{jkn}^t A_t \left[\psi_{jk}^t(t) \right] \varphi_{jn}^t(\tau) + \\ &+ d_{jkn}^t A_t \left[\psi_{jk}^t(t) \right] \psi_{jn}^t(\tau) \} = \\ &= a^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{j'} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^f \varphi_{00}^s(s) \psi_{jk}^t(\tau) \sum_{j=0}^{j^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \\ &+ \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(\tau). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее пусть $A_t \left[\varphi_{jk}^t(t) \right]$ и $A_t \left[\psi_{jk}^t(t) \right]$ ($j = 1, 2, \dots, J^t$; $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$) – некоторые функции, зависящие от переменной s и принадлежащие пространству $L^2(R)$. Тогда эти функции можно разложить в сходящийся ВЛР:

$$A_t \left[\varphi_{jk}^t(t) \right] = u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s), \quad (18)$$

$$A_t \left[\psi_{jk}^t(t) \right] = v_{jk}(s) = a_{jk}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^v \psi_{in}^s(s), \quad (19)$$

где

$$a_{jk}^u = \int_S u_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad d_{jkin}^u = \int_S u_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds, \quad (20)$$

$$a_{jk}^v = \int_S v_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad d_{jkin}^v = \int_S v_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds. \quad (21)$$

Уравнение (17) с учетом (18) и (19) примет вид:

$$\begin{aligned} & a^t u_{00}(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \{ h_{jkn}^t u_{jk}(s) \psi_{jn}^t(\tau) + b_{jkn}^t v_{jk}(s) \varphi_{jn}^t(\tau) + d_{jkn}^t v_{jk}(s) \psi_{jn}^t(\tau) \} = \\ & = a^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^f \varphi_{00}^s(s) \psi_{jk}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \\ & + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(\tau). \end{aligned} \quad (22)$$

Проецируем (22) на базисные функции $\varphi_{jn}^t(\tau)$ для $j=1, 2, \dots, J^t$; $n=0, 1, \dots, 2^j-1$, тогда получим:

$$a^t u_{00}(s) + b_{000}^t v_{00}(s) = a^f \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \quad (\text{для } j=0, n=0); \quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jkn}^t v_{jk}(s) = 0 \quad (\text{для } j=1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j-1). \quad (24)$$

Из (24) следует, что

$$v_{jk}(s) = 0 \quad (\text{для } j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1) \quad (25)$$

Действительно, если $j=1$, то имеем замкнутую систему из двух линейных уравнений для определения $v_{10}(s)$ и $v_{11}(s)$:

$$b_{100}^t v_{10}(s) + b_{110}^t v_{11}(s) = 0, \quad b_{101}^t v_{10}(s) + b_{111}^t v_{11}(s) = 0.$$

Отсюда $v_{11}(s) = 0$, $v_{10}(s) = 0$. Аналогично имеем $v_{jk}(s) = 0$ для каждого уровня разрешения j и $k=0, 1, \dots, 2^j-1$.

Далее проецируем (22) на базисные функции $\psi_{jn}^t(\tau)$ для $j=1, \dots, J^t$; $n=0, 1, \dots, 2^j-1$, тогда

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{ h_{jkn}^t u_{jk}(s) + d_{jkn}^t v_{jk}(s) \} = h_{jn}^t \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^i-1} d_{jkin}^f \psi_{jk}^s(s). \quad (26)$$

В итоге имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (23)–(25), состоящую из $(2L^t-1)$ уравнений. Теперь найдем проекции этих уравнений на вейвлет базис (9). Имеем для проекции (23) на $\varphi_{00}^s(s)$:

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f; \quad (27)$$

(25) на $\varphi_{00}^s(s)$:

$$a_{jk}^v = 0 \quad (j=1, \dots, J^t; \quad k=0, 1, \dots, 2^j - 1); \quad (28)$$

(26) на $\varphi_{00}^S(s)$:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{h_{jkn}^t a_{jkn}^u + d_{jkn}^t a_{jkn}^v\} = h_{jn}^t \quad (j=0, \dots, J^t; \quad n=0, 1, \dots, 2^j - 1); \quad (29)$$

(23) на $\psi_{il}^S(s)$ для $i=0, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1$:

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f; \quad (30)$$

(25) на $\psi_{il}^S(s)$ для $i=0, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1$:

$$d_{jkil}^v = 0 \quad (j=1, \dots, J^t; \quad k=0, 1, \dots, 2^j - 1); \quad (31)$$

(26) на $\psi_{il}^S(s)$ для $i=0, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1$:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{h_{jkn}^t d_{jkn}^u + d_{jkn}^t d_{jkn}^v\} = d_{iljn}^f \quad (j=0, \dots, J^t; \quad n=0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (32)$$

Учитывая (28) и (31), получим следующую СЛАУ, состоящую из $(2L-1)L^S$ уравнений для определения неизвестных коэффициентов (20), (21) ВЛР искоемых функций (18) и (19):

$$\begin{cases} a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f, \\ h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^f, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jkn}^u = h_{jn}^f \quad (j=1, \dots, J^t; \quad k=0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ a^t d_{00ij}^u + b_{000}^t d_{00ij}^v = b_{il}^f \quad (i=0, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ h_{000}^t d_{00ij}^u + d_{000}^t d_{00ij}^v = d_{il00}^f \quad (i=0, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkn}^u = d_{iljn}^f \quad (i=1, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1; \quad j=1, \dots, J^t; \quad n=0, 1, \dots, 2^j - 1). \end{cases} \quad (33)$$

Из СЛАУ (33) можно выделить несколько замкнутых подсистем. Далее, решая систему из двух линейных уравнений относительно a_{00}^u и a_{00}^v

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f, \quad h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^f,$$

находим

$$a_{00}^v = \frac{h_{00}^f a^t - h_{000}^t a^f}{d_{000}^t a^t - b_{000}^t}, \quad (34)$$

$$a_{00}^u = \frac{a^f - b_{000}^t a_{00}^v}{a^t} = \frac{a^f (d_{000}^t a^t - b_{000}^t) - b_{000}^t (h_{00}^f a^t - h_{000}^t a^f)}{a^t (d_{000}^t a^t - b_{000}^t)}. \quad (35)$$

Решая систему из двух линейных уравнений относительно d_{00il}^u и d_{00il}^v ($i=0, 1, \dots, J^S; \quad l=0, 1, \dots, 2^i - 1$)

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f, \quad h_{000}^t d_{00il}^u + d_{000}^t d_{00il}^v = d_{il00}^f,$$

получаем

$$d_{00il}^v = \frac{h_{000}^t b_{il}^f - a^t d_{il00}^f}{h_{000}^t b_{000}^t - d_{000}^t}, \quad (36)$$

$$d_{00il}^u = \frac{d_{il00}^f - d_{000}^t d_{00il}^v}{h_{000}^t} = \frac{a_{il00}^f (h_{000}^t b_{000}^t - d_{000}^t) - d_{000}^t (h_{000}^t b_{il}^f - a^t d_{il00}^f)}{h_{000}^t (h_{000}^t b_{000}^t - d_{000}^t)}. \quad (37)$$

Для определения a_{jk}^u ($j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1$) необходимо решить следующую СЛАУ:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^f \quad (j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1), \quad (38)$$

а для определения d_{jkln}^u ($i=1, \dots, J^s; I=0, 1, \dots, 2^j-1; j=1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j-1$) необходимо решить СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{ijn}^f \quad (i=1, \dots, J^s; I=0, 1, \dots, 2^j-1; j=1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j-1). \quad (39)$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) в пространстве $L^2(T)$, где $T \in [t_0, t_1]$ – некоторая область, задан ортонормированный вейвлет базис вида (8), порожденный вейвлетами с конечными носителями;

2) в пространстве $L^2(S)$, где $S \in [s_0, s_1]$ – некоторая область, задан ортонормированный вейвлет базис вида (9), порожденный вейвлетами с конечными носителями;

3) в пространстве $L^2(T \times T)$ определен двумерный ортонормированный базис вида (10);

4) в пространстве $L^2(S \times T)$ определен двумерный ортонормированный базис вида (14);

5) функция $f(s, t) \in L^2(S \times T)$ имеет сходящиеся ВЛР (14);

6) функция $K_x(t, \tau) \in L^2(T \times T)$ имеет сходящиеся ВЛР (11);

7) результаты воздействия неизвестного линейного оператора A_t на базисные вейвлет функции вида (8) представляют собой функции, принадлежащие пространству $L^2(T)$.

Тогда линейный оператор A_t , как решение уравнения (7), определяется посредством набора формальных правил:

$$\begin{aligned} A_t[\phi_{jk}^t(t)] &= u_{jk}(s) \quad (j=0, 1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1), \quad A_t[\psi_{00}^t(t)] = v_{00}(s), \\ A_t[\psi_{jk}^t(t)] &= 0 \quad (j=1, \dots, J^t; k=0, 1, \dots, 2^j-1). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь

$$u_{00}(s) = a_{00}^u \phi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s), \quad \text{а параметры } a_{00}^u \text{ и } d_{00in}^u$$

вычисляются по формулам (35) и (37) соответственно;

- $$v_{00}(s) = a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s),$$
 а параметры a_{00}^v и d_{00in}^v вычисляются по формулам (34) и (36) соответственно;
- $$u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s) \quad (j=1, \dots, J^t; \quad k=0, 1, \dots, 2^j-1),$$
 а параметры a_{jk}^u являются решением СЛАУ (38), а параметры d_{jkin}^u ($i=1, \dots, J^s; \quad k=0, 1, \dots, 2^i-1; \quad j=1, \dots, J^t; \quad k=0, 1, \dots, 2^j-1$) – решением СЛАУ (39).

На основе теоремы составлены алгоритмы построения ВЛР для типовых ударных воздействий в (1), (2). Созданное экспериментальное инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB и тестовые примеры показывают высокую эффективность подхода, основанного на ВЛР. Полученные результаты допускают дальнейшее развитие на базе стохастических вейвлет канонических разложений.

Литература

1. Сеницын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV) // Системы высокой доступности. –2017. –Т. 13, № 3. – С. 55–59.
2. Сеницын И.Н., Сеницын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Сергеев И.В., Семендяев Н.Н., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза систем высокой доступности (V) // Системы высокой доступности. – 2018. –Т.14, №1. – С. 59–70.
3. Сеницын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза систем высокой доступности (VI) // Системы высокой доступности. – 2018. – Т.14, №2. – С. 40–56.
4. Сеницын И.Н., Сеницын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Сергеев И.В., Семендяев Н.Н., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза систем высокой доступности (VII) // Системы высокой доступности. – 2019. –Т. 15, № 1. –С. 47–61.
5. Сеницын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VIII) // Системы высокой доступности. – 2019. – Т. 15, № 1. – С. 62–69.
6. Сеницын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Развитие прямых методов аналитического интерполяционного моделирования распределений в стохастических системах // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. – Вып. 20, Ч. 1. – С. 256–260.
7. Сеницын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задача компьютерной поддержки научны- исследований. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009. – 768 с.

I.N. Sinitsyn, D. V. Zhukov, E.R. Korepanov, T.D. Konashenkova
FRC CSC of RAS (Moscow)

METHOD OF LINEAR OPTIMAL SHOCK INFORMATION PROCESSING BY WAVELET EXPANSIONS

Keywords: *m.s. optimal linear filter; random function; shock random function; stochastic process; wavelet; wavelet expansion*

Abstract. *Method of linear optimal shock information processing based on wavelet expansions is considered. Methodological support, software tools in MATLAB and shock testing examples confirm high efficiency the wavelet approach.*

И.М. Струнин

Смоленский государственный университет

УДК 004.75

ОДИН МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ВЕБ-БРАУЗЕРЕ

Ключевые слова: *грид-система; распределенные вычисления; веб-браузер; WebAssembly; Wasm; JavaScript.*

В работе рассматривается возможность представления грид-системы в виде веб-сервиса с вычислительными узлами на основе веб-браузеров, с применением технологии WebAssembly для повышения производительности вычислений. Также приведен пример реализации такой архитектуры с рассмотрением каждого компонента системы. Описаны результаты тестирования реализаций вычислительных узлов для программных средств: C# для десктоп приложения, JavaScript и WebAssembly для веб-браузера.

Введение. Грид-система – это система, которая использует связанные по сети компьютеры как единый кластер [1].

Распределенные вычисления – это модель вычислений, которая тесно связана с грид-системами, относится к множеству компьютерных систем, расположенных в разных местах, соединенных вместе по сети и применяющихся для решения сложных вычислительных задач без необходимости использования дорогого суперкомпьютера [1].

На сегодняшний день существует множество реализаций распределенных вычислений с помощью грид-систем, но они требуют слишком больших усилий для разработки как программных, так и аппаратных средств для взаимодействия и корректной работы системы, например, European Grid Infrastructure (EGI), Distributed European Infrastructure for Supercomputing Applications (DEISA), BOINC, distributed.net и другие. В статье рассмотрен подход к реализации распределенных вычислений с помощью сервис-ориентированной архитектуры [4] и технологии WebAssembly [3] для организации вычислительных узлов в веб-браузере.

WebAssembly (часто сокращают до Wasm) – это открытый стандарт, который определяет переносимый формат двоичного кода для исполняемых программ. Основной целью Wasm является обеспечение высокопроизводительных приложений на веб-страницах, однако он может быть использован для выполнения и интеграции в других средах [5].

Достоинства и недостатки распределенных вычислений. Прежде чем перейти к рассмотрению архитектуры самой системы, поясним, почему выгодно использовать именно распределенные вычисления для решения сложных задач. Некоторые преимущества вполне очевидны.

1. Нет необходимости покупать большие SMP-серверы для приложений, которые могут быть разделены и распределены между небольшими серверами (они стоят намного дешевле, чем SMP-серверы). Результаты могут быть объединены и проанализированы после завершения работы.

2. Если один из вычислительных узлов в сети выходит из строя, существует множество других ресурсов, способных распределить нагрузку. Задания могут автоматически перезапускаться в случае сбоя.

3. Эта модель очень хорошо масштабируется.

Но стоит учитывать и ряд недостатков такого подхода.

1. Возможно, потребуется быстрое соединение между вычислительными ресурсами (как минимум, гигабитным Ethernet).

2. Некоторые приложения могут нуждаться в настройке, чтобы в полной мере воспользоваться новой моделью.

Архитектура распределенной вычислительной системы. Сервис-ориентированная архитектура – это стиль разработки программного обеспечения, при котором услуги предоставляются другим компонентам компонентами приложения через протокол связи по сети.

Разработана система на основе сервис-ориентированной архитектуры, состоящая из следующих компонентов: базы данных администратора, базы данных задач, супервизора задач и клиентов

(вычислительных узлов), предложенная в статье [2] (рис. 1). Рассмотрим эти компоненты подробнее.

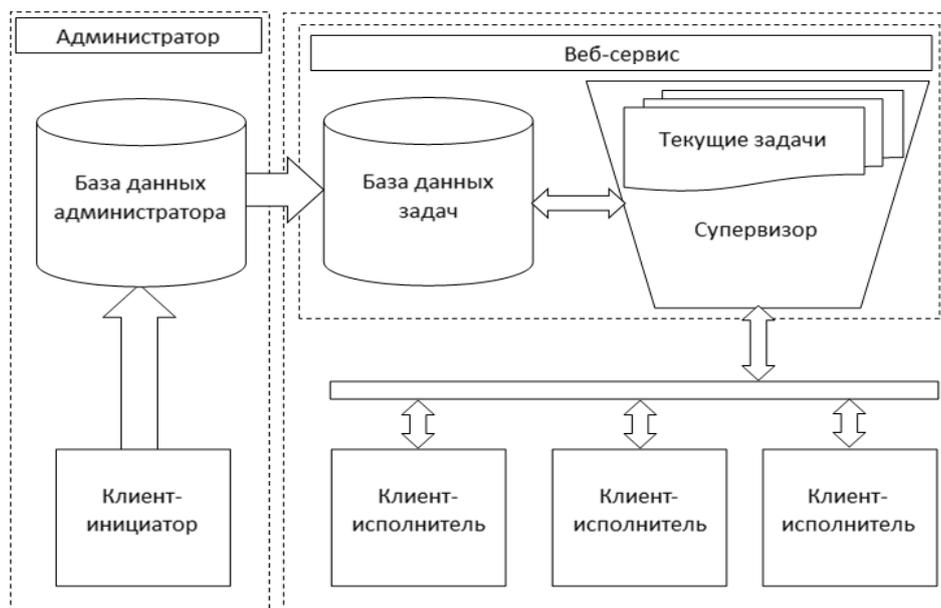


Рис. 1. Архитектура грид-системы для распределенных вычислений

База данных администратора. Для правильной работы системы необходимо обеспечить безопасность данных, включающих в себя начальные условия и программный код. В этом компоненте будут проходить все возможные проверки, например, тестирование программы на ошибки или отсеивание начальных условий с пропущенными значениями. Далее администратор системы отправляет обработанные данные в супервизор задач.

Супервизор задач и база данных задач. В базе данных задач должны храниться начальные условия и результаты, полученные от клиентов.

Супервизор задач – это программа, отвечающая за оптимальное распределение задач между всеми вычислительными узлами и обеспечивающая доступ к базе данных задач.

Клиенты. Есть два типа клиентов: инициатор и исполнитель. Исполнитель связывается с супервизором, который, в свою очередь, предоставляет доступ к необходимой задаче через базу данных текущих задач и ставит ее на выполнение, после чего отправляет полученный результат в базу. Инициатором вычислений может быть любой пользователь сервиса, предоставляя данные и программу для обработки, далее сервис ставит предоставленную задачу в очередь для выполнения остальными участниками, а инициатор становится исполнителем.

Сравнение производительности приложений на десктопе и в веб-браузере. Для анализа производительности возьмем задачу поиска количества простых чисел на заданном промежутке, поскольку она

может нагрузить процессор тяжелыми вычислениями и достаточно проста в реализации.

Тестирование производилось на компьютере с процессором Intel Core i5-3210M (2.50 GHz) в браузере Google Chrome v79 с использованием следующих программных средств: C# для десктоп приложения, JavaScript и WebAssembly для веб-браузера.

Были получены следующие результаты.

	C#, сек.	WebAssembly, сек.	JavaScript, сек.
Последовательно	16.46	18.57	29.81
Параллельно	5.4	6.19	10.23

Исходя из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- при распределенной модели вычислений время выполнения задачи сократилось примерно в 3 раза;
- относительно десктоп приложения WebAssembly медленнее на 15% и JavaScript медленнее на 85%.
- относительно WebAssembly JavaScript медленнее на 60%.

Недостаток производительности WebAssembly можно компенсировать добавлением дополнительных узлов из-за простоты установки, поскольку веб-браузер есть на каждом устройстве, а десктопное ПО требует дополнительных манипуляций с его установкой и настройкой.

Заключение. Таким образом, из представленных выше данных можно сделать следующие выводы:

- 1) распределенную систему можно построить на основе клиенто-ориентированной архитектуры;
- 2) в качестве вычислительных узлов распределенной системы можно использовать веб-браузер с применением технологии WebAssembly.

Также в дальнейшем планируется исследовать возможность многопоточных вычислений в веб-браузере при помощи веб-воркеров.

Автор благодарит В.И. Мунермана и Т.А. Самойлову за помощь в решении поставленной задачи и подготовке статьи.

Литература

1. Косяков М.С. Введение в распределенные вычисления. – СПб: НИУ ИТМО. – 2014. – С. 8-11.
2. Макаров Д.И., Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Архитектура программно-аппаратного комплекса для распределенной обработки данных на базе контейнерной технологии // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2018. – Вып. 19. – С. 187-193.

3. Официальный сайт WebAssembly. WebAssembly Community Group: Документация WebAssembly. – URL: <https://webassembly.org/docs/use-cases/> (дата обращения: 28.01.2020).

4. Шполянская И.Ю. Система поддержки принятия решений для проектирования сервис-ориентированной архитектуры // Системная инженерия и информационные технологии. – 2019. – Т. 1, №. 2. – С. 33-41.

5. Hajian M. Next Steps // Progressive Web Apps with Angular. – Berkeley, CA: Apress, 2019. – P. 367-374.

I.M. Strunin

Smolensk State University

THE METHOD FOR INCREASING THE CALCULATION PERFORMANCE IN THE WEB BROWSER

Keywords: *grid-system; distributed computing; web-browser; WebAssembly; Wasm; JavaScript.*

Abstract. *The paper considers the possibility of representing a grid system in the form of a web service with computing nodes based on web browsers, using WebAssembly technology to increase computing performance. An example of the implementation of such an architecture with an examination of each component of the system is also given. The results of testing the implementations of computing nodes for software are presented: C # for a desktop application, JavaScript, and WebAssembly for a web browser.*

Н.П. Храпов

Институт проблем передачи информации РАН

УДК 004.41

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО АЛГОРИТМА НА ГРИД-СИСТЕМАХ ИЗ ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРОВ

Ключевые слова: *распределенные вычисления; грид-системы; эволюционный алгоритм; задачи оптимизации; эффективность; производительность.*

В статье рассматривается специфика реализации эволюционного алгоритма на грид-системах из персональных компьютеров. Анализируются причины потери производительности, и предлагается имитационное моделирование как метод подбора оптимальных алгоритмов распределения нагрузки между вычислительными узлами.

Формулируются основные требования к имитационной модели, выбирается наиболее подходящий для задачи метод моделирования. Приводится описание прототипа имитационной модели.

Постановка задачи. Эволюционный алгоритм (далее – ЭА) [1] является эвристическим методом оптимизации. Он позволяет получить решение, не гарантируя его оптимальность. Полученное таким образом решение в ряде прикладных задач имеет важное практическое значение. Например, в задаче моделирования структуры вещества производится поиск минимумов функции потенциальной энергии молекулярного кластера [2]. Локальный минимум функции потенциальной энергии будет соответствовать устойчивым (метастабильным) состояниям молекулярного кластера, то есть тем состояниям, в которых данное вещество может пребывать в реальности. Более подробно логика применения ЭА к задаче моделирования структуры вещества описана в [3].

ЭА может быть использован для решения прикладных задач совместно с другими точными или эвристическими алгоритмами. Один из подходов к комбинированию состоит в локальной оптимизации имеющихся в популяции решений перед применением к ним операторов скрещивания или мутации. Таким образом, операторы скрещивания и мутации применяются к уже имеющимся локальным экстремумам, что существенно повышает качество работы алгоритма. В рамках данного комбинированного подхода решение задачи оптимизации может быть распараллелено на несколько вычислительных узлов посредством модели «управляющий – рабочие». Программа, реализующая логику ЭА, выступает в качестве генератора заданий для вычислительных узлов, на которых решаются задачи локальной оптимизации. Логика ЭА реализуется на отдельной серверной машине, а на вычислительных узлах осуществляется локальная оптимизация. На практике данный подход успешно применяется на вычислительных кластерах и суперкомпьютерах [4; 5].

Функционирование грид-систем из персональных компьютеров (далее – ГСПК) [6] имеет ряд отличительных особенностей. В процессе решения практических задач посредством ЭА на ГСПК [7] был выявлен ряд отличительных особенностей ГСПК, влияющих на эффективность использования ресурсов. Рассмотрим наиболее важные из них.

1. *Низкая стабильность вычислительных узлов.* Практика организации вычислений при помощи ГСПК показывает, что ситуации, когда вычислительный узел получает задание для вычислений и не возвращает результат, случаются достаточно часто (примерно в 5–10 процентах случаев в зависимости от проекта). Логика ЭА предполагает несколько поколений вычислений. Для генерации нового поколения

необходимо получить результаты всех заданий предыдущего поколения. Если отдельный вычислительный узел не осуществит возвращение результата или осуществит его с задержкой, то расчёты, связанные со всем поколением, будут задержаны до получения всех результатов.

Рассмотрим типичный пример из практики проведения вычислений, в котором одно поколение состоит из 10 заданий, примерное время выполнения отдельного задания составляет 1 час. Инфраструктура имеет в своём составе 10 доступных для решения данной задачи вычислительных узлов. Каждое задание было отправлено на свой вычислительный узел. Через ожидаемое время получены только 8 результатов заданий, что соответствует статистике реальных вычислений. Через заранее установленный дедлайн (предположим, 10 часов) отправлены дублирующие задания на другие вычислительные узлы и посчитаны там. Таким образом, поколение было посчитано не за 1 час времени, а за 11 часов, и время получения результата вычислительной задачи увеличится в 11 раз.

2. *Единая очередь для всех подзаданий.* Если для решения вычислительной задачи используется суперкомпьютер или кластер, то необходимый вычислительный ресурс выделяется на требуемое время. Таким образом, ЭА генерирует подзадания, вычисления по которым начинаются в системе очередей практически сразу. Но в ГСПК задание, сгенерированное ЭА, будет поставлено в единую очередь из подзаданий других решаемых задач.

Таким образом, время выполнения отдельного подзадания складывается из времени прохождения очереди и времени выполнения непосредственных расчётов. По причине того, что каждое подзадание перед отправкой на вычислительный узел проходит очередь других подзаданий, время выполнения всей задачи может увеличиться в десятки раз.

Практика проведения расчётов показала, что данные негативные эффекты усиливают друг друга, что приводит к снижению эффективности в десятки и сотни раз. Рассмотрим это на предыдущем примере.

Предположим, получены результаты 8 подзаданий, а состояние 2 подзаданий неизвестно. Для генерации нового поколения ЭА ожидает результаты 2 оставшихся подзаданий. По прошествии дедлайна система создаст дублирующие копии этих заданий и поставит их в общую очередь, которая содержит вычислительные задания других задач, решаемых на данной инфраструктуре. Таким образом, временем задержки генерации нового поколения будет сумма времени прохождения очереди для основных заданий, дедлайна, времени прохождения очереди для дублей заданий, времени проведения расчётов дублей. На практике при большом количестве заданий в поколении

возникали ситуации многократного дублирования, где каждый дубль проходил полностью очередь перед началом вычислений.

Имитационное моделирование процесса решения задачи оптимизации на ГСПК. Существует множество способов повышения эффективности используемых ресурсов. В частности, это возможно посредством изменения политики планирования заданий в очереди или задействованием дополнительного стабильно работающего вычислительного ресурса для решения критически важных заданий. В любом из указанных вариантов подбор оптимальных параметров планирования вычислений наиболее целесообразно проводить на имитационной модели [8].

Имитационное моделирование (далее – ИМ) способно смоделировать логику распределения заданий между вычислительными узлами, процесс вычислений и генерации новых поколений на основе результатов предыдущих заданий.

Существует три основных вида имитационного моделирования.

Агентное моделирование (далее – АМ) используется для выявления статистических закономерностей в системах, состоящих из множества объектов, каждый из которых имеет нетривиальную модель поведения (например, способен к самообучению). Классическим примером применения агентного моделирования является процесс построения компьютерной модели возникновения дорожных заторов, при котором моделируется процесс движения каждого автомобиля со своим уникальным стилем и направлением езды.

Системная динамика (далее – СД) предполагает моделирование процесса взаимодействия объектов в равномерно распределённые по шкале моменты времени. На основе системной динамики возможно построение графиков и других визуальных образов, позволяющих глубже понять моделируемый процесс.

Дискретно-событийное моделирование (далее – ДСМ) предполагает рассмотрение системного процесса как последовательности событий, происходящих в определённые моменты времени. Основное отличие ДСМ от СД состоит в том, что ДСМ моделирует состояние системы не в каждый момент времени, а только логику событий, изменяющих её состояние.

Для моделирования процесса решения задачи оптимизации с помощью ЭА наиболее подходящим способом решения является ДСМ. АМ не оптимально для рассматриваемой задачи, так как логика функционирования основных объектов вычислительной инфраструктуры не является нетривиальной и специфической для отдельного объекта. Системная динамика не рассматривается как наиболее подходящий способ построения модели по той причине, что в рамках рассматриваемой задачи состояние объектов системы изменяется

в результате событий, происходящих в определённые моменты времени (запрос заданий вычислительным узлом, возвращение результата вычислений, генерация нового поколения).

Сформулируем основные требования к имитационной модели:

1) модель должна рассматривать подключение, отключение, возвращение результата вычислительным узлом как вероятностный процесс в соответствии со статистикой, полученной на реальных вычислительных проектах;

2) должна быть предусмотрена возможность моделирования процесса решения с применением специфических решателей, в частности, с различной вычислительной сложностью заданий в рамках отдельного поколения;

3) должна быть предусмотрена возможность моделирования процесса решения задачи на гибридной вычислительной инфраструктуре, содержащей стабильные вычислительные узлы для проведения критически важных расчётов;

4) логика организации процесса вычислений в моделируемой системе должна без серьёзных трудозатрат переноситься на реальную ГСПК.

Для проведения вычислительных экспериментов был разработан прототип дискретно-событийной имитационной модели на языке Python. В данном прототипе отдельное событие представляет собой экземпляр класса событий, которые ставятся в очередь. А каждый объект вычислений (задача оптимизации, сервер добровольных вычислений, вычислительный узел) представлен экземплярами соответствующих классов. Очередь событий представляет собой список. Обработывается первое событие в списке и удаляется из него. В процессе обработки очередного события могут генерироваться новые события и ставиться в очередь.

Создание конкретных сценариев планирования заданий и их отладка на имитационной модели являются предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Garez J. Genetic and Evolutionary Algorithms. Encyclopedia of Computational Chemistry. Wiley & Sons, 1992.

2. Посыпкин М.А. Методы и распределенная программная инфраструктура для численного решения задачи поиска молекулярных кластеров с минимальной энергией // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – №1.

3. Oganov A.R. (Editor). Modern Methods of Crystal Structure Prediction. – Berlin: Wiley-VCH, 2010.

4. Golubeva Y.V., Orlov Y.V., Posypkin M.A. A tool for simulating parallel branch-and-bound methods // Open Engineering 6.1 (2016).

5. Ignatov A, Posypkin M. BOINC-based Branch-and-Bound. In Russian Supercomputing Days 2018 Sep 24 (pp. 511-522). Springer, Cham.

6. Anderson D.P., BOINC: A System for Public-Resource Computing and Storage, Proceedings of the 5th IEEE/ACM International Workshop on Grid Computing, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2004, 4–11, doi:10.1109/GRID.2004.14.

7. Khrapov N.P., Roizen V.V., Posypkin M.A., Samtsevich A.I., Oganov A.R. Volunteer computing for computational materials design // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Sep 1;38(5) –P. 926-930.

8. Кораблёв Ю.А. Имитационное моделирование: учебное пособие. М.: КНОРУС, 2017. – 146 с.

N.P. Khrapov

Institute for Information Transmission Problems of RAS

METHODOLOGY OF APPLICATION OF IMITATION MODELING TO INCREASE EFFICIENCY OF PERFORMANCE OF EXECUTION OF EVOLUTIONAL ALGORITHM ON DESKTOPGRID

Keywords: *distributed computing; grid-systems; evolutionary algorithm; optimization tasks; efficiency; performance.*

Abstract. *The article discusses the specifics of the implementation of the evolutionary algorithm on grid systems from personal computers. The causes of performance loss are considered and simulation is proposed as a method for selecting optimal load balancing algorithms between computing nodes. The basic requirements for the simulation model are formulated, the most suitable modeling method for the task is selected. A description of the prototype simulation model is provided.*

И.И. Чукляев

ВА ВПВО ВС РФ

УДК 004.056 (075)

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ЗАЩИТА СЛОЖНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ключевые слова: *информационная безопасность; риски нарушения защищенности; информационно-управляющие системы; организационно-технические системы.*

Обобщенно раскрыты разработанные методы и модели, созданные программные средства и технические решения для интеллектуальной защиты сложных организационно-технических систем в интересах решения актуальной научной проблемы в различных областях системы

знаний: анализ информационно-управляющих систем и формирование информационных ресурсов, интеллектуальные системы комплексной защиты информации, построение сложных реляционных баз данных, разработка безопасного программного обеспечения, нечеткое моделирование и обучение нейро-нечетких моделей. Исследования выполнены при поддержке грантов Президента РФ и Российского фонда фундаментальных исследований.

Введение. Целью выполняемого научного исследования является повышение защищенности сложных организационно-технических систем (ОТС), для достижения которой предложена теория интеллектуальной защиты информационных ресурсов, созданы программные средства и технические решения для интеллектуальной защиты ОТС [1–3].

Актуальность и проблематика научного исследования подтверждена соответствием:

– Доктрине информационной безопасности, утвержденной Указом Президента РФ от 05 декабря 2016 года, № 646;

– приоритетным направлениям Стратегии научно-технологического развития РФ, утвержденной Указом Президента РФ от 01.12.2016, № 642, в части, касающейся создания систем искусственного интеллекта и обработки большого объема данных (п. 20, а), противодействия киберугрозам (п. 20, д);

– дополненному проекту Федерального закона от 28 июня 2014 года, № 172-ФЗ «О стратегическом планировании в РФ» приоритетными направлениями научно-технологического развития информационно-коммуникационных технологий в части, касающейся разработки функционально-ориентированных систем защиты информационных ресурсов и развития технологий статического, динамического и комбинированного анализа, обфускации (компиляторного преобразования) программного обеспечения (ПО) [1];

– Плану фундаментальных исследований Российской академии наук на период 2011–2025 годов в части, касающейся развития методов и технологий анализа и снижения уязвимостей, обфускации ПО (п. 1.5.5), организации данных неструктурированной информации и обеспечения их информационной безопасности в распределённой информационной среде (п. 4.1);

– дополненному научно-техническому заданию при разработке базовых технологий производства приоритетных компонентов радиоэлектронной аппаратуры в рамках подпрограммы «Развитие производства вычислительной техники» Государственной программы РФ «Развитие электронной и радиоэлектронной промышленности на 2013–2025 гг.» [1];

– ГОСТ Р 56939–2016 и ГОСТ Р 51897–2011, регламентирующими требования к разработке безопасного ПО и управлению рисками сложных ОТС.

При выполнении исследования использован системный подход, сочетание подходов к структурно-функциональному анализу систем и объектно-ориентированному формированию информационных ресурсов, онтологический подход, подход к оцениванию защищенности ИУС на основе паттернов дефектов ПО, подход к нечеткому моделированию и обучению нейро-нечетких моделей, дедуктивный метод создания аксиоматической теории функциональных баз данных, методы управления рисками и разработки безопасного ПО, математической статистики, имитационного и физического моделирования, сравнительного и экспертного анализа, экспериментальных исследований.

Основными результатами в развитии теории интеллектуальной защиты информации являются:

а) теоретические основы интеллектуальной защиты информации, включающие:

– результаты систематизации и классификацию методов и средств информационного противоборства;

– разработанную онтологическую модель защищенных функционально-ориентированных информационных ресурсов (ЗФОИР) ИУС;

– уточненные закономерности построения интеллектуальных систем комплексной защиты информации, сформулированные принципы и правила к интеллектуальным системам защиты ОТС, превентивной защите ПО, адаптивному и дифференцированному применению классов мероприятий по обеспечению (повышению) защищенности информационных потоков данных (ИПД), обоснованные требования к ним.

б) разработанный метод анализа ИУС и формирования ЗФОИР;

в) разработанный интеллектуальный метод комплексной защиты ИУС;

г) разработанный метод повышения защищенности ПО.

Основными результатами в создании интеллектуальных средств и технических решений для интеллектуальной защиты ОТС являются:

д) разработанное научно-методическое, информационное и алгоритмическое обеспечение, созданные программные средства и предложенные технические решения для интеллектуальной защиты ОТС [1; 4], включающей превентивную защиту ПО, адаптивную и дифференцированную защиту ИПД, которые учитывают требования концепции управления рисками, дополняют этапы жизненного цикла разработки безопасного ПО и включают в себя:

– способы: использования вариантов противодействия сетевой и потоковой компьютерным разведкам и сетевым атакам и систему, его реализующую [1; 4–5]; адаптивного мониторинга информационно-технических воздействий (ИТВ) [1; 4; 6], выбора средств и способов защиты ОТС от групповых разнородных ИТВ и систему его реализующую [1; 4; 7], моделирования мониторинга рисков для ИУС в условиях ИТВ [1; 4; 8]; динамического управления параметрами сети связи в признаковом пространстве [1; 4; 9]; обеспечения живучести распределенной абонентской сети связи [1; 4; 10];

– модели и способы их построения: композиционную модель ИУС [1; 4; 11–12]; гибридную модель (ГМ) комплексного управления рисками нарушения защищенности ИУС, состоящую из нечетких деревьев (НД) и нечетких продукционных моделей (НПМ) нарушения защищенности ЗФОИР ИУС, игровых моделей (ИМ) формирования стратегий и нейро-нечетких моделей (ННМ) формирования классов мероприятий по управлению рисками нарушения защищенности ЗФОИР ИУС [1; 4; 13–15];

– алгоритмы: применения ГМ [1; 4]; построения НД и НПМ, ИМ и ННМ; обучения ННМ [1; 4; 16]; поиска ошибок при написании исходного кода ПО для типового правила, обоснования применимости правил при написании исходного кода ПО, генерации уникальных экземпляров бинарного кода ПО [1; 4; 17–19];

– программы: минимизации риск-ситуаций нарушения защищенности ИУС [1; 4; 13]; моделирования мониторинга нарушения защищенности ИУС [1; 4; 14]; статического анализа и проверочных модулей [1; 4; 17]; обфусцирующий компилятор и инструментатор исполняемого кода [1; 4; 18–19].

е) выработанные рекомендации и предложения по внедрению, реализации и использованию результатов исследований:

– при актуализации Прогноза научно-технологического развития РФ на период до 2030 года и формировании Федерального закона от 28 июня 2014 года, № 172-ФЗ «О стратегическом планировании в РФ»;

– при формировании научно-технических направлений в прорывных исследованиях мирового уровня в области защиты информационных технологий и кибербезопасности АСУ;

– в научно-техническом задании при разработке базовых технологий производства приоритетных компонентов радиоэлектронной аппаратуры в рамках подпрограммы «Развитие производства вычислительной техники» Государственной программы РФ «Развитие электронной и радиоэлектронной промышленности на 2013–2025 гг.»;

– на предприятиях промышленности РФ и в изделиях различного назначения.

Теоретическая значимость научных результатов подтверждается:

- а) решением актуальной научной проблемы;
- б) созданием нового научного направления «Интеллектуальная защита ОТС»;
- в) развитием теории интеллектуальных систем комплексной защиты информации в следующих областях системы знаний:
 - в области анализа ИУС и формирования информационных ресурсов – разработанным методом анализа ИУС и формирования ЗФОИР на основе сочетания подходов к структурно-функциональному анализу систем и объектно-ориентированному формированию информационных ресурсов;
 - в области построения сложноструктурированных «больших» данных (хранилищ) – развитым подходом к построению и использованию сложно структурированных «больших» данных (хранилищ) на основе разработанной многоосновной алгебраической структуры;
 - в области интеллектуальных систем комплексной защиты информации:
 - результатами систематизации и классификацией методов и средств информационного противоборства в соответствии с обоснованным набором требований разделимости, согласованной иерархичности, репрезентативности, полноты и непротиворечивости;
 - развитым онтологическим подходом к представлению системы знаний в сфере комплексной защиты ИУС, дополненным и уточненным понятийно-терминологическим аппаратом на основе разработанной онтологической модели ЗФОИР ИУС;
 - уточненными закономерностями построения интеллектуальных систем комплексной защиты информации относительно системных закономерностей, закономерностей иерархической упорядоченности, закономерностей целеобразования, закономерностей управления рисками нарушения защищенности и закономерностей развития, сформулированными принципами и правилами, обоснованными требованиями к ним;
 - разработанным интеллектуальным методом комплексной защиты ИУС на основе комплексного управления рисками нарушения защищенности ЗФОИР ИУС предлагаемой гибридной моделью;
 - предлагаемым подходом к оценке защищенности ИУС на основе предлагаемых паттернов дефектов исходного и бинарного кодов ПО;
 - в области разработки безопасного ПО – разработанным методом повышения защищенности ПО на основе сочетания развитых подходов к статическому анализу исходного кода ПО и к обфускации исходного кода ПО;
 - в теории нечеткого моделирования и обучения нейро-нечетких моделей – разработанным подходом к нечеткому моделированию и

обучению нейро-нечетких моделей на основе предлагаемых игровых моделей.

Практическая значимость научных результатов определяется научно-техническим уровнем и масштабом потенциального и осуществленного внедрения, реализации и использования результатов исследований.

Выводы.

Разработанные программные средства и технические решения для интеллектуальной защиты ОТС позволили:

– дополнить существующие меры информационной защиты, прогнозировать и снизить риски нарушения защищенности изделий и ИУС различного назначения на этапах разработки, внедрения и эксплуатации;

– повысить живучесть распределенной абонентской сети связи, интегрированной с Единой сетью электросвязи;

– повысить защищенность узлов связи Единой сети электросвязи от компьютерной разведки и ИТВ;

– повысить достоверность результатов мониторинга рисков для ИУС;

– увеличить время наступления отказа Единой сети электросвязи в предоставляемых услугах при обслуживании абонентов;

– сократить время анализа исходного кода ПО на наличие дефектов до значений, не превышающих время сборки ПО.

Исследования выполнены при поддержке грантов Президента РФ № МК-755.2012.10 (2012–2013 гг.) и МК-3604.2014.10 (2014–2015 гг.), Российского фонда фундаментальных исследований № 13-07-97518 (2010 г.) и № 10-07-97502 (2013–2015 гг.) [1–19].

Литература

1. Чукляев И.И. Метод и модели комплексного управления рисками нарушения защищенности информационно-управляющих систем: монография. – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2017. – 144 с.

2. Чукляев И.И., Морозов А.В., Борисов В.В. Вычислительные системы боевого управления войсковой ПВО: теоретическое обобщение, развитие, практические результаты: монография. – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2013. – 448 с.

3. Чукляев И.И., Морозов А.В., Болотин И.Б. Теоретические основы оптимального построения адаптивных систем комплексной защиты информационных ресурсов распределительных вычислительных систем: монография. – Смоленск: ВА ВПВО ВС РФ, 2011. – 227 с.

4. Чукляев И.И. Научно-методическое обеспечение комплексного управления рисками нарушения защищенности функционально-ориентированных информационных ресурсов информационно-управляющих систем // Вопросы кибербезопасности. – 2016. – Вып. 4(17). – С. 61–71. – DOI 10.21681/2311-3456-2016-4-61-71.

5. Пат. № 2597457 Способ противодействия сетевой и потоковой компьютерным разведкам, сетевым атакам и система поддержки и принятия решений сетевого администратора компьютерной сети / И. И. Чукляев, Е. В. Гречишников, М. М. Добрышин, С. М. Климов, А. Н. Реформат. – М.: ФИПС (Роспатент), 2018. – Заявка № 2018105350. – Дата поступления 31.01.2018.
6. Пат. Адаптивная система мониторинга информационно-технических воздействий / И. И. Чукляев, М. М. Добрышин, П. В. Закалкин, Е. В. Гречишников, Д. Е. Шугуров, А. Л. Шевченко, А. В. Чижаньков. – М.: ФИПС (Роспатент), 2019. – Заявка № 2019123565. – Дата поступления 26.07.2019.
7. Пат. Система выбора средств и способов защиты организационно-технических систем от групповых разнородных информационно-технических воздействий / И. И. Чукляев, М. М. Добрышин, П. В. Закалкин, А. В. Чижаньков. – М.: ФИПС (Роспатент), 2019. – Заявка № 2019123568. – Дата поступления 26.07.2019.
8. Пат. № 2634169 Способ моделирования мониторинга рисков для информационно-управляющей системы в условиях информационно-технических воздействий / И. И. Чукляев, М. Ю. Храмов, К. Ю. Лавров, С. И. Туник, О. Н. Николаева. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2016147901. – Дата поступления 07.12.2016. – Дата регистрации 24.10.2017.
9. Пат. № 2597457 Способ динамического управления параметрами сети связи в признаковом пространстве / И. И. Чукляев, Е. В. Гречишников, М. М. Добрышин, С. П. Горелик. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2015111536. – Дата поступления 30.03.2015. – Дата регистрации 22.08.2016.
10. Пат. № 2600941 Способ обеспечения живучести распределенной абонентской сети связи / И. И. Чукляев, Д. О. Белоконев, С. П. Горелик, А. В. Скубьев, А. С. Белов. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2015130262. – Дата поступления 21.07.2015. – Дата регистрации 27.10.2016.
11. Чукляев И.И. База данных защищенных функционально-ориентированных информационных ресурсов: база данных / И. И. Чукляев. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2016620690. – Дата поступления 13.05.2016. – Дата регистрации 23.09.2016. – Свидетельство о регистрации № 2016621313.
12. Чукляев И.И. Композиционная модель и способ построения функционально-ориентированных информационных ресурсов информационно-управляющих систем // Труды ИСП РАН. – 2016. – Т. 28, Вып. 2. – С. 259–270. – DOI 10.15514/ISPRAS-2016-28(2)-17.
13. Чукляев И.И. Программа минимизации риск-ситуаций защищенности функционально-ориентированных информационно-управляющих систем: программа ПЭВМ / И. И. Чукляев. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2016615293. – Дата поступления 13.05.2016. – Дата регистрации 07.07.2016. – Свидетельство о регистрации № 2016617543.
14. Чукляев И.И. Программа моделирования мониторинга нарушения доступности, целостности и конфиденциальности для информационно-управляющей системы: программа ПЭВМ // И. И. Чукляев, М. Ю. Храмов, С. И. Туник, О. Н. Андреева. – М.: ФИПС (Роспатент), 2017. – Заявка № 2016663362. – Дата поступления 07.12.2016. – Дата регистрации 16.03.2017. – Свидетельство о регистрации № 2017613346.
15. Чукляев И. И. Игровая модель обоснования средств комплексной защиты информационных ресурсов иерархической информационно-управляющей системы // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – Т. 9, № 2. – С. 64–68.
16. Чукляев И.И. Методика построения и нечеткая модель оценки защищенности и выбора классов мероприятий по минимизации рисков на основе нейронечеткого

классификатора // Известия СмолГУ. – Смоленск: СмолГУ, 2015. – Вып. 2/1. – С. 312–319.

17. Чукляев И.И. Инструмент статического анализа «RuleChecker» для языков С и С++: программа ПЭВМ // И. И. Чукляев, В. Н. Игнатьев, А. А. Белеванцев. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2015662101. – Дата поступления 10.12.2015. – Дата регистрации 04.02.2016. – Свидетельство о регистрации № 2016611555).

18. Чукляев И. И. Обфусцирующий компилятор для затруднения эксплуатации уязвимостей: программа ПЭВМ / И. И. Чукляев, А. Р. Нурмухаметов, Ш. Ф. Курмангалеев, С. С. Гайсарян. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2016616567. – Дата поступления: 22.06.2016. – Дата регистрации 07.10.2016. – Свидетельство о регистрации № 2016661393.

19. Чукляев И.И. Инструментатор исполняемого кода ELF ARM на базе пакета binutils: программа ПЭВМ / И.И. Чукляев, М.К. Ермаков, С.П. Вартанов, А.Ю. Герасимов. – М.: ФИПС (Роспатент), 2016. – Заявка № 2016616632. – Дата поступления: 22.06.2016. – Дата регистрации 11.08.2016. – Свидетельство о регистрации № 2016619020.

I.I. Chuklyayev

Military Academy of Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation

INFORMATIONAL SECURITY OF TECHNICAL SYSTEMS

Keywords: *information security; risks of violation of security; technical systems.*

Abstract. *Developed methods and models, created software tools and proposed technical solutions for information security of technical systems are disclosed.*

С.В. Шалагин

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ

УДК 004.383.3

РЕАЛИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СОРТИРОВКИ МАССИВА ЧИСЕЛ МЕТОДОМ ХОАРА В АРХИТЕКТУРЕ ПЛИС/FPGA

Ключевые слова: *параллельная сортировка; метод Хоара; архитектура ПЛИС/FPGA; IP-ядра; оценки сложности.*

В статье рассматривается задача параллельной реализации метода сортировки Хоара, адаптированного под архитектуру ПЛИС класса FPGA. Реализация предполагает определение индекса элемента входного массива, который при упорядоченности массива по

возрастанию занимает в нем заданную позицию. Получены оценки аппаратной и временной сложности указанного метода параллельной реализации по количеству и времени задержки функционирования, соответственно, аппаратных IP-ядер, определенных в архитектуре ПЛИС/FPGA.

Постановка задачи. В настоящее время существует множество алгоритмов сортировки данных. Они находят свое применение в зависимости от поставленных задач, связанных с упорядочиванием данных по заданным критериям. В связи с развитием специализированных устройств вычислительной техники, актуальна задача реализации алгоритмов быстрой сортировки данных в реальном масштабе времени. При обработке больших объемов данных на практике применяется подход, связанный с использованием комбинации алгоритмов как внутренней, так и внешней сортировки [3, 4]. В работе решена задача параллельной реализации универсального метода Хоара [1] в архитектуре программируемых логических интегральных схем класса FPGA (ПЛИС/FPGA). Предложенная реализация отличается тем, что метод позволяет определить в исходном массиве заданной размерности номер элемента, который занимает определенное место в исходном массиве при его упорядочивании. Кроме того, указанная реализация позволяет организовать параллельную обработку данных в архитектуре ПЛИС/FPGA. Подобная задача актуальна, в частности, при выполнении нелинейных методов фильтрации массивов: как двумерных [5], так и одномерных [6]. В отличие от приведенных методов предложенный позволяет динамично варьировать порядок следования искомого элемента в упорядоченном массиве.

Описание параллельной реализации метода Хоара. Исходный массив размерности d обозначим $X_d = \{x_i\}$, $i = \overline{1, d}$, а через q обозначим номер элемента в исходном массиве X_d при условии, что в упорядоченном массиве $X_d - \bar{X}_d = \{\bar{x}_i\}$, $i = \overline{1, d}$, равный по значению элемент имеет номер f , т.е. $\bar{x}_f = x_q$, $q, f = \overline{1, d}$. Требуется определить значение q при заданных значениях f и исходном массиве X_d , в общем случае – неупорядоченном. Пусть каждый элемент X_d представлен n -разрядным двоичным числом, а значения q и f – двоичными числами разрядности $r = \lceil \log_2 d \rceil$ каждое. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Количество двоичных выводов, требуемых для аппаратной реализации устройства для вычисления q при заданных f и X_d , равно*

$$I = d \cdot n + 2 \cdot r. \quad (1)$$

Оценка, заданная согласно утверждению 1, показывает линейную зависимость количества выводов для аппаратной реализации данного устройства от количества d элементов массива X_d при фиксированном значении n , а также от разрядности n элементов массива X_d при фиксированном d . Согласно (1) и [10], при заданных d и n величина $I < 0,5 \cdot I_{\max}$, где I_{\max} – максимальное количество выводов, доступных пользователю. Для современных семейств ПЛИС/FPGA (Xilinx, Inc.) I_{\max} составляет порядка 1000 [7]: для Virtex 7 – до 1200, для UltraScale – до 1456, для UltraScale+ – до 832 соответственно.

Рассмотрим параллельную реализацию метода Хоара [1] в архитектуре ПЛИС/FPGA на основе методики однотипных IP-ядер [8; 9].

Каждый из элементов X_d выступает в качестве опорного. Для каждого опорного элемента $x_i^{(base)} \in X_d$, $i = \overline{1, d}$, выполним Алгоритм, включающий три этапа.

1. Для $x_i^{(base)}$ определим множество значений L_i и E_i таких, что $\forall x_j \in (X_d - x_i^{(base)})$, $x_j \in L_i : x_j < x_i^{(base)}$, $x_j \in E_i : x_j = x_i^{(base)}$.

2. Определяем $|L_i|$ и $|E_i|$.

3. Если выполняется условие

$$u_i = (|L_i| \leq f) \wedge (|L_i| + |E_i| \geq f), \quad (2)$$

то $q := i$.

Замечание 1. Для множеств L_i , E_i и X_d при заданных i и $x_i^{(base)}$, $i = \overline{1, d}$, справедливы следующие соотношения: $L_i \in (X_d - x_i^{(base)})$, $L_i \cap E_i = \emptyset$ и, если $|E_i| > 0$, $E_i \in (X_d - x_i^{(base)})$.

Замечание 2. Если условию (2) удовлетворяют два и более $x_{i_z}^{(base)}$, то выбираем $x_{i_z}^{(base)}$ с минимальным индексом: $q := \min i_z$.

Реализация Алгоритма в архитектуре ПЛИС/FPGA. Для реализации этапа 1 Алгоритма необходимо выполнить попарное сравнение элементов X_d , что требует $d(d-1)/2$ компараторов n -разрядных чисел, имеющих два выхода – «меньше» и «равно». Указанные компараторы обеспечивают выполнение Алгоритма для всех $x_i^{(base)} \in X_d$, $i = \overline{1, d}$.

Этап 2 Алгоритма предполагает для каждого $x_i^{(base)} \in X_d$, $i = \overline{1, d}$, подсчет количества единиц на соответствующих выходах $(d-1)$ -го компаратора: на выходах «меньше» – для подсчета $|L_i|$ и на выходах

«равно» – для подсчета $|E_i|$. Подсчет для каждого $x_i^{(base)}$ производится при использовании известной схемы, представленной в [2, с. 28–31].

Замечание 3. Если на этапе 1 Алгоритма элементы X_d с меньшим индексом подаются на первые входы компараторов, а с большим – на вторые входы, то на этапе 2 Алгоритма для подсчета $|L_i|$ при сравнении $x_i^{(base)}$ и x_j , $x_i^{(base)}, x_j \in X_d$ на компараторе, когда $j > i$, значение с выхода «меньше» данного компаратора снимается с инверсией.

На этапе 3 для вычисления каждого значения u_i согласно (2) требуется сумматор и два компаратора для r -разрядных чисел: с одного компаратора снимается логическое значение «меньше или равно», со второго – «больше или равно», и конъюнктор на два входа, на выходе которого образуется u_i , $i = \overline{1, d}$. Кроме того, требуется реализовать схему (например, представленную в [6]), которая пропускает на выход единицу, соответствующую u_q , $q := \min i_z$ (см. замечание 2) и блокирует единицы, соответствующие u_i для $i > q$. Далее d выходов, соответствующих u_i , подаются на входы кодера « 2^r в r » с номерами $i = \overline{1, d}$: $(d \leq 2^r) \wedge (d > 2^{r-1})$. С выхода кодера снимается двоичное значение q .

Определим сложность реализации Алгоритма в архитектуре ПЛИС/FPGA на основе однотипных IP-ядер. Для выполнения этапа 1 требуется $d(d-1)/2$ компараторов n -разрядных чисел (обозначим $CM(n)$); для выполнения этапа 2 – $2d$ схем подсчета $(d-1)$ единиц (обозначим $I(d-1)$); для этапа 3 – $2d$ компараторов r -разрядных чисел – $CM(r)$, d сумматоров r -разрядных чисел (обозначим $SM(r)$) и d конъюнкторов на два входа (обозначим AND), схема блокировки единиц в разрядах с большим номером (обозначим Bl) и кодер « 2^r в r » (обозначим $Cd(r)$). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Теоретические оценки временной и аппаратной сложности реализации Алгоритма составляют:

$$T = T_{CM(n)} + T_{I(d-1)} + T_{SM(r)} + T_{CM(r)} + T_{AND} + T_{Bl} + T_{Cd(r)},$$

$$Q = d \left(Q_{CM(n)} \cdot (d-1)/2 + 2 \left(Q_{I(d-1)} + Q_{CM(r)} \right) + Q_{SM(r)} + Q_{AND} \right) + Q_{Bl} + Q_{Cd(r)}.$$

Алгоритм может быть реализован на языке описания аппаратуры интегральных схем VHDL с целью возможной адаптации под заданное семейство ПЛИС/FPGA при использовании специализированных систем автоматизированного проектирования. Утверждения 1 и 2 позволяют предварительно оценить количество реконфигурируемых ресурсов ПЛИС/FPGA – блоков ввода-вывода (БВВ) и конфигурируемых

логических блоков (КЛБ), соответственно, требуемых для реализации Алгоритма. Согласно (1) возможно задать ограничения снизу на величину I_{\max} . Для оценки снизу количества КЛБ по методике, представленной в [10], требуется определить оценки аппаратной сложности архитектуры ПЛИС/FPGA каждого из блоков: $CM(n)$, $I(d-1)$, $SM(r)$, $CM(r)$, AND, В1 и $Cd(r)$.

На основании утверждений 1 и 2 можно сделать следующие **выводы**. За счет параллельного выполнения Алгоритма на реконфигурируемых элементах ПЛИС/FPGA оценка его временной сложности линейно зависит от разрядности сортируемых чисел, тогда как количество сортируемых чисел влияет на данную оценку логарифмически. Что касается аппаратной сложности Алгоритма, то количество $CM(n)$ растет квадратично, а количество $I(d-1)$, $CM(r)$ и AND растет линейно в зависимости от количества d сортируемых чисел. Алгоритм в целом соответствует архитектуре ПЛИС/FPGA, так как количество БВВ, доступных пользователю, растет линейно в зависимости от d , тогда как количество КЛБ в зависимости от d возрастает квадратично.

Литература

1. С. А. R. Hoare, Quicksort // The Computer Journal. 1962. Vol. 5, Is. 1. P. 10–16. – URL: <https://doi.org/10.1093/comjnl/5.1.10>.
2. Гашков С.Б. Сложение однобитных чисел. Треугольник Паскаля, салфетка Серпинского и теорема Куммера. – М.: МЦНМО, 2014. – 40 с.
3. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Алгебраический подход к построению программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2015. – Т. 2, № 11. – С. 391-396.
4. Мунерман В.И., Мунерман Д.В. Параллельная реализация операций обработки файлов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2016. – Т. 12, № 2. – С. 84-90.
5. Щербаков М.А., Сазонов В.В., Исянов Р.Н. Матричная реализация двумерных дискретных фильтров Вольтерра // Изв. ВУЗов. Поволжский регион. – 2014. – № 1(29). – С. 64 - 71.
6. Мурсаев А.Х. Аппаратная реализация медианного фильтра // Научное приборостроение. – 2013. – Т. 23, № 3. – С. 114–119.
7. FPGA Leadership across Multiple Process Nodes. Xilinx, Inc. 2020. – URL: <https://www.xilinx.com/products/silicon-devices/fpga.html>.
8. Шалагин С.В. Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа: монография. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2016. – 228 с.
9. Шалагин С.В., Чебурахин И.Ф. Конвейерное вычисление булевых функций на основе однотипных IP-ядер в архитектуре ПЛИС/Virtex // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. Т. – 16, № 1. – С. 3 – 8.

10. Шалагин С.В. Экспериментальное исследование методики синтеза комбинационных схем на программируемых микросхемах класса FPGA // Микроэлектроника. – 2004. –Т. 33, № 1. – С. 56 – 67.

S.V. Shalagin

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

THE IMPLEMENTING OF PARALLEL ARRAY SORTING USING THE HOAR`S METHOD IN FPGA-ARCHITECTURE

Keywords: *parallel sorting; Hoare`s method; PLD/FPGA-architecture; IP-cores; evaluation of complexity.*

Abstract. *In the article the problem of parallel implementation of the Hoar sorting method adapted to the FPGA-architecture are deals. The implementation is involves determining the index of an element in the input array, which, if the array is ordered in ascending, occupies the specified position in it. Estimates of the hardware and time complexity of the specified parallel implementation method based on the number and time delay of functioning, respectively, of hardware IP-cores defined in the FPGA-architecture are obtained.*

СЕКЦИЯ 3 Математика и её приложения

М.Б. Банару, Г.А. Банару
Смоленский государственный университет

УДК 514.76

О МИНИМАЛЬНОСТИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КИРИЧЕНКО – УСКОРЕВА КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие; келерово многообразие; почти контактная метрическая структура; структура Кириченко – Ускорева; гиперповерхность; типовое число; характеристика Такаги – Курихары.

Доказано, что четность типового числа гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко – Ускорева, является необходимым и достаточным условием минимальности этой гиперповерхности.

Уже более полувека известно, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением таких почти контактных метрических структур занимались многие известные математики, преимущественно японские и американские. При этом мы с удовольствием отметим, что очень глубоких результатов в данной области достигли и отечественные геометры, а именно Вадим Федорович Кириченко и Лидия Васильевна Степанова (например: [1], [2]). Используя разработанные этими отечественными специалистами методы и опираясь на их достижения, авторы настоящей заметки получили ряд результатов, связанных с геометрией почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий [3; 4; 5].

Также около полувека назад известный японский геометр Риоши Такаги (в некоторых статьях на русском языке фамилию пишут Такаджи) применил так называемую теорию типовых чисел к изучению гиперповерхностей различных видов многообразий [6]. В дальнейшем развитии этой теории особенно преуспел еще один японский геометр – Хироюки Курихара, отчего в литературе по данной тематике

характеризацию гиперповерхностей многообразий в терминах их типовых чисел часто называют характеристикой Такаги – Курихары.

В данной работе мы применяем характеристику Такаги – Курихары к изучению гиперповерхностей с почти контактной метрической структурой Кириченко – Ускорева [7] в келеровых многообразиях. Наш основной результат содержит следующая теорема.

Теорема. *Типовое число гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести, на которой индуцирована почти контактная метрическая структура Кириченко – Ускорева, является четным в том и только том случае, когда гиперповерхность является минимальной.*

Известно, что структура Кириченко – Ускорева является обобщением других известнейших почти контактных метрических структур – косимплектической структуры и структуры Кенмоцу. Вот почему данная теорема является обобщением результатов, полученных о минимальных косимплектических и кенмоцевых гиперповерхностях келеровых многообразий [8; 9; 10; 11; 12].

Предварительные сведения. Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N нечетной размерности называется четверка тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, если для нее выполняются следующие условия [13]:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N). \end{aligned}$$

Здесь $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, ξ – структурный вектор, Φ – поле тензора типа $(1, 1)$, η – структурная форма, $\mathfrak{N}(N)$ – модуль C^∞ -гладких векторных полей на многообразии N .

Также напомним [13], что пару $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ называют почти эрмитовой структурой на многообразии M четной размерности, если $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, а J – почти комплексная структура на этом многообразии. При этом риманова метрика и почти комплексная структура должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M).$$

Многообразие, на котором задана почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым. Если при этом почти комплексная структура J является оператором Нейенхейса, почти эрмитово многообразие называют эрмитовым. Частным случаем эрмитова многообразия является келерово многообразие, характеризуемое условием $\nabla F = 0$, где $F(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ – так называемая фундаментальная форма почти эрмитова многообразия [13].

В статье [7] В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактной метрической структуры

косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. Оказалось, что данная структура инвариантна относительно так называемых канонических конформных отображений.

Наконец, отметим, что под типовым числом гиперповерхности риманова многообразия понимают ранг ее второй квадратичной формы [6].

Доказательство теоремы. Давно известна первая группа структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести [8; 9]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega, \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega, \\ d\omega &= -i\sigma_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta} \omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_n^\beta \omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\{\omega^\alpha\}, \{\omega_\alpha\}$ – компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega_j^k\}$ – компоненты форм римановой связности; σ – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n} , $n \geq 3$; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$; $a, b, c = 1, \dots, n$; $\hat{a} = a + n$.

В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев доказали [7], что выполнение равенства

$$d\omega = 0,$$

является критерием того, чтобы почти контактная метрическая структура оказалась структурой введенного ими в рассмотрение типа. Поэтому, принимая во внимание структурные уравнения (1), мы можем сделать следующий вывод: выполнение равенств

$$1) \sigma_\beta^\alpha = 0; \quad 2) \sigma_n^\beta = 0; \quad 3) \sigma_{n\beta} = 0$$

является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести была структурой Кириченко–Ускорева. Отличными от нуля могут быть лишь элементы матрицы второй квадратичной формы $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\hat{a}\hat{b}}$ и σ_m , а поэтому вид данной матрицы таков:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \sigma_{\alpha\beta} & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} & \mathbf{0} \\ \hline 0 \dots 0 & \sigma_m & 0 \dots 0 \\ \hline \mathbf{0} & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} & \sigma_{\hat{a}\hat{b}} \end{array} \right), \quad p, s = 1, \dots, 2n-1. \quad (2)$$

Необходимым и достаточным условием минимальности гиперповерхности является соотношение [14]:

$$g^{ps} \sigma_{ps} = 0.$$

Матрица контравариантного метрического тензора гиперповерхности N^{2n-1} имеет вид [3; 5; 15]:

$$(g^{ps}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \hline \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 1 & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \mathbf{I}_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad p, s = 1, \dots, 2n-1. \quad (3)$$

Следовательно, для гиперповерхности с почти контактной метрической структурой Кириченко – Ускорева N^{2n-1} келерова подмногообразия M^{2n} , $n \geq 3$:

$$g^{ps} \sigma_{ps} = g^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + g^{\hat{\alpha}\beta} \sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}} \sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{mn} \sigma_{mn} = g^{\hat{\alpha}\beta} \sigma_{\hat{\alpha}\beta} + g^{\alpha\hat{\beta}} \sigma_{\alpha\hat{\beta}} + g^{mn} \sigma_{mn} = \sigma_{mn}.$$

Поэтому

$$g^{ps} \sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{mn} = 0.$$

Пусть N^{2n-1} – минимальная гиперповерхность косимплектического типа келерова многообразия размерности не ниже шести. Тогда, в силу (2) и (3), матрица второй квадратичной формы гиперповерхности имеет вид:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\beta} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\sigma_{\alpha\beta} = \overline{\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}}$, получается, что $rank(\sigma_{ps}) = 2rank(\sigma_{\alpha\beta})$. Следовательно, $t = rank(\sigma_{ps})$ – число четное в том и только том случае, когда гиперповерхность является минимальным подмногообразием келерова многообразия размерности не ниже шести, что и требовалось доказать.

Литература

1. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МПГУ им. В.И. Ленина, 1995.
2. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – 1986. – Т.18. – С. 25–71.
3. Банару М.Б. О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. – 2003. – Т.194, №8. С. 13–24.

4. Banaru M.B., Banaru G.A. 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. –2015. –V. 51, №1. – P. 1–9.
5. Banaru M.B., Kirichenko V.F. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci., New York. 2015. – V. 207, №4. – P. 513–537.
6. Takagi R. On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space // Osaka J. Math. – 1973. – V. 10. – P. 495–506.
7. Кириченко В.Ф., Ускорев И.В. Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. – 2008. – Т.84, №6. – С. 838–850.
8. Банару М.Б. О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. – 2014. – Т. 55, №4. – С. 719–723.
9. Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б. О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2016. – №1. – С. 86–89.
10. Степанова Л.В., Банару М.Б., Банару Г.А. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т.15. – С. 815–822.
11. Банару Г.А. О почти контактной метрической структуре косимплектического типа на гиперповерхности келерова многообразия // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – 2018. – Вып. 49. – P. 7–11.
12. Банару Г.А. О несуществовании структуры Кенмоцу на ас-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – 2019. – Вып. 50. – P. 23-28.
13. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях – Одесса: Печатный дом, 2013. – 458 с.
14. Ianus S. Geometrie diferențială cu aplicații în teoria relativității. – București: Editura Academiei Române, 1983.
15. Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. –2015. – V.207, №3. – P. 354-388.

M.B. Banaru, G.A. Banaru
Smolensk State University

ON MINIMALITY OF KIRICHENKO –USKOREV HYPERSURFACES OF KÄHLERIAN MANIFOLDS

Keywords: *almost Hermitian manifold; Kählerian manifold; almost contact metric structure; Kirichenko – Uskorev structure; hypersurface, type number; Takagi – Kurihara characterization.*

Abstract. *It is proved that type number of a Kirichenko–Uskorev hypersurface in a Kählerian manifold of dimension at least six is even if and only if this hypersurface is minimal.*

ОПИСАНИЕ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ

Ключевые слова: *верхняя полуплоскость; голоморфные функции; корневые множества.*

В статье получено описание корневых множеств функций из класса $N_s(\mathbb{C}^+)$.

Для изложения основных результатов, полученных в работе, введем следующие обозначения:

пусть \mathbb{C} – комплексная плоскость, $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ – верхняя полуплоскость, $H(\mathbb{C}^+)$ – множество голоморфных с \mathbb{C}^+ функций,

$$B_p(\zeta, \zeta_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2y_k(i+\zeta)}{i(\zeta_k+i)(\bar{\zeta}_k-\zeta)} \right) \cdot \exp \sum_{j=1}^p \frac{1}{j} \left(\frac{2y_k(i+\zeta)}{i(\zeta_k+i)(\bar{\zeta}_k-\zeta)} \right)^j -$$

бесконечное произведение типа Вейерштрасса, $\{\zeta_k\}$ – произвольная последовательность точек из \mathbb{C}^+ , для которой

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\text{Im } \zeta_k)^{p+1}}{|i + \zeta_k|^{p+1}} < +\infty.$$

Скажем, что функция из класса $N_s(\mathbb{C}^+)$, $s \geq 2$, если она голоморфна в \mathbb{C}^+ и удовлетворяет условию

$$N_s(\mathbb{C}^+) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^+) : \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x+iy)|}{1+|x+iy|^{2s}} dx dy < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$.

Исследование свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений привлекло внимание классиков комплексного анализа еще в начале прошлого столетия. В этой связи отметим классические работы К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, Е. Линдефёра, О. Пикара и других о нулях целых функций, имеющих заданный рост вблизи бесконечно удаленной точки, а также работы Р. Неванлинна и В.Н. Смирнова о внешне-внутренней факторизации классов Харди и классов функций ограниченного вида в единичном круге. Указанные вопросы остаются в центре внимания и современных авторов, для этого достаточно отметить труды М.М. Джрбашяна, Б.Я. Левина, Л.А. Рубеля, Ф.А. Шамомяна и других математиков. Эти

результаты изложены в хорошо известных монографиях Р. Неванлинны [4], И.И. Привалова [5], П. Кусиса [3], Д. Гарнета [2].

В работе получено описание корневых множеств из класса $N_s(\mathbb{C}^+)$, $s \geq 2$ аналитических в полуплоскости функций. Этот класс функций определяется естественным образом. Корневая характеристика до сих пор полностью не исследована. В работе, в частности, устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть y_k – произвольная последовательность из верхней полуплоскости, $y_k \rightarrow +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) существует функция из N_s такая, что $f(iy_k) = 0$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^+$;

б) следующий ряд сходится

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k^2 < +\infty.$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. При всех $z \in D$ выражение $|1-z|^{2s} + |1+z|^{2s}$ удовлетворяет оценке

$$0 < q \leq |1-z|^{2s} + |1+z|^{2s} \leq c_0,$$

где q и c_0 – положительные числа, не зависящие от z .

Лемма 2. Пусть $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$,

$$F(z) = f\left(i \frac{1+z}{1-z}\right).$$

Тогда функция $F(z)$ обращается в нуль в точках z , удовлетворяющих равенству

$$z_k = \frac{y_k - 1}{y_k + 1}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда при каких условиях на $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ можно утверждать, что $f(z) \neq 0$.

Пусть $\zeta = i \frac{1+z}{1-z}$, $|z| < 1$, $\text{Im} \zeta > 0$.

$$\text{Тогда } \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x+iy)|}{1+|x+iy|^{2s}} dx dy = \int_D \frac{\ln^+ \left| f\left(i \frac{1+z}{1-z}\right) \right| \cdot |J(z)|^2}{1 + \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^{2s}} dx dy,$$

где $J(z) = |\phi'(z)|$.

Находя $\phi'(z)$, получим

$$\int_D \frac{\ln^+ \left| f \left(i \frac{1+z}{1-z} \right) \right| \cdot |J(z)|^2}{1 + \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^{2s}} dx dy = \int_D \frac{\ln^+ \left| f \left(i \frac{1+z}{1-z} \right) \right| \cdot \frac{|1-z|^{2s}}{|1-z|^4}}{|1-z|^{2s} + |1+z|^{2s}} dx dy. \quad (1)$$

Обозначим через $F(z) = f \left(i \frac{1+z}{1-z} \right)$, $z = x + iy$.

Тогда выражение (1) примет вид

$$\int_D \frac{\ln^+ \left| f \left(i \frac{1+z}{1-z} \right) \right| \cdot \frac{|1-z|^{2s}}{|1-z|^4}}{|1-z|^{2s} + |1+z|^{2s}} dx dy = \int_D \frac{\ln^+ |F(z)| \cdot |1-z|^{2s-4}}{\left((1-x)^2 + y^2 \right)^s + \left((1+x)^2 + y^2 \right)^s} dx dy. \quad (*)$$

Из леммы 1 следует, что интеграл (*) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_D \ln^+ |F(z)| \cdot |1-z|^{2s-4} dx dy. \quad (**)$$

Получаем, что $2s - 4 \geq 0$, то есть $s \geq 2$.

Если интеграл (**) сходится, то сходится интеграл

$$\int_D \ln^+ |F(z)| \cdot (1-|z|)^{2s-4} dx dy < +\infty,$$

так как $\int_D \ln^+ |F(z)| \cdot (1-|z|)^{2s-4} dx dy \leq \int_D \ln^+ |F(z)| \cdot |1-z|^{2s-4} dx dy \leq \text{const}$.

Используя эквивалентную теорему, если $F \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{2s-4+2} < +\infty$$

или $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{2(s-1)} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|^2)^{2(s-1)} < +\infty$. (***)

Учитывая сходимость ряда (***), получили

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|^2)^{2(s-1)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left| \frac{y_k - 1}{y_k + 1} \right|^2 \right)^{2(s-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(4y_k)^{2(s-1)}}{(y_k + 1)^{2(2(s-1))}} = \\ &= \sum_{y_k \leq 1}^{+\infty} y_k^{2(s-1)} + \sum_{y_k \geq 1} \frac{1}{y_k^{2(s-1)}} < +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь важно заметить, что:

а) если $y_k \rightarrow +\infty$ (при $y_k > 1$, $k \geq k_0$), то сходимость ряда (2)

эквивалентна сходимости ряда $\sum_{y_k \geq 1} \frac{1}{y_k^{2(s-1)}} < +\infty$;

б) если же $y_k \rightarrow 0$, то сходимость ряда (2) эквивалентна сходимости

ряда $\sum_{y_k \leq 1}^{+\infty} y_k^{2(s-1)} < +\infty$.

Рассмотрим случай, когда $0 < y_k \leq 1$, $y_k \rightarrow 0$.

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |B_p(x+iy, y_k)|}{1+(x^2+y^2)^s} dx dy \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^{1+y_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \right. \\ \left. \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k + B_k),$$

где

$$A_k = \int_0^{1+y_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy, \\ B_k = \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy.$$

Оценим интеграл A_k , $k \geq 1$ при условии $y_k \rightarrow 0$.

$$A_k = 2 \int_0^{y_k} \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \\ + 2 \int_{y_k}^1 \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy = (A_{k,1}^* + A_{k,2}^*) \cdot 2.$$

Оценим интеграл $A_{k,1}^*$, для этого разобьем его на части:

$$A_{k,1}^* = \int_0^{y_k} \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy = \int_0^{y_k} \int_0^{y_k} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \\ + \int_0^{y_k} \int_{y_k}^1 \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \int_0^{y_k} \int_1^{+\infty} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy.$$

Теперь оценим каждую часть по отдельности.

$$1. \int_0^{y_k} \int_0^{y_k} \frac{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1+(x^2+y^2)^s) \cdot (x^2+(y+y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq$$

$$\leq \int_0^{y_k} dy \int_0^{y_k} \frac{y_k^{p+1}}{(y_k + y)^{p+1}} dx \leq \int_0^{y_k} dy \frac{y_k^{p+1}}{y^{p+1}} \int_0^{y_k} dx \leq y_k^{p+2} \int_0^{y_k} \frac{dy}{y^{p+1}} \leq \frac{y_k^{p+2}}{y_k^p} \leq y_k^2.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int_0^{y_k} \int_{y_k}^1 \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\ & \leq \int_0^{y_k} dy \int_{y_k}^1 \frac{y_k^{p+1}}{(x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx \leq \int_0^{y_k} dy \cdot y_k^{p+1} \int_{y_k}^1 \frac{dx}{x^{p+1}} \leq \int_0^{y_k} dy \cdot \frac{y_k^{p+1}}{y_k^p} \leq y_k^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \int_0^{y_k} \int_1^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\ & \leq \int_0^{y_k} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^{p+1} y_k^{p+1}}{x^{p+1} (1 + x^{2s})} dx \leq y_k^{p+1} \int_0^{y_k} dy \leq y_k^{p+1} \cdot y_k \leq y_k^{p+2}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл $A_{k,2}^*$, для этого разобьем его на части:

$$\begin{aligned} A_{k,2}^* &= \int_{y_k}^1 \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy = \int_{y_k}^1 \int_0^{y_k} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \\ &+ \int_{y_k}^1 \int_{y_k}^1 \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \int_{y_k}^1 \int_1^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy. \end{aligned}$$

Далее, оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства по отдельности.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_{y_k}^1 \int_0^{y_k} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\ & \leq \int_{y_k}^1 dy \int_0^{y_k} \frac{y_k^{p+1}}{(y_k + y)^{p+1}} dx \leq \int_{y_k}^1 dy \frac{y_k^{p+1}}{y^{p+1}} \int_0^{y_k} dx \leq y_k^{p+2} \int_{y_k}^1 \frac{dy}{y^{p+1}} \leq \frac{y_k^{p+2}}{y_k^p} \leq y_k^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int_{y_k}^1 \int_{y_k}^1 \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\ & \leq \int_{y_k}^1 dy \int_{y_k}^1 \frac{y_k^{p+1}}{(x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx \leq \int_{y_k}^1 dy \cdot y_k^{p+1} \int_{y_k}^1 \frac{dx}{x^{p+1}} \leq \int_{y_k}^1 dy \cdot \frac{y_k^{p+1}}{y_k^p} \leq y_k^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \int_{y_k}^1 \int_1^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\
& \leq \int_{y_k}^1 dy \int_1^{+\infty} \frac{x^{p+1} y_k^{p+1}}{x^{p+1} (1 + x^{2s})} dx \leq y_k^{p+1} \int_{y_k}^1 dy \leq y_k^{p+1} \cdot y_k \leq y_k^{p+2}.
\end{aligned}$$

В итоге получаем, что интеграл $A_k \leq c_1 (y_k^2 + y_k^{p+2})$.

Далее оценим интеграл B_k :

$$B_k = \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy = 2 \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy.$$

Разобьем интеграл B_k на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned}
B_k &= \int_1^{+\infty} \int_0^{y_k} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \\
&+ \int_1^{+\infty} \int_{y_k}^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy = B_{k,1}^* + B_{k,2}^*.
\end{aligned}$$

Оценим каждый интеграл по отдельности, получим:

$$\begin{aligned}
B_{k,1}^* &= \int_1^{+\infty} \int_0^{y_k} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y_k} \frac{y_k^{p+1}}{(y_k + y)^{p+1}} dy \leq y_k^{p+2}, \\
B_{k,2}^* &= \int_1^{+\infty} \int_{y_k}^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \leq \\
&\leq \int_1^{+\infty} dy \int_{y_k}^{+\infty} \frac{x^{p+1} y_k^{p+1}}{x^{2s} x^{p+1}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{y_k^{p+1}}{y_k^{2s-1}} dy \leq y_k^{p-2s+2}.
\end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |B_p(x + iy, y_k)|}{1 + (x^2 + y^2)^s} dx dy \leq c \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy + \right. \\
& \left. + \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + (y+1)^2)^{\frac{p+1}{2}} y_k^{p+1}}{(1 + (x^2 + y^2)^s) \cdot (x^2 + (y + y_k)^2)^{\frac{p+1}{2}}} dx dy \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k + B_k) = c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (y_k^{p+2} + y_k^{p-2s+2}).
\end{aligned}$$

Так как всегда можно подобрать $p \geq 2s$, $0 < y \leq 1$, то отсюда получаем, что

$$c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (y_k^{p+2} + y_k^{p-2s+2}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k^2,$$

то есть необходимое и достаточное условие на нули класса $N_s(\mathbb{C}^+)$

является $\sum_{k \geq 1}^{+\infty} y_k^2 < +\infty$. Теорема доказана.

Литература

1. Беднаж В.А., Коряушкина А.С. Описание корневых множеств одного класса аналитических функций // Ученые записки Брянского государственного университета – 2019. – № 4(16). – С.7-9.
2. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Мир, 1984. – 368 с.
4. Неванлинна Р. Граничные свойства аналитических функций. – М.: ИМГИТТЛ, 1941. – 388 с.
5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 336 с.
6. Шамоян Ф.А. Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1978. – Т. 13, № 5. – С.405-422.

V.A. Bednazh, A.C. Koryaushkina, G.V. Seraya
Bryansk State University

ON THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE HOMOGENEOUS HILBERT PROBLEM FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS

Keywords: *upper half-plane; holomorphic functions; root sets.*

Abstract. *The article provides a complete description of root sets of functions from the class $N_s(\mathbb{C}^+)$.*

П.В. Беляков, Е.П. Емельченков
Смоленский государственный университет.

УДК 004.021

АНАЛИЗ СПОСОБОВ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАПАСА НА СКЛАДЕ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ CALS

Ключевые слова: *прогнозирование запаса; CALS; вейвлет анализ; статистический метод прогнозирования оптимального запаса; экономико-*

математические методы прогнозирования; бережливое производство; точно в срок.

В статье описаны современные методы прогнозирования запаса с точки зрения применения в технологии CALS. Дается краткое описание каждого метода, плюсы и минусы, условия применения, разъясняется насколько метод подходит для применения в технологии CALS. На основании полученных данных о методах делается вывод о наиболее подходящем.

1. Актуальность. Редкое производство может обойтись вообще без запасов. Даже небольшие мануфактурные производства имеют резерв материалов и готовой продукции. Однако это вносит существенный вклад в затраты за счёт аренды места под склад, потери в результате порчи, затрат на утилизацию неиспользованных ресурсов [3], что делает процесс оптимизации запасов важной составляющей увеличения прибыли.

Ранее данную задачу решали вручную, что накладывало существенные ограничения на методы расчёта показателей, так как помимо эффективности и точности метод должен быть простым в расчётах. Так между точным, но сложным в вычислениях, и простым в реализации, но имеющим значительную погрешность, выбирался второй метод. На тот момент это был обоснованный выбор: расчёты по запасам приходится часто корректировать, что не так удобно при высокой длительности вычислений, к которым приводила сложность или объёмность математических операций. К тому же при ручном расчёте сложных методов возможны ошибки, которые могли повлечь за собой существенные убытки производства.

Однако на данный момент в процесс производства активно внедряются средства автоматизации разных сфер деятельности предприятия при помощи различных электронных средств, в том числе появилась возможность автоматизировать расчёты показателей запасов посредством компьютерных программ.

Одна из причин появления такой возможности – это внедрение непрерывной информационной поддержки поставок и жизненного цикла изделий (ИПИ или технология CALS – Continuous Acquisition and Life cycle Support) [5]. Сущность данной технологии заключается в формировании виртуального пространства предприятия, поддерживаемого программно-аппаратными средствами на каждом этапе жизненного цикла, в том числе и в формировании запаса. Поэтому методы, используемые для расчёта ресурсов, должны, в числе прочего, подходить и под технологию CALS, позволяя, таким образом, предприятию полностью переложить сложные вычисления на компьютер и руководствоваться результатами вычислений при принятии

решений. Это позволит учесть показатели не только одного предприятия, но и комплекса всех предприятий, если их несколько, без формирования большого количества управляющей документации, которая может замедлить производство и снизить гибкость в изменяющихся условиях рынка. Однако и небольшие производства получают выгоду от внедрения технологии CALS за счёт уменьшения затрат трудовых ресурсов на расчёты, формирование и обмен документами внутри производства и с посредниками [6].

2. Анализ методов расчёта оптимального запаса. На данный момент основными методами расчёта оптимального запаса на производстве являются: статистический, экономико-математический и метод точно в срок [3]. Авторами статьи в этот список добавлен так же метод вейвлет анализа, так как в работах [1; 2] показаны некоторые преимущества данного метода перед распространёнными. Рассмотрим по порядку каждый метод, его плюсы и минусы.

2.1. Статистический метод прогнозирования оптимального запаса. Статистический метод прогнозирования заключается в статистической обработке данных о запасах на складе за много лет. Этот метод позволяет получить среднегодовые значения и даже высчитать ожидаемый запас на любой день в году, причём результаты, полученные таким образом, имеют математические обоснования достоверности и эффективности, однако данный метод обнаруживает существенные недостатки при внедрении на производство. Во-первых, данный метод требует большого количества данных для высокой точности обработки, что просто невозможно обеспечить на только запустившемся производстве. Во-вторых, даёт сильные сбои при любом колебании спроса, что делает его малоприменимым на производствах, выпускающих готовую продукцию в условиях рыночной экономики. В-третьих, из-за большого количества данных перерасчёт результатов, который необходим минимум раз в год для корректирования актуальности, требует больших затрат мощностей вычислительной техники, что делает его не самым удобным для автоматизации.

2.2. Экономико-математический метод расчёта оптимального запаса. Так же, как и статистический метод, данные методы имеют математическое обоснование оптимальности полученного значения. Однако, в отличие от предыдущего метода, не требуют большого количества данных. Методы могут модернизироваться в зависимости от состояния исходных данных, что придаёт системе некоторую гибкость. Данные методы уже показали свою эффективность при внедрении на производство, однако они имеют существенные минусы, которые не дают им стать универсальным решением задачи расчёта запасов. Главными проблемами являются чувствительность к изменению начальных условий и то, что методы очень тяжелы при расчёте больших

данных даже на компьютерах [1], что существенно при их выборе как основного метода для обработки данных в информационных системах.

2.3. Метод точно в срок. Данный метод является одним из принципов бережливого производства – концепции, по которой все потери, в том числе потери, связанные с запасом, сводятся к минимуму. Для сокращения затрат на запасы метод предполагает не формировать запасы до тех пор, пока они не понадобятся. Данный метод уже показал свою эффективность на заводах фирмы автопроизводителя Toyota, однако при этом он имеет явные минусы, важнейшим из которых является сложность внедрения. Для обеспечения стабильной эффективности концепции бережливого производства требуется слаженная работа на всех этапах жизненного цикла, однако даже это не обеспечит сокращения затрат времени на обработку заказа. К тому же данный метод сложен при автоматизации работы с большими и сверхбольшими данными.

2.4. Вейвлет анализ. Данный метод заключается в применении специфического семейства функций – вейвлетов, для анализа данных с целью получения прогноза на ограниченном временном участке. Применение этих функций позволяет решить задачу адаптации входящих локальных изменений сигнала и представления нестационарных сигналов и систем, что делает вейвлеты в теории прекрасно подходящими к системе склада в условиях современного рынка. К тому же следует помнить, что некоторые вейвлеты проще синусоидальной функции, что делает их предпочтительней используемого обычно в таких случаях преобразования Фурье за счёт превышения скорости расчёта результата над последним. Для вейвлетов существуют алгоритмы, ускоряющие процесс вычислений, что делает вейвлет анализ потенциально самым быстрым методом прогнозирования из всех перечисленных. Конечно, этот метод не лишён и минусов. Во-первых, данный метод недостаточно разработан для того, чтобы можно было говорить о его эффективности при внедрении. Во-вторых, он требует настройки под конкретное предприятие, что, однако, придаёт ему некоторую гибкость.

3. Анализ применения методов прогнозирования в разных условиях. Если исходить из плюсов и минусов, то статистический метод более подходит для плановой экономической системы, в которой не будет существенного колебания спроса на рынке.

Экономико-математические методы могут хорошо показать себя при внедрении на небольшие малономенклатурные производства, имеющие все данные для формирования модели. При соблюдении данных условий даже внедрение автоматизации на производстве несущественно замедлит работу предприятия, так как методы показывают незначительные затраты времени при подобном варианте.

Метод точно в срок больше подходит крупным машиностроительным предприятиям, имеющим стабильный спрос на рынке, либо эксклюзивному производству поштучного товара.

Вейвлет анализ показал хорошие результаты при сравнении его с экономико-математическим [1], практически не уступая ему во времени на небольших данных и превышая его при сверхбольших данных. Так же метод показал эффективность при сравнении со статистическим методом [2], превышая его в точности. Эти результаты показывают, что метод вейвлет анализа подходит для внедрения на тех же производствах, что и статистический и экономико-математический методы. Однако для более достоверных данных, а также для сравнения его с методом точно в срок требуется непосредственное внедрение вейвлет анализа на производство как минимум в тестовом режиме. Это позволит выявить окончательный потенциал метода в прогнозировании оптимального запаса.

4. Анализ методов для внедрения в технологию CALS. С учётом проведённого анализа для внедрения в технологию CALS не подходят статистический и точно в срок методы. Это связано с тем, что они сложны для расчётов и программирования на больших данных, которые непременно возникнут на производстве в современных условиях рынка. Экономико-математический метод подходит больше, однако он проигрывает по скорости работы алгоритма вейвлет анализу, так как вейвлет анализ легко распараллеливается, что позволяет существенно повысить скорость его работы [4].

Таким образом, вейвлет анализ выглядит лучшим кандидатом для внедрения его в технологию CALS в качестве стандартного метода, однако для достоверной проверки данного утверждения необходимо разработать систему, которая реализует вейвлет анализ и подходит для внедрения в CALS, и внедрить её на производство в тестовом режиме. Иными словами, вейвлет анализ является перспективным, однако требующим развития методом прогнозирования оптимальных запасов. На данный момент авторами статьи ведутся работы по созданию прототипа подобной системы для изучения возможных проблем при внедрении, а также для дальнейшего сравнения с существующими методами.

Литература

1. Беляков П.В. Разработка информационной системы логистической поддержки наукоёмких производств. Студенческая наука – 2019: сборник статей / под ред. Н.Н. Розановой, Е.А. Боброва. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. – 367 с.
2. Беляков П.В., Емельченков Е.П. Применение вейвлет анализа в логистической поддержке наукоёмких производств // Актуальные проблемы информатизации в цифровой экономике и научных исследованиях. Международная научно-практическая конференция: тезисы докладов. – М.: МИЭТ, 2019. – 112 с.

3. Лукинский В.С. Управление запасами в цепях поставок в 2 ч. Ч. 1: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры – М.: Изд-во Юрайт, 2019. – 215 с.

4. Мунерман В.И., Мунерман Д.В., Сеницын И.Н., Чуляев И.И. Параллельная реализация задач интегрированной логистической поддержки (CALS) // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2014.

5. Сеницын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. – 624 с.

6. Трегубов С.И., Учуватов М.С., Ереско В.С. Этапы внедрения CALS-технологий на малых предприятиях // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. – 2012.

P.V. Belyakov, E.P. Emelchenkov
Smolensk State University

ANALYSIS OF WAYS TO OPTIMIZE STOCK IN THE WAREHOUSE FOR USE IN CALS TECHNOLOGY

Keywords: *stock forecasting; CALS; wavelet analysis; statistical method for forecasting optimal stock; economic and mathematical forecasting methods; lean manufacturing; just in time.*

Abstract. *The article describes modern methods for forecasting stock from the point of view of application in CALS technology. A brief description of each method is given, pluses and minuses, application conditions, how well the method is suitable for use in CALS technology. Based on the data obtained on the methods, a conclusion is drawn on the most suitable.*

Т.К. Бирюкова¹, М.М. Гершкович², В.И. Киреев³
^{1,2}Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН
³ НИТУ МИСИС

УДК 519.6, 004.8

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ В КАЧЕСТВЕ ФУНКЦИИ АКТИВАЦИИ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ НА ПРИМЕРЕ ОДНОСЛОЙНОГО ПЕРЦЕПТРОНА

Ключевые слова: *сплайновые нейронные сети; интегродифференциальный сплайн; параболический сплайн; ИД-сплайн; функция активации; сплайновая функция активации.*

В статье рассматриваются возможности применения разработанных авторами параболических интегродифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов) в качестве функций активации в нейронных

сетях. В этом случае набор обучаемых параметров нейросети, в дополнение к стандартным, включает коэффициенты звеньев ИД-сплайна, что ведет к ускорению обучения сети и обеспечивает возможность уменьшения количества нейронов в слоях без потери качества предсказания.

Выведены формулы выходных сигналов для однослойного перцептрона при ИД-сплайновой функции активации, а также формулы «обратного распространения ошибки», обеспечивающие вычисление значений параметров сети, минимизирующих функцию потерь.

Отмечено, что полученные соотношения легко обобщаются на полносвязную нейронную сеть с любым количеством слоев и нейронов.

Введение. В докладах [1; 2] на конференциях СКМП-2011, СКМП-2012 были рассмотрены методы аппроксимации сеточных функций с помощью разработанных авторами параболических интегродифференциальных сплайнов (ИД-сплайнов), а также одномерных и двумерных ИД-сплайнов произвольной четной степени.

ИД-сплайны построены на основе совокупности интегральных и дифференциальных условий согласования аппроксимирующей и аппроксимируемой функций. Требование равенства интегралов от исходной и приближающей функций на отрезках разбиения позволило вывести формулу параболического сплайна, у которого узлы совпадают с узлами сеточной функции, в отличие от традиционных параболических сплайнов [3], где узлы сплайна смещены относительно узлов сеточной функции. В предыдущих работах авторов [4] доказана устойчивость одномерных и двумерных параболических ИД-сплайнов и приведены способы вычисления параметров, обеспечивающих непрерывность первой производной сплайна. ИД-сплайны обладают свойством консервативности в смысле сохранения интегральных свойств кривых и поверхностей, что важно при решении многих классов прикладных задач, в том числе при аппроксимации обводов летательных аппаратов, в газовой динамике и др.

В данной работе предлагается способ использования одномерных параболических ИД-сплайнов в качестве функции активации в нейронных сетях (нейросетях).

В настоящее время бурно развиваются методы решения разнообразных задач на больших массивах данных с помощью нейронных сетей. В нейросетях с так называемыми «линейными» слоями каждый нейрон определенного слоя сети принимает сигналы от всех нейронов предыдущего слоя, при этом каждый сигнал x_i умножается на некоторый вес w_i и взвешенные сигналы суммируются, то есть нейрон выполняет линейное преобразование входных сигналов:

$\tilde{x} = \sum_{l=1}^L x_l \cdot w_l$, где L – число нейронов предыдущего слоя. (Веса связей

данного нейрона N с каждым из нейронов предыдущего слоя будем здесь называть множеством весов нейрона N). Выходным сигналом нейрона N является результат применения к указанной сумме некоторой функции φ , называемой функцией активации: $y = \varphi(\tilde{x})$. Известно, что только нелинейные функции активации позволяют нейросетям решать нетривиальные задачи. Простейшей функцией активации является ступенчатая функция Хевисайда. Наиболее часто используемыми функциями активации являются сигмоида, гиперболический тангенс,

$RELU(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ и ее модификации (Noisy ReLU, Leaky ReLU и др.).

Веса нейросети являются предметом обучения. На каждой итерации обучения все веса сети (то есть все веса из множеств весов каждого нейрона сети) корректируются с целью минимизации функции потерь \mathcal{L} , выбираемой в зависимости от решаемой задачи и характеризующей расстояние между значением y искомого параметра на выходе нейросети и целевым (*target*) значением y^{tgt} этого параметра. Значения весов $W = \{w_l\}$ определяются обычно методом градиентного спуска (или его модификаций) по функции потерь $\mathcal{L}(W)$. Для того, чтобы веса нейронов сети можно было обновлять итерационно путем широко применяемого «метода обратного распространения ошибки», требуется, чтобы функция активации была дифференцируемой (для некоторых функций активации значение производной в точках ее разрыва доопределяется).

Функции активации с настраиваемыми параметрами в нейронных сетях. В разных слоях могут применяться разные функции активации (например, в выходном слое функция активации часто отличается от других слоев). При этом в наиболее распространенных архитектурах нейросетей для каждого нейрона в одном слое используется одна и та же функция активации. Однако в современной практике считается, что целесообразно иметь настраиваемые функции активации. В литературе описаны функции активации в виде сигмоиды с параметром, полиномов, а также В-сплайнов и кубических сплайнов. Преимущество сплайнов в данном случае заключается в том, что сплайн «склеен» из различных многочленов на отрезках разбиения в области определения функции. И поэтому сплайн может гибко реагировать на изменения сигналов, передаваемых между узлами сети, путем изменения коэффициентов многочленов в процессе обучения. Например, если взвешенная сумма сигналов (\tilde{x}), принимаемых данным нейроном, увеличивается от итерации к итерации, то на конкретной итерации

обучения «подстроится» сплайн на том частичном отрезке области определения функции активации, в который попало значение \tilde{x} , так, чтобы минимизировать функцию потерь нейросети. То есть коэффициенты сплайнов становятся обучаемыми параметрами сети, как и веса нейронов. В этом случае можно эффективно использовать сети с меньшим количеством нейронов, чем при неизменяемых функциях активации.

Преимущества применения параболического ИД-сплайна в качестве функции активации в нейронных сетях. Параболические ИД-сплайны содержат три коэффициента многочлена на каждом отрезке, в отличие от четырех для традиционных кубических сплайнов [3]. Поскольку коэффициенты сплайна обновляются на каждой итерации обучения сети для каждого нейрона, применение в качестве функции активации параболического ИД-сплайна существенно уменьшит объем вычислений (по сравнению с использованием кубического сплайна, как предлагается в [5; 6]). В то же время параболические ИД-сплайны удовлетворяют требованию дифференцируемости и, при определенном указанном ниже способе вычисления коэффициентов, имеют непрерывную первую производную.

Рассмотрим механизм использования параболического ИД-сплайна как функции активации на примере простой нейросети – однослойного перцептрона (см. рис. 1). Выведенные формулы легко обобщаются на полносвязную нейронную сеть с любым числом нейронов в линейных слоях.

На рисунке 1 изображена нейросеть (однослойный перцептрон), на вход которой подаются векторы признаков объектов размерности $L: X_k = (x_{k1} \dots x_{kl} \dots x_{kL})$, и на выходе для каждого вектора X_k получается соответствующее значение y_k . Однослойный перцептрон, помимо входного слоя нейронов, содержит единственный нейрон, вычисляющий выходной сигнал $y_k = \varphi(\tilde{x}, F)$ как значение функции активации φ от линейной комбинации входных признаков с соответствующими весами:

$$\tilde{x}_k = w_0 + \sum_{l=1}^L x_{kl} \cdot w_l.$$
 В качестве φ возьмем параболический ИД-сплайн с коэффициентами, определяемыми параметрами, являющимися компонентами вектора F . (На вход нейрона с номером 0 входного слоя всегда подается значение $x_{k0} = 1$, чтобы в линейной комбинации присутствовало «смещение» w_0).

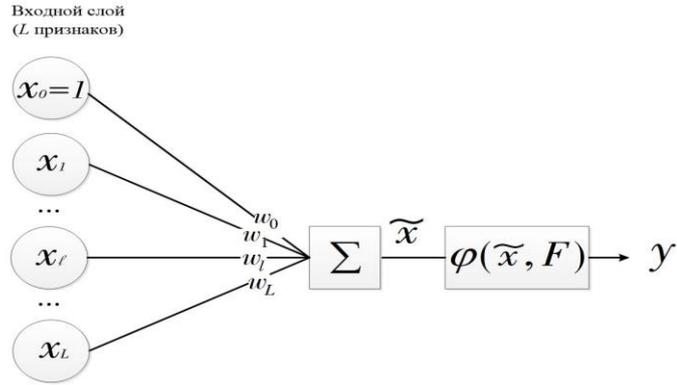


Рис. 1. Схема однослойного перцептрона

Формула i -го звена ($i=0, \dots, n-1$) параболического ИД-сплайна, приближающего функцию $f(x)$ на отрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$, где \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1} – узлы сетки $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_\theta$, имеет вид [1]:

$$S_{2\text{ИД},i}(x) = f_i + \left(\frac{6\nabla I_i^{i+1}}{\Delta \bar{x}_{i+1}^2} - \frac{2\Delta f_{i+1}}{\Delta \bar{x}_{i+1}} \right) (x - x_i) + \left(-\frac{6\nabla I_i^{i+1}}{\Delta \bar{x}_{i+1}^3} + \frac{3\Delta f_{i+1}}{\Delta \bar{x}_{i+1}^2} \right) (x - x_i)^2, \quad (1)$$

где $\Delta \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i$, $f_i \approx f(\bar{x}_i)$ – известные или вычисленные значения

функции $f(x)$ в узлах сетки, $I_i^{i+1} \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ – известные или

вычисленные значения интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$,

$\nabla I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i \Delta \bar{x}_{i+1}$, $\Delta f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$.

Обозначим:

$$u = \frac{x - \bar{x}_i}{\Delta \bar{x}_{i+1}}, \quad (2)$$

тогда $0 \leq u \leq 1$. Из (2) следует: $x - \bar{x}_i = u \cdot \Delta \bar{x}_{i+1}$.

После несложных преобразований из (1) и (2) получается:

$$S_{2\text{ИД},i}(u) = \frac{1}{\Delta \bar{x}_{i+1}} (-6u^2 + 6u) I_i^{i+1} + (3u^2 - 4u^2 + 1) f_i + (3u^2 - 2u) f_{i+1}, \quad (3)$$

$$S_{2\text{ИД}}(u) = \bigcup_{i=0}^{\theta-1} S_{2\text{ИД},i}(u). \quad (4)$$

Легко получить, что производная $S'_{2\text{ИД},i}(x)$ непрерывна на интервале $(\bar{x}_0, \bar{x}_\theta)$, если выполняется соотношение:

$$\frac{1}{\Delta \bar{x}_i} f_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{\Delta \bar{x}_i} + \frac{1}{\Delta \bar{x}_{i+1}} \right) f_i + \frac{1}{\Delta \bar{x}_{i+1}} f_{i+1} = 3 \left(\frac{I_i^{i+1}}{\Delta \bar{x}_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^i}{\Delta \bar{x}_i^2} \right), \quad i=1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в сочетании с граничными условиями решается методом прогонки. В [4] показано, что параметры f_i вычисляются из СЛАУ (5) с точностью $O(H^3)$ ($H = \max_{i=1, \dots, n} \Delta \bar{x}_i$), если $I_i^{i+1}, i=0, \dots, n-1$ известны точно или

вычислены с точностью не ниже $O(H^4)$ по квадратурным формулам (приведенным, например, в [4]).

Формулы «прямого» хода для нейросети с параболическим ИД-сплайном в качестве функции активации. Рассмотрим «прямой» ход нейросети, то есть получение выходных сигналов y_k по набору входных векторов X_k , состоящих из признаков объектов (см. рис. 1).

Пусть на вход нейросети подаются векторы признаков длины L из множества входных данных X^L . Тогда матрица, представляющая собой набор (так называемый батч) векторов, подаваемых на вход нейросети в течение одной итерации «прямого» хода (после которой выполняется «обратный» ход с обновлением параметров сети для минимизации значения функции потерь), имеет вид:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_k \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1l} & \dots & x_{1L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k1} & \dots & x_{kl} & \dots & x_{kL} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & \dots & x_{Nl} & \dots & x_{NL} \end{pmatrix}.$$

Здесь N – количество элементов выборки в батче, L – размерность каждого элемента выборки – вектора $X_k = (x_{k1} \dots x_{kl} \dots x_{kL})$, $k = 1, \dots, N$.

Возьмем сетку узлов сплайна с равномерным шагом $\Delta \bar{x} = const$.

Обозначим: $U^T = (u^2 \quad u \quad 1)$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \frac{I_i^{i+1}}{\Delta \bar{x}} \\ f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}$.

Тогда формула (3) преобразуется к виду: $S_{2ИД,i}(u) = U^T \cdot B \cdot F$.

Если взять в качестве функции активации φ сплайн $S_{2ИД}(u)$ (см. формулы 3, 4), то получим:

$$y_k = \varphi(\tilde{x}_k, F) = \varphi\left(\sum_{l=0}^L x_{kl} \cdot w_l, F\right) = U^T \cdot B \cdot F \Big|_{u=\tilde{u}_k = \frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_i}{\Delta \bar{x}_i}}, \quad (6)$$

где $i: \tilde{x}_k \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ ($\tilde{x}_k = \sum_{l=0}^L x_{kl} \cdot w_l, x_{k0} = 1$).

Возьмем квадратичную функцию потерь:

$$\mathcal{L}(W, F) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_k(W, F), \text{ где } \mathcal{L}_k(W, F) = \frac{1}{2} (y_k - y_k^{tgt}), W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_L \end{pmatrix},$$

где y_k – полученное значение выходного сигнала нейросети для входного вектора X_k , y_k^{tgt} – целевое (известное заранее) значение выходного сигнала нейросети для вектора X_k .

Перед «пропуском» через сеть первого батча данных необходимо инициализировать веса W и параметры F ИД-сплайна $S_{2ИД}(u)$ (выступающего в качестве функции активации).

В большинстве практических реализаций при инициализации применяется случайный подбор весов с равномерным распределением значений в интервале $(0, 1)$.

В качестве начальных значений функции активации (ИД-сплайна) в узлах сетки $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_\theta$ можно взять значения некоторой стандартной функции активации $a(x)$, подходящей для решаемой задачи (например, сигмоиды): $f_0 = a(\bar{x}_0)$, $f_1 = a(\bar{x}_1)$, ..., $f_\theta = a(\bar{x}_\theta)$. Рекомендуется добавить к 5% произвольно выбранных этих значений гауссовский случайный шум с распределением $\mathbb{N}(0, \sigma^2)$ с небольшим значением дисперсии σ^2 .

Тогда инициализируем значения интегралов на сетке $\bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_\theta$ по рекуррентной формуле (выведенной из условия непрерывности первой производной сплайна в узлах сетки: $S'_{2ИД,i-1}(\bar{x}_i) = S'_{2ИД,i}(\bar{x}_i)$ ($i = 1, \dots, \theta - 1$)), получающейся при $\Delta\bar{x} = const$ из формулы (5):

$$I_i^{i+1} = \frac{\Delta\bar{x}}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) - I_{i-1}^i \quad (i = 1, \dots, \theta - 1). \quad (7)$$

I_{i-1}^i для $i=1$ можно вычислить по правосторонней квадратурной формуле [4]:

$$I_{i-1}^i = \frac{\Delta\bar{x}}{12} (5f_{i-1} + 18f_i - f_{i+1}). \quad (8)$$

Интегралы, вычисленные по формулам (7) и (8), имеют порядок аппроксимации $O(H^4)$ [4].

Итерацией считается «пропускание» через сеть очередного батча

данных $\begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_k \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix}$ («прямой» ход) и последующее обновление весов W и

параметров F так, чтобы минимизировать значение $\mathcal{L}(W, F)$ («обратный» ход). Для минимизации $\mathcal{L}(W, F)$, в соответствии с традиционной технологией нахождения минимума функции потерь в нейросетях, будем использовать градиентный спуск. Найдем производные функции $\mathcal{L}(W, F)$ по всем весам w_l ($l = 0, \dots, L$) и по I_i^{i+1} . Остальные компоненты f_i и f_{i+1} вектора F можно вычислить по

значениям I_i^{i+1} , пользуясь, например, формулой (5) с краевыми условиями $f_{0(t)} = f_{0(t-1)}$, $f_{\theta(t)} = f_{\theta(t-1)}$, где t – номер итерации (нулевая итерация – инициализация W, F), в этом случае первая производная сплайна будет непрерывна. При вычислении производных по нижеследующим формулам на одной и той же итерации номер итерации будем опускать.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial w_l} = \frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial w_l} = \varepsilon_k \cdot \varphi'_x(\tilde{x}_k, F) \cdot x_{kl} = \varepsilon_k \left(\frac{1}{\Delta \bar{x}} U^T \cdot B \cdot F \Big|_{u=\tilde{u}_k=\frac{\tilde{x}_k-\bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}} \right) \cdot x_{kl} \quad (9)$$

(для $l = 0, 1, \dots, L$),

где $\varepsilon_k = \frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial y_k} = y_k - y_k^{tgt}$; $U^T = \frac{dU^T}{du} = (2u \ 1 \ 0)$ – вектор первых

производных компонентов вектора U^T ;

$$\varphi'_x(\tilde{x}_k, F) = \frac{\partial \varphi(x, F)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}_k} = \frac{1}{\Delta \bar{x}} U^T \cdot B \cdot F \Big|_{u=\tilde{u}_k=\frac{\tilde{x}_k-\bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}}, i: \tilde{x}_k \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}],$$

(поскольку $\frac{\partial y_k}{\partial w_l} = \frac{\partial \varphi(\tilde{x}_k, F)}{\partial w_l} = \frac{\partial \varphi(x, F)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}_k} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial w_l}$, $\frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial w_l} = x_{kl}$,

$$\frac{\partial \varphi(x, F)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}_k} = \frac{\partial S_{2ИД,i}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\tilde{u}_k=\frac{\tilde{x}_k-\bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \text{ здесь } i: \tilde{x}_k \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}],$$

$$\frac{\partial S_{2ИД,i}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\tilde{u}_k=\frac{\tilde{x}_k-\bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}} = U^T \cdot B \cdot F, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta \bar{x}}).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial I_i^{i+1}} = \frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial I_i^{i+1}} = \varepsilon_k \cdot \frac{6}{\Delta \bar{x}} (-\tilde{u}_k^2 + \tilde{u}_k), \quad (10)$$

где $\tilde{u}_k = \frac{\tilde{x}_k - \bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}$;

$i, i+1: \tilde{x}_k \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$

(поскольку $\frac{\partial y_k}{\partial I_i^{i+1}} = \frac{\partial \varphi(x, F)}{\partial I_i^{i+1}} \Big|_{x=\tilde{x}_k} = \frac{\partial S_{2ИД,i}(u)}{\partial I_i^{i+1}} \Big|_{u=\tilde{u}_k=\frac{\tilde{x}_k-\bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}} = \frac{1}{\Delta \bar{x}} (-6\tilde{u}_k^2 + 6\tilde{u}_k)$).

Формулы «обратного» хода для нейросети с параболическим ИД-сплайном в качестве функции активации. «Обратный» ход на итерации t будет выполняться по следующим формулам градиентного спуска (полученным с учетом соотношений (9) и (10)) :

$$w_{l(t)} = w_{l(t-1)} - \eta_w \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial w_l} = w_{l(t-1)} - \eta_w \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{k(t)} \cdot \varphi'_x(\tilde{x}_{k(t)}, F_{(t)}) \cdot x_{kl(t)}$$

(для $l = 0, 1, \dots, L$);

$$I_{i(t)}^{i+1} = I_{i(t-1)}^{i+1} - \eta_I \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}_k(W, F)}{\partial I_i^{i+1}} = I_{i(t)}^{i+1} - \eta_I \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_{k(t)} \cdot \frac{6}{\Delta \bar{x}} (-\tilde{u}_{k(t)}^2 + \tilde{u}_{k(t)})]$$

(для $\forall i, i+1: \tilde{x}_{k(t)} \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] (k = 1, \dots, N)$),

где η_w, η_l – коэффициенты «скорости обучения» для весов и для интегральных параметров сплайна соответственно;

$$\varepsilon_{k(t)} = y_k - y_k^{tgt}; \quad \varphi'_x(\tilde{x}_{k(t)}, F_{(t)}) = \frac{1}{\Delta \bar{x}} U^T \cdot B \cdot F_{(t)} \Big|_{u=\tilde{y}_k = \frac{\tilde{x}_{k(t)} - \bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}};$$

$$\tilde{y}_{k(t)} = \frac{\tilde{x}_{k(t)} - \bar{x}_i}{\Delta \bar{x}}; \quad i, i+1: \tilde{x}_{k(t)} \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \text{ (на итерации } t).$$

(Коэффициентам «скорости обучения» обычно сначала присваивается произвольное значение от 0,0001 до 0,01, и проводятся эксперименты по тренировке нейросети, в результате которых подбираются «вручную» значения этих коэффициентов так, чтобы сеть быстрее обучалась, отсутствовало «переобучение» (когда сеть показывает хороший результат при тренировке и плохой на тестовых данных), меньше было итоговое значение функции потерь на тестовых данных).

Таким образом, на итерации t при «обратном» ходе обновятся значения I_i^{i+1} на отрезках разбиения, в которые «попали» \tilde{x}_k (k – номер вектора в батче входных векторов признаков). Для остальных отрезков разбиения $I_{i(t)}^{i+1} = I_{i(t-1)}^{i+1}$.

Затем по значениям $I_{i(t)}^{i+1}$ нужно вычислить компоненты $f_{i(t)}, f_{i+1(t)}$ вектора $F_{(t)}$, например, по формуле (5) методом прогонки, добавив краевые условия $f_{0(t)} = f_{0(t-1)}, f_{\theta(t)} = f_{\theta(t-1)}$ (тогда первая производная сплайна будет непрерывной).

Выводы. В статье приведен способ применения разработанных авторами параболических ИД-сплайнов в качестве функций активации в полносвязных нейронных сетях на примере однослойного перцептрона. Выведены соотношения для получения выходного сигнала нейросети по входному набору признаков объекта, а также для обновления параметров сети – весов связей нейронов и коэффициентов сплайновой функции активации с целью минимизации функции потерь (характеризующей расхождение между полученным и целевым значением выходного сигнала). Указано, что настраиваемая функция активации позволит ускорить процесс обучения сети, при этом использование параболического ИД-сплайна, по сравнению с традиционным кубическим дифференциальным сплайном, существенно уменьшит объем вычислений.

Литература

1. Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М., Синицин В.И. Интегродифференциальные сплайны и их применение в прикладных задачах анализа данных в территориально-распределенных информационных системах // Тезисы докладов на XII Международной научной конференции «Системы компьютерной

математики и их приложения» (СКМП-2011). – Смоленск, Изд-во. СмолГУ, 2011. – С. 82-84.

2. Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И. Интегро-дифференциальные многочлены и сплайны произвольной четной степени в задачах анализа параметров функционирования распределенных информационных систем // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2012): материалы XIII международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Э.И. Зверовича. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – Вып.13. –С. 67–72.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980. – 350 с.

4. Киреев В.И., Бирюкова Т.К. Интегродифференциальный метод обработки информации и его применение в численном анализе. – М.: ИПИ РАН, 2014. – 267 с.

5. Simone Scardapane, Michele Scarpiniti, Danilo Comminiello, and Aurelio Uncini. Learning activation functions from data using cubic spline interpolation. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1605.05509.pdf> , 2017. 10.

6. Samy Sadek, Ayoub Al-Hamadi, Bernd Michaelis, Usama Sayed. Image Retrieval Using Cubic Splines Neural Networks // International Journal of Video & Image Processing and Network Security IJVIPNS-IJENS. – Vol. 09, No10. – P. 5-9.

T.K. Biryukova¹, M.M. Gershkovich², V.I. Kireev³

^{1,2}The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences

³ MISIS National University of Science and Technology

INTEGRAL-DIFFERENTIAL SPLINES AS A NEURAL NETWORK ACTIVATION FUNCTION FOR SINGLE LAYER PERCEPTRON

Keywords: *spline neural network; spline activation function; integrodifferential spline; integro-differential spline; parabolic spline.*

Abstract. *We describe the innovational parabolic integro-differential splines (ID-splines) and propose their potential application as an activation functions in neural networks. In this case additionally to neuronal links weights, parameters of ID-spline are educable. It accelerates neural network training and potentially decreases the number of neurons without loss of prediction accuracy.*

We have deduced the output signal formula for single layer perceptron with ID-spline activation function and the back propagation error formulas for calculation of network parameters, minimizing a loss function.

Deduced formulas may easily be generalized for fully connected neural network consisting of any number of layers and neurons.

ИНЦИДЕНТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Ключевые слова: *аффинные инцидентностные структуры (AI-структуры); трансляции AI-структур; П-транзитивные AI-структуры.*

Для инцидентностных структур предложен новый класс задач.

Пусть инцидентностная структура $S' = \langle P, L'; I', \parallel' \rangle$ является моделью предметной области V' . Если в V' поместить дополнительный объект, то в S' изменятся множество прямых L' ; отношение инцидентности I' , отношение параллельности \parallel' . Определить свойства новой инцидентностной структуры $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$. В качестве примера рассмотрено решение задачи для евклидовой плоскости с дополнительным объектом «прямая».

Изучая геометрию, мы часто в качестве типичной предметной области выбираем реальный мир, в котором точки представляются очень малыми неделимыми объектами (по Евклиду: «Точка есть то, часть чего есть ничто»), а прямые ассоциируются с лучами света.

Исходя из такого интуитивного представления о реальном мире, Евклид описал геометрию этого мира, впоследствии названную евклидовой геометрией.

В качестве основных объектов Евклид выделил множество точек P , множество прямых L' , отношение инцидентности I' , отношение параллельности \parallel' , а затем описал в аксиомах свойства взаимосвязей между указанными объектами.

Таким образом, была выделена некоторая структура инцидентности с параллельностью

$$E = \langle P, L'; I', \parallel' \rangle.$$

Отметим, что прямые из множество L' не состоят из точек, точки находятся с прямыми в отношении инцидентности.

Если в предметную область поместить некоторый объект, например прямоугольную пластинку, то набор прямых (набор лучей света) изменится. Также изменятся отношения инцидентности I' и параллельности \parallel' .

С преломлением света при его прохождении через границу раздела двух сред мы познакомились в курсе физики средней школы (на примере прохождения света через границу воздуха и воды).

В работе мы формулируем задачу об изменении инцидентной структуры $S' = \langle P, L'; I', ||' \rangle$ при замене множества прямых L' на другое множество прямых L и иллюстрируем ее решение на конкретном примере.

Ниже мы будем обсуждать только предметные области V' , в которых прямые ассоциируются с лучами света. Если в такую область V' поместить любой объект Ob , изменяющий траектории лучей света, оптические свойства новой области V могут существенно измениться. Интерес представляет задача определения, каким образом изменятся геометрические (оптические) свойства модели $S = \langle P, L; I, || \rangle$ новой предметной области V .

Представляется также важной обратная задача: какие объекты следует поместить в предметную область V' , чтобы получить новую предметную область V с заданными геометрическими (оптическими) свойствами.

В качестве объектов, добавляемых в предметную область, могут использоваться объекты:

- имеющие различную форму;
- обладающие различными оптическими свойствами;
- пропускающие, зеркально отражающие или полностью поглощающие свет;
- обладающие массой, влияющей на траекторию луча света.

В работе мы проиллюстрируем метод построения новой инцидентной структуры с параллельностью на примере добавления в евклидову плоскость прямой M' , преломляющей все пересекающие M' прямые.

Пусть предметная область E – евклидова плоскость, инцидентная структура с параллельностью $S' = \langle P, L'; I', ||' \rangle$ – математическая модель плоскости E , $A = \langle A; T', 0', 1' \rangle$ – ассоциированная со структурой S' алгебра типа $\langle 3; 0, 0 \rangle$, координатизирующая структуру S' .

Замечание 1. Так как алгебра $A = \langle A; T', 0', 1' \rangle$ ассоциирована с евклидовой плоскостью, то для нее выполняется ряд свойств:

- 1) $T'(a, b, c) = ab + c$;
- 2) $\langle A; +, \cdot, 0', 1' \rangle$ – поле,

где

$$a \cdot b = T(a, b, 0');$$

$$a + b = T'(1', a, b).$$

Выберем в S' произвольную прямую M' . Без ограничения общности можно считать, что в качестве прямой M' выбрана прямая с уравнением $x = 0'$. Зафиксируем элемент $k > 0'$ и каждую прямую с уравнением $y = T'(m, x, b)$ заменим прямой $y = T(m, x, b)$, где

$$T(m, x, b) = \begin{cases} T'(m, x, b), & \text{если } x \leq 0'; \\ T'(km, x, b), & \text{если } x > 0'. \end{cases}$$

Заметим, что для евклидовой плоскости

$$T(m, x, b) = \begin{cases} mx + b, & \text{если } x \leq 0'; \\ (km)x + b, & \text{если } x > 0'; \end{cases}$$

Таким образом, геометрически указанное преобразование каждую прямую $y = mx + b$ преломляет при пересечении с прямой $x = 0'$, умножая угловой коэффициент m на k (рис. 1).

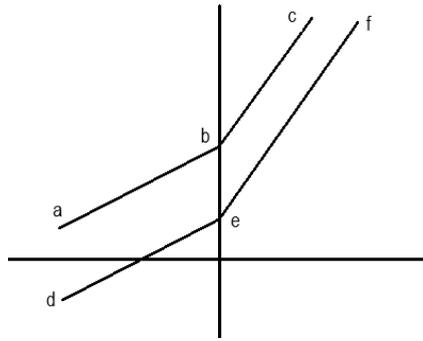


Рис. 1. Преломление прямых относительно оси Oy

После замены всех прямых указанным способом возникает новая инцидентностная структура $S = \langle P, L; I \rangle$. Определим в S отношение параллельности следующим образом:

$$x = a \parallel x = b \text{ при любых } a \text{ и } b.$$

$$y = T(m, x, b) \parallel y = T(n, x, c) \text{ тогда и только тогда, когда } m = n.$$

После добавления в S отношения параллельности получаем инцидентностную структуру с параллельностью $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$.

Исследуем свойства новой структуры S .

Свойство 1. Структура $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ является аффинной плоскостью.

Для доказательства достаточно проверить выполнение в S всех аксиом аффинной плоскости.

Покажем сначала, что через две различные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ структуры S проходит точно одна прямая.

Если $x_1 = x_2$, то такой прямой служит прямая $x = x_1$.

Пусть теперь $x_1 \neq x_2$ и

1) $x_1 \leq 0$ и $x_2 \leq 0$. В S' существует единственная прямая $y = T'(m, x, b)$, проходящая через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

$$y_1 = T'(m, x_1, b) \text{ и } y_2 = T'(m, x_2, b).$$

Таким образом,

$$y_1 = T'(m, x_1, b) \text{ и } y_2 = T'(m, x_2, b).$$

Следовательно, прямая $y = T(m, x, b)$ является единственной прямой в S , проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$;

2) $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. В S' существует единственная прямая $y = T'(m, x, b)$, проходящая через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

$$y_1 = T'(m, x_1, b) \text{ и } y_2 = T'(m, x_2, b).$$

Таким образом,

$$y_1 = T'(k^{-1}m, x_1, b) \text{ и } y_2 = T'(k^{-1}m, x_2, b).$$

Следовательно, прямая $y = T(k^{-1}m, x, b)$ является единственной прямой в S , проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$;

3) $x_1 \leq 0$ и $x_2 > 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = T(m, x_1, b), \\ y_2 = T(m, x_2, b). \end{cases}$$

При указанных ограничениях рассматриваемая система равносильна системе

$$\begin{cases} y_1 = T'(m, x_1, b), \\ y_2 = T'(km, x_2, b). \end{cases}$$

Учитывая замечание 1, получаем систему

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + b, \\ y_2 = kmx_2 + b, \end{cases}$$

однозначно определяющую пару элементов m и b .

Следовательно, прямая $y = T(m, x, b)$ является единственной прямой в S , проходящей через точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Проверка остальных аксиом аффинной плоскости выполняется аналогично.

Свойство 2. *Аффинная плоскость $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ является $\Pi_{x=0}$ -транзитивной.*

Действительно, отображение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\alpha_1 : (x, y) \rightarrow (x, y + c),$$

$$\alpha_2 : y = T(m, x, b) \rightarrow y = T(m, x, b + c),$$

$$\alpha_2 : x = b \rightarrow x = b$$

является параллельным переносом.

Этот факт легко проверяется, если доказательство проводить в два этапа: для $x \leq 0$ и для $x > 0$.

Свойство 3. *В алгебре $A = \langle A; T, 0, 1 \rangle$, ассоциированной с аффинной плоскостью S , выполняются свойства:*

$$1) T(a, b, c) = ab + c;$$

2) $\langle A; + \rangle$ – группа.

Доказательство следует из [1, теорема 1].

Свойство 4. В аффинной плоскости S не существует коллинеаций, переводящих точку, инцидентную прямой $x = 0$, в точку не инцидентную этой прямой.

Доказательство следует из того, что при любой коллинеации образом точки преломления прямой является точка преломления.

На этом мы заканчиваем исследование свойств новой инцидентностной структуры с параллельностью, возникшей из евклидовой плоскости E после помещения в E некоторого объекта с заданным оптическим свойством (методом преломления).

В заключение отметим: знание геометрии предметных областей может понадобиться при исследовании различных виртуальных миров. Размещая в виртуальных мирах различные объекты, можно изменять геометрию (оптические свойства) этих миров.

Можно, например, исследовать, как изменятся оптические свойства озера, если на его поверхность попадет пятно какой-либо жидкости, предсказать действия, необходимые для изменения геометрии новой предметной области.

Литература

1. Емельченков Е. П. Π -транзитивные AE -структуры // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. – Вып. 15. – С. 143-146.

Е.Р. Emelchenkov

Smolensk State University

INCIDENCE STRUCTURES WITH ADDITIONAL OBJECTS

Keywords: *affine incidence structures (AI-structures); translations of AI-structures; Π -transitive AI-structures.*

Abstract. *A new class of problems is proposed for incident structures.*

Let the incidence structure $S' = \langle P, L'; I', \parallel' \rangle$ is a model of subject domain of V' . If an additional object is placed in V' , then in S' the set of lines L' , incidence relation I' , parallelism relation \parallel' will change. It's necessary to the properties of the new incidence structure $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$.

As an example, we consider the solution of the problem for the Euclidean plane with the additional object «line».

О ПРИМЕНЕНИИ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ключевые слова: *моделирование; регрессия; вспомогательные точки; вариационный вывод; стохастическая оптимизация; ядровая функция; гауссовские процессы; нейронные сети; классификация изображений.*

В данной статье рассматриваются современные методы получения точных прогнозов путем изучения богатых статистических представлений, для чего используются так называемые гауссовские процессы, позволяющие реализовать значительное число моделей, решающих задачи регрессии, классификации и понижения размерности. В работе рассматривается и применяется метод TT-GP с нейронными сетями в качестве ядровых функций гауссовских процессов. Данный подход показал свою эффективность перед имеющимися алгоритмами на наборе рукописных цифр MNIST и наборе CIFAR10.

История возникновения и развития некоторых методов решения задач с большими выборками. Стандартные методы на основе гауссовских процессов имеют кубическую сложность от размера выборки, что затрудняет их применение на больших объемах данных. Начиная с 2000-х годов ведутся разработки приближенных схем для обучения моделей гауссовских процессов. Метод на основе вспомогательных точек позволил применить гауссовские процессы к задачам с большими выборками. В работе [1] предлагается трактовать значения гауссовского процесса в вспомогательных точках как латентные переменные и осуществлять настройку модели с помощью вариационного вывода. Этот подход получил развитие в [2] и [3], где был предложен метод настройки модели с помощью стохастической оптимизации и обобщения метода на задачу классификации.

Также ведутся исследования в области построения экспрессивных ядровых функций для гауссовских процессов [4], в том числе с применением глубоких нейронных сетей [5]. С помощью таких функций удается успешно применять модели на основе гауссовских процессов к данным высокой размерности (в том числе к изображениям).

Предлагается использовать метод TT-GP, описанный в [6], основанный на стохастическом вариационном выводе для модели со вспомогательными точками, построении ядровой функции на основе

нейронной сети и тензорном разложении Tensor Train [7]. Данный метод позволяет использовать огромное количество вспомогательных точек, за счет чего удается эффективно решать задачи классификации изображений и компьютерного зрения, для которых существующие методы неприменимы или дают низкое качество.

Модель гауссовских процессов. Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times D}$ – признаки описания объектов обучающей выборки, где D – размерность признакового пространства, а $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \{1, 2, \dots, C\}^n$ – значения целевой переменной, где $C \in \mathbb{N}$.

Пусть имеется C гауссовских процессов, действующих из пространства признаков \mathbb{R}^D . Каждый процесс соответствует своему классу. Вспомогательные точки Z разместим на многомерной сетке в признаковом пространстве и сделаем общими для всех процессов. Для каждого класса k имеется свой набор скрытых переменных – значения процесса в точках обучающей выборки $f^k \in \mathbb{R}^n$ и во вспомогательных точках $u^k \in \mathbb{R}^m$.

В качестве распределения $p(y_i | f_i^{1..C})$ возьмем дискретное распределение с вероятностями

$$p(y = c | f^{1..C}) = \frac{\exp(f^k)}{\sum_{j=1}^C \exp(f^j)}, k = 1, 2, \dots, C.$$

Вариационное распределение будем искать в факторизованном по процессам виде:

$$q(f^1, f^2, \dots, f^C, u^1, u^2, \dots, u^C) = q(f^1, u^1) \cdot q(f^2, u^2) \cdot \dots \cdot q(f^C, u^C),$$

где

$$q(f^k, u^k) = p(f^k | u^k) N(u^k | \mu^k, \Sigma^k), k = 1, 2, \dots, C,$$

где Σ^k – ковариационная матрица процесса k .

Получим вариационную нижнюю оценку для $\ln p(y)$:

$$\ln p(y) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{q(f_i^{1..C})} \ln(p(y_i | f_i^{1..C})) - \sum_{k=1}^C KL(q(u^k) || p(u^k)). \quad (1)$$

Вычитаемое в (1) вычисляется аналитически, как сумма дивергенций Кульбака – Лейблера [8] между нормальными распределениями. Уменьшаемое не может быть вычислено аналитически. Пусть объект y_i имеет класс k . Тогда можно переписать

$$\mathbb{E}_{q(f_i^{1..C})} \ln(p(y_i | f_i^{1..C})) = \mathbb{E}_{q(f_i^k)} f_i^k - \mathbb{E}_{q(f_i^{1..C})} \ln\left(\sum_{j=1}^C \exp f_i^j\right), \quad (2)$$

где $q(f_i^{1..C}) = q(f_i^1) \cdot q(f_i^2) \cdot \dots \cdot q(f_i^C)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и все распределения $q(f_i^k)$ нормальные. Уменьшаемое в (2) можно вычислить аналитически.

Рассмотрим вычитаемое. Очевидно, необходимо оценить сверху функционал

$$E_{q(f_i^{1..c})} \ln\left(\sum_{j=1}^c \exp(f_i^j)\right), q(f_i^j) = N(f_i^j | m_j, s_j^2). \quad (3)$$

И такие оценки давно получены, в частности, в работе [8] дается несколько оценок функционала вида (3). Приведем одну из них, которая используется в модели, рассматриваемой в данной статье.

Воспользовавшись выпуклостью логарифма, можно выписать его линейризацию в точке $\frac{1}{\varphi}$:

$$\ln\left(\sum_{j=1}^c \exp(f_i^j)\right) \leq \ln \frac{1}{\varphi} + \varphi \left(\sum_{j=1}^c \exp(f_i^j) - \frac{1}{\varphi}\right) = \varphi \sum_{j=1}^c \exp(f_i^j) - \ln \varphi - 1.$$

Взяв математическое ожидание по распределению $q(f^{1..c})$ и максимизировав результат по φ , получим:

$$E_{q(f^{1..c})} \ln\left(\sum_{j=1}^c \exp(f_i^j)\right) \leq \ln\left(\sum_{j=1}^c \exp\left(m_j + \frac{1}{2} s_j^2\right)\right).$$

Подставляя полученную оценку в (1), получим нижнюю оценку на правдоподобие в замкнутом виде.

Аппроксимация ядровых функций гауссовских процессов нейронными сетями. В задачах компьютерного зрения (а также обработки звука и видео) евклидово расстояние является не лучшей метрикой для сравнения объектов в признаковом пространстве [12]. Предлагается строить экспрессивные ядровые функции гауссовских процессов на основе нейронных сетей. Данный подход применен в работе [6] при описании метода SV-DKL. В SV-DKL используются одномерные гауссовские процессы, обученные на нейронах последнего слоя нейронной сети, так как авторы взяли за основу метод KISS-GP и не могли обучать многомерные гауссовские процессы. Однако есть реальная возможность обучать многомерные гауссовские процессы, используя все выходы нейронной сети в качестве признаков.

Рассмотрим некоторое параметрическое преобразование

$$\varphi(\cdot, \eta) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

где η — вектор значений параметров. Пусть задана ковариационная функция $k(\cdot, \cdot)$. Тогда можно определить новое ядро

$$k_\varphi(x, x') = k(\varphi(x, \eta), \varphi(x', \eta)).$$

В качестве преобразования φ возьмем нейронную сеть. Параметры построенного таким образом ядра (параметры θ исходной ковариационной функции $k(\cdot, \cdot)$ и n) можно настраивать с помощью максимизации оценки на обоснованность. При этом φ будет выучивать

подходящее представление для данных из обучающей выборки, а непосредственно предсказание будет осуществлять гауссовский процесс.

Пример применения. Для проверки эффективности описанной модели были взяты два набора изображений: CIFAR10 [9] и MNIST [10].

Набор данных MNIST состоит из 60 тыс. черно-белых изображений рукописных цифр 28x28 пикселей. Тестовая выборка состоит из 10 тысяч объектов. Для обучения представления на этом наборе использовалась нейронная сеть с двумя сверточными и двумя полносвязными слоями (32 и 64 фильтра в сверточных слоях, 1024 и 4 нейрона в полносвязных слоях). Решалась задача классификации на 10 классов. Набор данных CIFAR10 содержит 50 тысяч цветных изображений 32x32 пикселей, относящихся к 10 классам. Для обучения представления данных в эксперименте с CIFAR10 использовалась нейронная сеть с шестью сверточными слоями и двумя полносвязными слоями (соответственно 128, 128, 256, 256, 256, 256 фильтров в сверточных слоях; 1536, 512 и 7 нейронов в полносвязных слоях).

В реализованном методе DNN-TT-GP была выбрана более удачная архитектура сети, чем в методе SV-DKL, предложенном в работе [6], за счет чего удалось добиться лучшего результата на наборе данных CIFAR10.

В качестве DNN использовались нейронные сети, обучающие представления в ядре гауссовского процесса в методе DNN-TT-GP, только последний слой в этих сетях с числом нейронов d , равным размерности получаемого представления, был заменен на линейный слой с числом выходов, равным числу классов, после чего обучили нейронные сети стандартными методами.

Результаты эксперимента приведены в таблице 1. Данные таблицы показывают, что метод TT-GP успешно решает поставленные задачи. На обоих наборах данных удалось получить качество выше, чем для любой другой модели на основе гауссовских процессов, рассмотренной в [11].

Таблица 1.

Эксперименты на задачах классификации изображений

Набор данных	Точность предсказания на тестовой выборке		
	SV-DKL	DNN	DNN-TT-GP
MNIST ($n = 60000$, $d = 784$)	0.9919	0.993	0.994
CIFAR10 ($n = 50000$, $d = 3072$)	0.7704	0.91	0.92

Литература

1. Titsias M.K. Variational Learning of Inducing Variables in Sparse Gaussian Processes // Journal of Machine Learning Research W & CP. – 2009. – Vol. 5. – P. 567–574.

2. Hensman J., Fusi N., Lawrence N. Gaussian Processes for Big Data // Uncertainty in Artificial Intelligence. – 2013.
3. Hensman J., Matthews A., Ghahramani Z. Scalable Variational Gaussian Process Classification // Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS). — 2015.
4. Wilson A.G., Adams R.P. Gaussian process kernels for pattern discovery and extrapolation // International Conference on Machine Learning (ICML). – 2013.
5. Stochastic Variational Deep Learning / A. Wilson, Z. Hu, R. Salakhutdinov, E. Xing // Neural Information Processing Systems (NIPS). – 2016.
6. Oseledets I.V. Tensor-Train decomposition // SIAM J. Scientific Computing. – 2011. – Vol. 33, No. 5. – P. 2295–2317.
7. Bouchard Guillaume. Efficient bounds for the softmax function and applications to approximate inference in hybrid models // NIPS 2007 workshop for approximate Bayesian inference in continuous/hybrid systems. – 2007.
8. Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // The Annals of Mathematical Statistics. –1951. – V.22, № 1. – P. 79–86.
9. Krizhevsky A. The CIFAR-10 and CIFAR-100 Datasets. – URL: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>.
10. LeCun Ya., Cortes C., Burges Ch.J.C. The MNIST DATABASE of handwritten digits. – URL: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.
11. Wilson A. G., Nickisch H. Kernel interpolation for scalable structured Gaussian processes (KISS-GP) // International Conference on Machine Learning (ICML). – 2015.
12. Кадури́н А., Архангельская Е., Николенко С. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. – СПб.: Питер, 2018. – 480 с.

R.A. Zakharov
Smolensk State University

ON THE APPLICATION OF GAUSSIAN PROCESSES IN CLASSIFICATION OF IMAGES

Keywords: *modeling; regression; auxiliary points; variational conclusion; stochastic optimization; sound function; Gaussian processes; neural networks; classification of images.*

Abstract. *This article discusses modern methods for obtaining accurate forecasts by studying rich statistical representations, for which the so-called Gaussian processes are used, which allow implementing a significant number of models that solve the problems of regression, classification and lowering of dimension. The paper considers and applies the TT-GP method with neural networks as the core functions of Gaussian processes. This approach has shown its effectiveness over existing algorithms on the handwritten digit set MNIST and the set CIFAR10.*

ФУНКЦИЯ СУММЫ ЦИФР НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, ЗАДАННАЯ НА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Ключевые слова: натуральное число; функция суммы цифр; значение функции на членах арифметической прогрессии.

В данной статье продолжаются исследования, начатые автором в [1]. Рассматриваются свойства функции суммы цифр натурального числа на натуральных арифметических прогрессиях.

Обозначим через $S(n)$ функцию, сопоставляющую натуральному числу n сумму цифр в его десятичной записи; договоримся также считать $S(0) = 0$.

Утверждение 1. Пусть

$$a_n = a_0 + nd, \quad (1)$$

$$b_k = S(a_0) + kd, \quad (2)$$

где $a_0, d \in N; n, k = 0, 1, 2, \dots$

Тогда для любого b_k из (2) найдется такое a_n из (1), что $S(a_n) = b_k$.

Доказательство. Возьмем $b_k = S(a_0) + kd$ и зафиксируем k . Обозначим $kd = c$. По утверждению 5 из [1] уравнение $S(xd) = d$ разрешимо в натуральных числах (при любом натуральном d). Поэтому найдется $m_0 \in N$, такое, что $S(m_0c) = c$. Пусть еще $m = m_0 \cdot 10^r$, где r – количество знаков числа a_0 . Тогда $a_n = a_0 + mc = a_0 + 10^r m_0 kd$ – член последовательности (1) (здесь $n = 10^r m_0 k$), а $S(a_n) = S(a_0 + mc) = S(a_0) + S(mc) = S(a_0) + S(m_0c) = S(a_0) + c = S(a_0) + kd = b_k$.

Замечание 1. В качестве m можно взять число $m_0 \cdot 10^p$, где $p \geq r$. Следовательно, в последовательности (1) бесконечно много чисел, на которых функция S принимает одно и то же значение b_k .

Замечание 2. Последовательность (арифметическая прогрессия) (2) получается из (1) сдвигом на $a_0 - S(a_0)$. В частности, если a_0 – цифра, то $S(a_0) = a_0$ и последовательности (1), (2) совпадают. Если $d = 9$, то при любом a_0 последовательность (1) получается из (2) отбрасыванием нескольких первых членов или (1) и (2) совпадают (так как a_0 и $S(a_0)$ при делении на 9 имеют одинаковые остатки – утверждение 1 из [1]).

Пример 1. Пусть $a_n = 2020 + 673n, n = 0, 1, 2, \dots$. Найдем в этой последовательности такое число a_n , что $S(a_n) = 2023$.

Рассмотрим последовательность $b_k = 4 + 673k = S(a_0) + 673k$. При $k = 3b_k = 2023$.

Воспользуемся доказательством утверждения 1. $c = kd = 3 \cdot 673 = 2019$.

Решим уравнение $S(m_0c) = c \Leftrightarrow S(2019m_0) = 2019$. Решение приведено в [1]. Пусть A – 223-значное число: $A = 99\dots9$, тогда $m_0 = A \cdot 10^4 + 1 = 99\dots90001, m = m_0 \cdot 10^4$. Значит,

$$a_n = 2020 + 2019m = 2020 + 2019 \cdot 99\dots900010000.$$

Утверждение 2. Пусть

$$a_n = a_0 + nd, \quad (3)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, n$ и $d \leq 9$.

Для любого a_n из последовательности (3) найдется a_m в этой же последовательности, такое, что $S(a_m) = a_n$.

Доказательство. Если $a_0 < 10$, то последовательности (1), (2), (3) совпадают. Тогда по утверждению (1) для любого a_n из (3) найдется такое a_m из (3), что $S(a_m) = a_n$.

Пусть $a_0 \geq 10$. Тогда $a_0 = md + b_0, b_0 \leq 9$. Присоединим к последовательности (3) m первых членов $b_0, b_0 + d, \dots, b_0 + (m-1)d$. Получим новую последовательность

$$c_k = b_0 + kd, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Последовательность (4) совпадает с последовательностью $S(b_0) + kd$. По утверждению (1) для любого c_k из (4) найдется c_m в (4), такой что $S(c_m) = c_k$. В частности, для любого a_n из (3) найдется c_m в (4) такой, что $S(c_m) = a_n$. А так как $S(c_m) \leq c_m$, то $a_n \leq c_m$. И c_m – член последовательности (3).

Пример 2. Пусть $a_n = 2020 + 3n, n = 0, 1, 2, \dots$. Найдем в этой последовательности такое число a_n , что $S(a_n) = 2020$.

Рассмотрим последовательность $c_k = 1 + 3k, k = 0, 1, 2, \dots$, содержащую последовательность $\{a_n\}$. При $k = 673$ $c_k = 2020$. Воспользуемся доказательством утверждения 1. $c = kd = 673 \cdot 3 = 2019$. Решим уравнение $S(m_0c) = c \cdot m_0 = 99\dots90001$ (см. пример 1); $m = m_0 \cdot 10$. Тогда $c_n = 1 + 2019 \cdot m = 1 + 2019 \cdot 99\dots99\dots900010 \in \{a_n\}$.

Рассмотрим несколько задач, иллюстрирующих приведенные утверждения.

Задача 1. Может ли хотя бы для одного числа $a_n = 7 + 9n, n = 0, 1, 2, \dots$, сумма цифр равняться 322?

Решение. Число $322 = a_{35}$ принадлежит последовательности. Тогда по утверждению (2) в этой же последовательности найдется такое a_n , что $S(a_n) = 322$.

Обозначим через $N_p, p = 0, 1, \dots, 8$, класс неотрицательных целых чисел, дающих при делении на 9 остаток p . Очевидно, $N_p = \{p + 9n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Замечание 3. Приведем другое решение задачи 1. Последовательность $\{a_n\}$ – класс $N_7, 322 \in N_7$. Любое натуральное число a такое, что $S(a) = 322$, также принадлежит N_7 , так как a и $S(a)$ при делении на 9 дают один и тот же остаток 7. (Например, $a = 11\dots 1$, где количество единиц равно 322).

Задача 2. Покажите, что на последовательности $a_n = a_0 + 9n, n = 0, 1, 2, \dots$, функция S принимает каждое значение бесконечно много раз.

Решение. Рассмотрим последовательность (4) $c_k = b_0 + (m - 1)d$ из доказательства утверждения 2. Очевидно, $\{c_k\} = N_{b_0}, \{a_n\} \subset \{c_k\}$. Для любого n $S(a_n) \in N_{b_0}$. Пусть $S(a_m) = c_k$. По замечанию 1 к утверждению 1 S может принимать значение c_k бесконечное число раз на последовательности $\{c_n\}$, а значит, и на $\{a_n\}$.

Замечание 4. Приведем другое решение задачи 2. Пусть $S(a_0 + 9m) = k$, тогда $S((a_0 + 9m) \cdot 10^p) = k$ ($p \in N$). Но $(a_0 + 9m) \cdot 10^p = a_0 \cdot 10^p + 9m \cdot 10^p = a_0 99\dots 9 + a_0 + 9m \cdot 10^p = a_0 + 9(a_0 11\dots 1 + m \cdot 10^p) \in \{a_n\}$

Задача 3. Может ли множество значений функции S на некоторой арифметической прогрессии быть объединением нескольких классов N_p (но не всех)?

Ответ: да.

Решение. Приведем пример.

$$a_n = 1 + 3n, n = 0, 1, 2, \dots \quad \{a_n\} = N_1 \cup N_4 \cup N_7.$$

По утверждению 2 для любого $a_n \in N_p$ существует $a_m \in N_p$ такое, что $S(a_m) = a_n$.

Таким образом, функция S на классе N_p может принимать любое значение из N_p и только из N_p (так как для $a_n \in N_p$ $S(a_n) \in N_p$). Следовательно, функция S класс N_p отображает на N_p . Таким образом, множество значений функции S на $\{a_n\}$ также есть $N_1 \cup N_4 \cup N_7$.

Утверждение 3. На каждой из арифметических прогрессий $a_n = a_0 + nd, n = 0, 1, 2, \dots$ при $d \in \{2, 4, 5, 8, 10\}$ функция S принимает каждое натуральное значение $k \geq S(a_0)$, причем бесконечно много раз.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k > S(a_0)$ и составим число t следующим образом. Запишем число $a_0 = t_1 \dots t_p$, левее – два нуля, а ещё левее – любое число b , для которого $S(b) = k - S(a_0)$ (например, $k - S(a_0)$ штук единиц). Очевидно, $S(m) = k - S(a_0) + S(a_0) = k$.

У числа $m - a_0$ не меньше трех нулей справа. Следовательно, $m - a_0$ делится на любое $d \in \{2, 4, 5, 8, 10\}$, то есть $m - a_0 = m_1 d$, $m_1 \in N$, и $m = a_0 + m_1 d \in \{a_n\}$. Число нулей между a_0 и b в записи числа m можно брать любым большим двух. Следовательно, таких m , для которых $S(m) = k$ и $m \in \{a_n\}$, бесконечно много.

Пусть теперь $k = S(a_0)$. Рассмотрим наряду с данной последовательностью $\{a_n\}$ последовательность $b_m = S(a_0) + md$. По утверждению 1 и соответствующему замечанию 1 для любого b_m , в том числе и для $S(a_0)$, найдется бесконечно много чисел в исходной последовательности, таких, что $S(a_n) = S(a_0) = k$.

Замечание 5. Если $a_0 = 1$, то из утверждения 3 следует, что на последовательности $a_n = 1 + nd$, $d \in \{2, 4, 5, 8, 10\}$ функция S принимает любое натуральное значение, причем бесконечно много раз.

Замечание 6. Случай $d = 1$ также можно включить в утверждение 3 (это сразу следует из утверждения 2 и замечания 1 к утверждению 1). Но тогда в этом утверждении на последовательности $a_n = a_0 + n$ функция S принимает любое значение $k \geq S(a_0)$. А в данном случае условие $k \geq S(a_0)$ можно опустить. Действительно, в числе вида $m = 11\dots 100\dots 0$, где k штук единиц, количество нулей всегда можно подобрать так, что m будет больше a_0 . Тогда при любом $k \in N$ $S(m) = k$, и $m \in \{a_n\}$.

Задача 4. Пусть $a_n = 2020 + 8n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для любого натурального $k \geq 4$ укажите член последовательности такой, что сумма цифр в его десятичной записи равна k .

Решение. Воспользуемся доказательством утверждения 3. Зафиксируем $k > 4 = S(a_0)$. Составим число $a = 11 \dots 1002020$, в котором $k - 4$ единицы. Тогда $S(a) = k$, и $a = 2020 + 8m \in \{a_n\}$, так как $a - 2020$ делится на 10000, а значит, и на 8. Для $k = 4$ можно взять a_0 .

Задача 5. Покажите, что на последовательности $a_n = 3 + 5n$ функция S не принимает значений 1 и 2.

Решение. Пусть $S(3 + 5n) = 2$, тогда или $3 + 5n = 2 \cdot 10^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, или $3 + 5n = a$, где a в десятичной записи имеет две единицы, а остальные нули, причем на первом месте – единица. Но в первом случае $2 \cdot 10^p - 3$ не делится на 5, и во втором случае $a - 3$ не делится на 5. Если же $S(3+5n) = 1$, то $3 + 5n = 10^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, и $10^p - 3$ не делится на 5.

Литература

1. Зуев А.М. О некоторых свойствах суммы цифр натурального числа // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. – С. 71–75.

A.M. Zuev
Smolensk State University

A FUNCTION OF THE SUM OF DIGITS OF A NATURAL NUMBER GIVEN ON ARITHMETIC PROGRESSIONS

Keywords: *natural number; function of the sum of digits; value of the function on the terms of the arithmetic progression.*

Abstract. *This article continues the research started by the author in [1]. Properties of the function of the sum of digits of a natural number on natural arithmetic progressions are considered.*

Е.В. Карачев, Г.А. Благодатский
*Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова*

УДК 004.891

МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНТЕГРАЦИИ ИНТЕРНЕТ-СООБЩЕСТВ

Ключевые слова: *методы анализа иерархий; системный анализ; метод Т. Саати; интернет-сообщества; метод анализа иерархий; автоматическое управление.*

В статье рассматриваются методы анализа иерархий. Базируясь на методе анализа иерархии Т. Саати, рассматриваются формулы для нахождения весов элементов. Рассказано, какие компоненты были использованы при создании программы. Описаны результаты разработки программной системы с её возможностями.

1. Постановка задачи. Метод анализа иерархий очень удобен, однако в настоящее время он используется редко ввиду сложности «ручного» применения экспертами и развития методов машинного обучения и искусственного интеллекта. На рынке программных продуктов понятной и удобной в использовании системы нет. Цель работы – создание такого программного продукта, который будет понятен как пользователю, так и эксперту, занимающемуся расстановкой весов.

Применение методов машинного обучения предполагает наличие статистической информации об изучаемом явлении, которой по стоящей перед исследователями интернет-сообществ нет. [1]

В качестве объекта исследования выделены интернет-сообщества, которые можно отнести к сообществам с offline / online переходами. Объект исследования может быть определён как сетевые сообщества мобилизационного типа, то есть сообщества, в которых интернет-коммуникации влияют на поведение участников в реальной жизни.

Организационно создание программного продукта включает две группы специалистов: социологов в роли наблюдателей и математиков-прикладников. При использовании математических методов и моделирований социологи выступают в качестве экспертов. Процедура наблюдения выполнялась на следующих сообществах: Альянс гетеросексуалов и ЛГБТБ, Библиотеки пространства развития, Зелёный паровозик, Лига Ижевского свояка, Лыжи мечты в Ижевск, Пражский клуб, Про боно 45, Профсоюз «Действие», Профсоюз «Университетская солидарность», Удмуртлык.

Для обработки и оценки параметров иерархии был использован метод анализа иерархии Т. Саати [2]. Данный метод был выбран из-за того, что он не требует предварительного «правильного» знания об объекте исследования, а, наоборот, позволяет получить корректное его понимание в процессе итераций неструктурированного, «непредвзятого» наблюдения. Помимо этого, на сегодняшний день существует множество примеров успешного применения данного метода в различных областях: отдельный обзор применения метода с момента его создания дан в работе [3], он используется в разработке промышленных установок по многоступенчатой переработке материалов [4], анализе аккредитационных показателей вузов [5], оценке заявок на участие в конкурсах по разработке сложных систем [6], проведении ранжирования спортсменов высокой квалификации [7], повышении эффективности функционирования предприятий [8].

Элементы, использованные в нижеприведённой модели: цель, действующие силы, акторы, выделены социологами в ходе двухмесячного наблюдения.

2. Теоретическая часть. Программный продукт разрабатывался для анализа иерархической структуры показателей интеграции интернет-сообществ. Характеристики рассматриваются как иерархическая система. В системе можно выделить множество уровней $I = \{I_i\}, i = \overline{1, m}$. На каждом из уровней наблюдаются сложные взаимодействия с вышестоящими уровнями иерархии. Ниже представлен рисунок иерархической модели (см. рис. 1).

Рассмотрим уровни системы. Вершина системы представлена уровнем I_0 , который показывает насколько высока интеграция в интернет-сообществе.

На первом уровне системы I_1 выделяются силы

$$W_{I_1} = \{W_{I_1,j}\}, j = \overline{1, n_{I_1}}, \quad (1)$$

оказывающие влияние на процесс интеграции в интернет-сообществе. В данном случае это само сообщество ($W_{I_1,1}$), динамика сообщества ($W_{I_1,2}$) и внешние факторы ($W_{I_1,3}$).

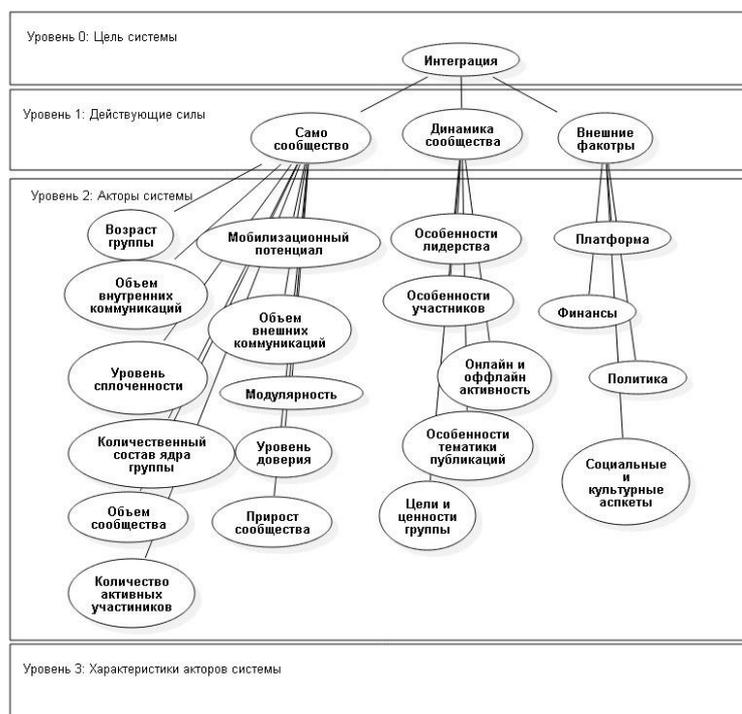


Рис. 1

На втором уровне системы I_2 выделяются активные элементы (акторы), которые направляют силы. Аналогично

$$W_{I_2} = \{W_{I_2,j}\}, j = \overline{1, n_{I_2}}, \quad (2)$$

где $W_{I_2,1}$ – возраст группы, $W_{I_2,2}$ – динамика объёма сообщества, $W_{I_2,3}$ – количественный состав ядра группы, $W_{I_2,4}$ – мобилизационный потенциал, $W_{I_2,5}$ – модулярность, $W_{I_2,6}$ – объем внешних коммуникаций, $W_{I_2,7}$ – объем внутренних коммуникаций, $W_{I_2,8}$ – объем сообщества, $W_{I_2,9}$ – уровень доверия, $W_{I_2,10}$ – уровень сплоченности, $W_{I_2,11}$ – особенности лидерства, $W_{I_2,12}$ – особенности участников, $W_{I_2,13}$ – особенности тематики публикаций, $W_{I_2,14}$ – цели и ценности группы, $W_{I_2,15}$ – особенности online и offline активности, $W_{I_2,16}$ – особенности программно-технической

платформы социальной сети, $W_{I_2,17}$ – политико-правовые аспекты, $W_{I_2,18}$ – финансовые аспекты, $W_{I_2,19}$ – социокультурные аспекты.

На третьем уровне выделяются множества показателей, характеризующих акторы, воздействующие на силы, влияющие на процесс интеграции интернет-сообществ. Обозначим уровень показателей I_3 и его элементы:

$$W_{I_3} = \{W_{I_3,j}\}, j = \overline{1, n_{I_3}}. \quad (3)$$

Для установки влияния $I_1 \rightarrow I_0$ сил, расположенных на уровне I_1 , на цель системы I_0 необходимо попарное сравнение важности элементов $W_{I_1} = \{W_{I_1,j}\}, j = \overline{1, n_{I_1}}$ по шкале от 1 до 9, где доминирование элемента $W_{I_1,k}$ по отношению к $W_{I_1,m}$ обозначается целым числом из шкалы отношений a_{km} . После проведения $C_{n_{I_1}}^2$ сравнений ими заполняется матрица $A_{I_1} = [a_{ij}]$ парных сравнений размерности $n_{I_1} \times n_{I_1}$. При этом учитывается, что сравнение влияния $W_{I_1,m}$ на I_0 по отношению к $W_{I_1,k}$ заменяется обратной величиной влияния $W_{I_1,k}$ на I_0 по отношению к $W_{I_1,m}$.

Правый собственный вектор ω'_{I_1} матрицы A_{I_1} , соответствующий максимальному собственному числу, находится из решения уравнения

$$A_{I_1} \omega'_{I_1} = \lambda_{\max I_1} \omega'_{I_1}. \quad (4)$$

Для нахождения собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу, вводится итеративная процедура [9].

Пусть $y^{(0)} = \{1, \dots, 1\}$ – единичный вектор размерности n_{I_1} . По достижении

$$\varepsilon^{(k)} = \left| \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} - \frac{y_j^{(k-1)}}{y_j^{(k-2)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где $\varepsilon^{(k)}$ – погрешности вычислений $\lambda_{\max I_1} = \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}}$, выполняется

итеративный процесс $y^{(k)} = A_{I_1} y^{(k-1)} = A_{I_1}^{(k-1)} y^{(0)}$. Полученный вектор $y^{(k)}$ есть решение уравнения (4).

Далее проводится нормирование вектора ω'_{I_1} по сумме координат. Отсюда получается вектор

$$\omega'_{I_1} = \left\{ \frac{\omega'_{I_1 i}}{\sum_{j=1}^{n_{I_1}} \omega'_{I_1 j}} \right\}, i = \overline{1, n_{I_1}}, \quad (6)$$

где ω_{I_1} – вектор весов влияния $I_1 \rightarrow I_0$ сил, расположенных на уровне I_1 на цель системы I_0 .

В качестве меры корректировки суждений вводится отношение согласованности (ОС) – отношение индекса согласованности (ИС) матрицы парных сравнений A_{I_1} к случайному индексу (СИ). ИС для квадратной матрицы размерности $n \times n$ рассчитывается по формуле $ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$. $ОС \leq 0,1$ считается допустимым для согласованности матрицы парных сравнений.

3. Проектирование информационной системы. Разрабатываемая система написана на языке *Object Pascal*. Для соединения базы данных с компонентами использован язык запросов *SQL*.

На рисунке 2 представлено влияние элементов уровня на вышестоящий, где 1 – иерархическая модель, 2 – графики с локальными и глобальными весами, 3 – числовые значения локальных и глобальных весов для каждого элемента.

Программа позволяет добавлять, удалять и перемещать элементы иерархии. Сама иерархия представлена в окне *TTreeView*.

При выборе элемента, содержащего другие ветки, появляется матрица парных сравнений. Её можно заполнять вводом значений в ячейки *StringGrid*. Также, для удобства пользователей, реализованы ползунки *TrackBar*. Каждый ползунок соотносится с отдельной ячейкой *StringGrid*. При изменении значения в ячейке *TrackBar* изменяет положение в заданное, что позволяет наглядно увидеть перевес одного элемента над другим. Размерность матрицы регулируется автоматически в зависимости от количества элементов в выбранной ветке. Помимо этого, автоматически регулируются ползунки. Механизм реализован с помощью перечисления вариантов, используя оператор *case*.

На рисунке 3 приведен интерфейс редактирования матриц парных сравнений.

На рисунке 4 матрица парных сравнений из рис. 3 представлена в виде редактируемого списка парных сравнений с ползунками и подписями.

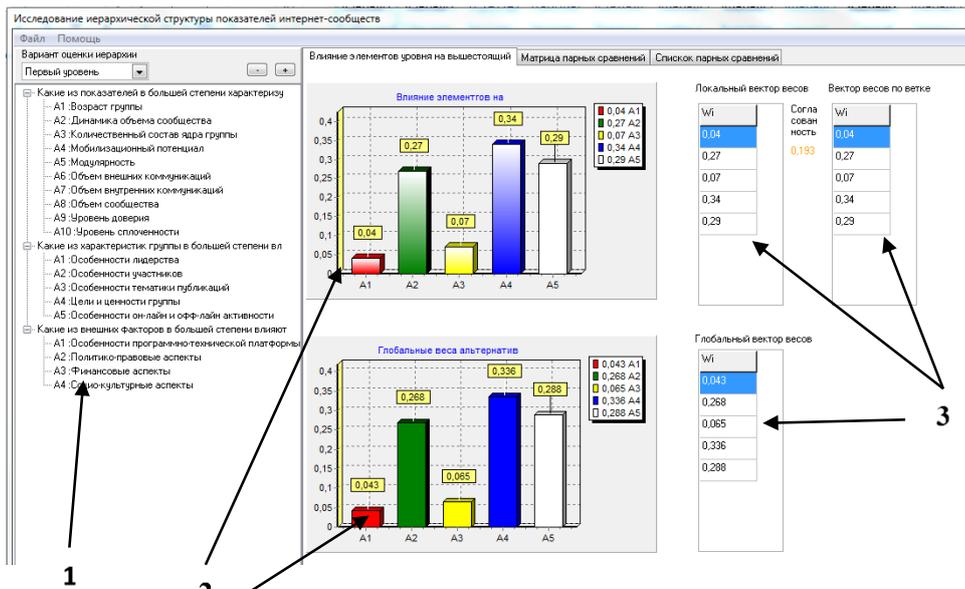


Рис. 2

После заполнения матрицы происходит вычисление локальных и глобальных весов. Для просмотра результатов вычислений использованы *TChart* (см. рис. 2), в которых показаны значения весов для каждого элемента по отдельности и для всей ветки в целом. Помимо этого, рядом расположены числовые значения весов и степень согласованности матрицы парных сравнений.

The screenshot shows a comparison matrix for 10 elements (A1-A10). The matrix is a 10x10 grid where the diagonal elements are 1. The values represent the relative importance of one element compared to another.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A1	1	3	0,2	0,2	1	0,333	0,111	3	0,2	0,111
A2	0,333	1	0,2	0,111	1	1	0,111	9	0,2	0,2
A3	5	5	1	0,333	1	0,2	0,111	3	5	0,111
A4	5	9	3	1	1	3	3	5	0,2	0,117
A5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A6	3	1	5	0,333	1	1	0,2	0,2	0,333	0,333
A7	9	9	9	0,333	1	5	1	0,2	0,2	0,2
A8	0,333	0,111	0,333	0,2	1	5	5	1	0,2	0,2
A9	5	5	0,2	5	1	3	5	5	1	5
A10	9	5	9	8,5	1	3	5	5	0,2	1

Рис. 3

4. Результаты работы

В ходе исследования были получены следующие результаты социологического наблюдения и его обработку по методу Т. Саати. Для предварительных результатов малоизученных объектов удалось добиться достаточно согласованной оценки экспертами степени важности наблюдаемых факторов.

В ходе разработки программной системы была реализована система для построения иерархической модели с возможностью добавления,

редактирования и удаления элементов иерархии. Данные записываются в базу данных для дальнейшего использования.

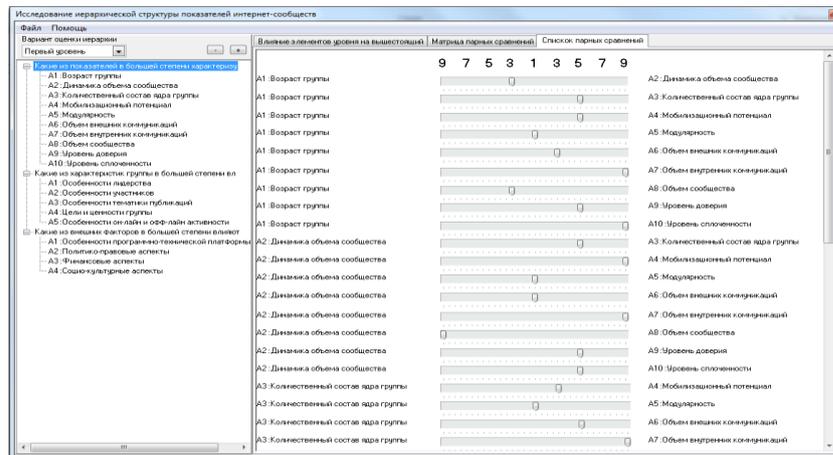


Рис. 4

Помимо этого, имеется возможность заносить оценки в матрицу парных сравнений двумя способами. Данные из матрицы также сохраняются в базе данных.

Занесённые данные служат для расчёта весов. Результаты расчёта можно увидеть на графиках, в числовых значениях и в матрице парных сравнений.

На рисунке 5 представлена блок-схема работы с программой.

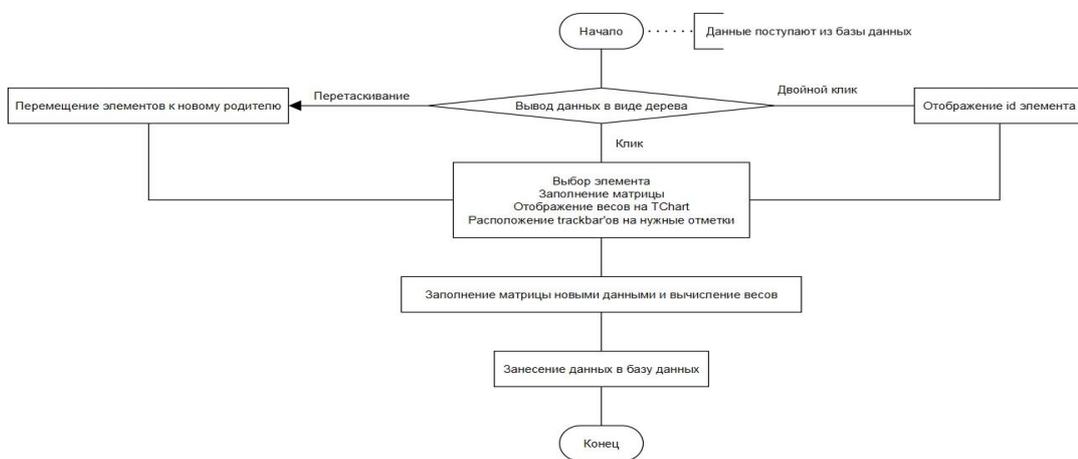


Рис. 5

Заключение

Было установлено, что метод анализа иерархий применим к задаче определения структуры иерархической системы анализа показателей сплоченности интернет-сообществ. Автоматизация расчетов позволила ввести в процедуру несколько независимых коллективов экспертов. Был собран и формализован (в виде реляционной базы данных) материал для последующего анализа системы.

Дальнейшее направление исследований планируется в сторону создания мобильных систем для увеличения кроссплатформенности и облегчения процедуры сбора экспертной информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова» №БГА/20-28-09, РФФИ в рамках научного проекта 19-011-00761 А.

Литература

1. Благодатский Г.А. Вологдин С.В. Горохов М.М. Пономарёв А.М. Построение иерархической модели показателя интеграции интернет-сообществ // Интеллектуальные системы производства. – Ижевск: ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. – 2019. – № 4(17). – С. 78-87.
2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation (Decision Making Series). – New York: McGraw-Hill, 1980. – 287 p.
3. Alessio Ishizaka. Ashraf Labib. Review of the main development in the analytic hierarchy process // Expert System with Application. – 2011. – № 38. – P. 14336–14345.
4. Жиров Д.К. АСУ процессов механо-активации многокомпонентных материалов и её системный анализ по критерию качества конечного продукта // Вестник ИжГТУ. – 2011. – № 4(52). – С. 132–135.
5. Благодатский Г.А. Создание математической модели анализа структуры аккредитационных показателей ВУЗа с применением метода анализа иерархий // Вестник ИжГТУ. – 2010. – № 2(46). – С. 115–118.
6. Переведенцев Д.И. Моделирование системы нечёткого логического вывода оценки наукоёмких проектов // Автоматизация процессов управления. – Ульяновск: Издательство НПО «Марс». – 2017. – №2(48). – С. 82–89.
7. Горохов М.М. Программно-инструментальное средство оценки тренированности спортсменов высших квалификаций // Вестник ИжГТУ. – 2016. – №2 (70). – С. 87–90.
8. Благодатский Г.А. Программно-инструментальное средство повышения эффективности внутренних бизнес-процессов предприятий. – Ижевск: Издательство ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2015. – 188 с.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1990. – С. 190–191.

E.V. Karachev, G.A. Blagodatsky
Izhevsk State Technical University

METHODS AND TOOLS FOR STUDYING THE HIERARCHICAL STRUCTURE OF INDICATORS OF ONLINE COMMUNITIES

Keywords: *hierarchy analysis methods; system analysis; method T. Saati; Online communities' hierarchy analysis method; automatic control.*

Abstract. *The article discusses methods for analyzing hierarchies. Based on the method of analyzing the hierarchy of T. Saati, we consider formulas for finding the weights of elements. It's told which components were used to create the program. The results of developing a software system with its capabilities are described.*

В.В. Карачик
Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет)

УДК 517.956.223+517.575

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ключевые слова: задачи типа Неймана; полигармоническое уравнение; достаточные условия разрешимости; единичный шар; полигармонические функции.

Исследована разрешимость одного класса задач типа Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре. Доказано, что полученный ранее набор необходимых условий разрешимости рассматриваемых задач является также и набором достаточных условий. Найденные условия представляют собой условия ортогональности однородных гармонических полиномов некоторых степеней линейным комбинациям граничных функций с коэффициентами из целочисленного треугольника Неймана.

1. Введение. Классическими задачами для полигармонического уравнения являются задачи Дирихле (см., например, [1; 2]) и Неймана (см., например, [3; 4; 5]). Условия их разрешимости исследованы в теории краевых задач для эллиптических уравнений. Установлено, что задачи данного типа фредгольмовы и поэтому их разрешимость для однородных краевых условий гарантируется ортогональностью правых частей всем решениям однородного сопряженного уравнения.

В работах [6; 7] была рассмотрена более общая краевая задача для полигармонического уравнения в шаре с нормальными производными в граничных условиях. Условия разрешимости в указанных работах имели вид ортогональности некоторых вектор-функций, зависящих от данных задачи или равенства рангов специальных матриц высокого порядка. Чтобы установить, при каких граничных условиях конкретная задача такого типа разрешима, необходимо выполнить непростые вычисления.

Рассмотренный в настоящей работе класс задач является естественным обобщением классической постановки задачи Неймана для полигармонического уравнения. В работе [8] с помощью целочисленного треугольника Неймана [9] были найдены необходимые условия разрешимости этого класса задач. В настоящей работе доказывается, что найденный ранее набор необходимых условий

разрешимости задач типа Неймана является также и достаточным набором условий разрешимости.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в \mathbb{R}^n , а $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. В единичном шаре S рассмотрим следующий класс краевых задач типа Неймана \mathcal{N}_k , зависящий от параметра $k \in \mathbb{N}$ для однородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, \dots, m$ определены на ∂S . Класс задач \mathcal{N}_k является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [6]. Задача \mathcal{N}_0 является задачей Дирихле, которая безусловно разрешима, а задача \mathcal{N}_1 совпадает с задачей Неймана [4].

Исследования разрешимости различных постановок задач типа Неймана и их обобщений в единичном шаре, кроме перечисленных выше работ, можно найти для бигармонического уравнения (в частности задач \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2) в работах [10; 11; 12] и полигармонического уравнения в работе [13].

2. Задача Дирихле \mathcal{N}_0 . Если использовать обозначения $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $t^{[m]} = t(t-1)\dots(t-m+1)$ – m -я факториальная степень t , причем $t^{[0]} = 1$ и равенство $\Lambda^{[i]} u = \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ на ∂S , то эту задачу можно переписать в виде

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \quad u \Big|_{\partial S} = \varphi_1(x), \dots, \Lambda^{[m-1]} u \Big|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S.$$

Известно, что если функция $u(x)$ является m -гармонической в звездной области $D \subset \mathbb{R}^n$, то она может быть разложена по формуле Альманси

$$u(x) = u^{(0)}(x) + |x|^2 u^{(1)}(x) + \dots + |x|^{2m-2} u^{(m-1)}(x), \quad x \in D,$$

где $u^{(i)}(x)$ – “гармонические компоненты” m -гармонической функции $u(x)$. Справедливо следующее утверждение относительно гладкости гармонических компонент решения задачи Дирихле. Пусть ε – малое положительное число.

Лемма 1. Пусть $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$ при $i = 1, \dots, m$, тогда все гармонические компоненты $u^{(i-1)}(x)$ решения задачи Дирихле таковы, что $u^{(i-1)} \in C^{m-1}(\bar{S})$, $i = 1, \dots, m$.

Следует упомянуть, в работе [3] было замечено, что задача \mathcal{N}_0 разрешима безусловно и однозначно и ее решение определяется в квадратурах.

3. Задача \mathcal{N}_k . Рассмотрим теперь общую задачу \mathcal{N}_k для однородного полигармонического уравнения при $k \leq m$. Ее можно переписать в виде

$$\Delta^m u = 0, x \in S; \quad \Lambda^{[k]} u|_{\partial S} = \varphi_1(x), \dots, \Lambda^{[m+k-1]} u|_{\partial S} = \varphi_m(x), x \in \partial S. \quad (3)$$

Рассмотрим m -гармоническую в S функцию $v = \Lambda^{[k]} u$. Относительно этой функции получим следующую краевую задачу

$$\Delta^m v = 0, x \in S, \quad v|_{\partial S} = \varphi_1(x), (\Lambda - k)v|_{\partial S} = \varphi_2(x), \dots, (\Lambda - k)^{[m-1]} v|_{\partial S} = \varphi_m(x), x \in \partial S. \quad (4)$$

Лемма 2. Задача (4) эквивалентна следующей задаче Дирихле

$$\Delta^m v = 0, \quad x \in S, v|_{\partial S} = \psi_1(x), \Lambda^{[1]} v|_{\partial S} = \psi_2(x), \dots, \Lambda^{[m-1]} v|_{\partial S} = \psi_m(x), x \in \partial S, \quad (5)$$

где функции $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ находятся из рекуррентных равенств

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} (-k)^{[i-j]} \psi_j(x).$$

Если $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, то $\psi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1, \dots, m$, а значит $v^{(i)} \in C^{m-1}(\bar{S})$.

Лемма 3. Пусть $v(x)$ – решение задачи (4). Уравнение $v(x) = \Lambda^{[k]} u(x)$ разрешимо в m -гармонических в S функциях тогда и только тогда, когда m -гармоническая в S функция $v(x)$ не имеет членов до $(k-1)$ -го порядка малости включительно в своем разложении в окрестности нуля. Решение $u(x)$ единственно с точностью до m -гармонических многочленов степени $k-1$ и удовлетворяет (3). Если $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ и $u(x)$ существует, то $\Lambda^i u \in C^{m-1}(\bar{S})$ для любого $i = 0, \dots, k$.

4. Интегральные условия для задачи \mathcal{N}_k . Исследуем необходимые условия разрешимости задачи \mathcal{N}_k , полученные на основании работ [14; 15] в теореме 1 из [8]. Рассмотрим случай, когда разность $(k-l)$ – четное число, где $l \in \mathbb{N}_0$ и $l < k$. Выясним, что означают условия теоремы при $k \leq m$ в терминах функции $v(x) = \Lambda^{[k]} u(x)$. В дальнейшем понадобится обобщенный символом Похгаммера $(a, b)_l = a(a+b) \cdots (a+(l-1)b)$.

Лемма 4. Пусть $v(x)$ – решение задачи (4) и данные задачи \mathcal{N}_k удовлетворяют условиям теоремы 1 из [8] при четном $k-l$ и $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда должны быть выполнены $(k-l)/2$ следующих равенств

$$\int_{\partial S} H_l(x) (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2} v ds_x = 0, \int_{\partial S} H_l(x) (\Lambda - k + 2, -2)_{m-(k-l)/2+1} v ds_x = 0, \\ \int_{\partial S} H_l(x) (\Lambda - l - 2, -2)_{m-1} v ds_x = 0,$$

где $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l .

Лемма опирается на результаты работ [16; 17].

На основании этой леммы доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть данные задачи \mathcal{N}_k удовлетворяют условиям теоремы 1 из [8] при четном $k-l$, имеют гладкость $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i=1, \dots, m$, а m -гармоническая функция $v(x)$, являющаяся решением задачи (4), имеет следующее разложение Альманси

$$v(x) = v^{(0)}(x) + |x|^2 v^{(1)}(x) + \dots + |x|^{2m-2} v^{(m-1)}(x), \quad x \in S.$$

Тогда при четном $k-l$ верны равенства $v_l^{(0)}(x) = v_l^{(1)}(x) = \dots = v_l^{((k-l)/2-1)}(x) = 0$.

Случай нечетной разности $k-l$, при $l \in \mathbb{N}_0$ и $l < k$ рассматривается аналогично.

5. Основной результат. Докажем, что необходимые условия разрешимости задачи \mathcal{N}_k , полученные в теореме 1 из [8] при $k \leq m$, являются также и достаточными условиями, если данные задачи обладают необходимой гладкостью. На основании лемм 1–4 и теоремы 1 справедливо утверждение.

Теорема 2. Пусть $k \leq m$ и $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i=1, \dots, m$ тогда необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи \mathcal{N}_k являются $N_k = [(k+1)/2][(k+2)/2]$ условий вида

$$\int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(x) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(x)) ds_x = 0$$

при $l=0, 1, \dots, k-1$, $\lambda = [(k-l)/2], \dots, k-l-1$, $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$, $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$, где $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l , а $p_i^{(m)}$ – числа из треугольника Неймана [8]. Решение задачи \mathcal{N}_k существует и единственно с точностью до m -гармонических полиномов степени $k-1$.

Литература

1. Nicolesco M. Les fonctions polyharmoniques. – Paris, Hermann ed, 1936.
2. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains, Lecture Notes in Mathematics 1991. – Berlin: Springer, 2010.
3. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, №. 5. – С. 825–831.
4. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 11. – С. 1455–1461.
5. Turmetov V.Kh., Ashurov R.R. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball // Boundary value problems. – 2013. – No. 162. – P. 1–15.
6. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32, № 5. – С. 51–58.
7. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.

8. Карачик В.В. Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 2020. – Т. 60, № 1. – С. 132–150.
9. Карачик В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.
10. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.
11. Карачик В.В. Обобщённая третья краевая задача для бигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 761–770.
12. Карачик В.В., Торбек Б.Т. О задаче Дирихле-Рикье для бигармонического уравнения // Математические заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.
13. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.
14. Карачик В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 533–551.
15. Карачик В.В. О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Математические труды. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 69–88.
16. Карачик В.В. О некоторых специальных полиномах и функциях // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 205–226.
17. Karachik V.V. On some special polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, No. 4. – P. 1049–1058.

V.V. Karachik

South Ural State University (National Research University)

**ON SUFFICIENT SOLVABILITY CONDITIONS FOR ONE CLASS
OF NEUMAN TYPE PROBLEMS FOR POLYHARMONIC
EQUATION**

Keywords: *Neumann type problems; polyharmonic equation; sufficient solvability conditions; unit ball; polyharmonic functions.*

Abstract. *Solvability conditions of one class of Neumann type problems for homogeneous polyharmonic equation in the unit ball are investigated. It is proved that the previously obtained set of necessary conditions for the solvability of the problems under consideration is also a set of sufficient conditions. The found conditions are the orthogonality conditions between homogeneous harmonic polynomials of the certain degrees and the linear combinations of boundary functions with coefficients from the integer Neumann triangle.*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *аналитическая функция; разделенная разность; многочлен; круг.*

В статье рассматривается класс аналитических в единичном круге функций с разделенной разностью n -го порядка, отличной от нуля в этом круге. Ставится и решается вопрос о том, является ли этот класс собственным подклассом класса n -листных в единичном круге функций. Кроме того, исследуется поведение корней одного специального многочлена, тесно связанного с автоморфизмом единичного круга.

1. Постановка задачи. Пусть $A(D)$ – аналитических в области D функций $F(z)$. Одно из многих представлений n -ой разделенной разности для функции $F(z)$ определяется следующим рекуррентным соотношением

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n}, \quad (1)$$

$$[F(z); z_0, z_1] = \frac{[F(z); z_0] - [F(z); z_1]}{z_0 - z_1} = \frac{F(z_1) - F(z_0)}{z_0 - z_1} \quad (2)$$

Обозначим через $K_n(D)$, $n > 1$, (классы Кирьяцкого Э.Г.) – множество аналитических в области D функций $F(z)$, для которых

$$[F(z); z_0, z_1, \dots, z_n] \neq 0, \quad \forall z_0, z_1, \dots, z_n \in D. \quad (3)$$

Класс n -листных аналитических в области D функций обозначим символом $S_n(D)$. Наша задача состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Класс $K_1(D)$ полностью совпадает с классом всех однолистных в области D . Класс $K_n(D)$, где $n \geq 2$, является собственным подклассом класса $S_n(D)$.*

2. Доказательство теоремы 1. Первая часть теоремы легко следует из (2). Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что функция $F(z)$ из класса $K_n(D)$, где $n \geq 2$, более чем n -листная в области D . Тогда в области D существуют $n+1$ попарно различные точки z_0, \dots, z_n ,

такие, что $F(z_0) = F(z_1) = \dots = F(z_n)$. Тогда, опираясь на формулы (1) и (2), простым вычислением разделенной разности можно убедиться в том, что $[F(z); z_0, \dots, z_n] = 0$, а это невозможно согласно определению (3) класса $K_n(D)$. Значит, функция $F(z)$ из класса $K_n(D)$ на самом деле не может быть более чем n -листной в области D . В то же время любой многочлен вида $M_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, где $a_n \neq 0$, принадлежит классу $S_n(D)$, а также принадлежит классу $K_n(D)$, так как $[M_n(z); z_0, z_1, \dots, z_n] \equiv a_n \neq 0$. Осталось указать функцию, которая принадлежала бы классу $S_n(D)$, но не принадлежащую классу $K_n(D)$. Мы несколько упростим вопрос, если воспользуемся теоремой Римана об однолистом конформном отображении двух областей и заменим область D единичным кругом $|z| < 1$, который обозначим через E .

Рассмотрим аналитическую в единичном круге E функцию

$$F_{\zeta,n}(z) = \left(\frac{z+t}{1+\bar{t}z} \right)^n, \quad |t| < 1, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Функция $F_{t,1}(z) \in S_1(E)$ при любом t из единичного круга E . Она является однолистной в E . Легко также видеть, что функция $F_{t,n}(z) \in S_n(E)$ при любом значении параметра t , взятого из круга E . Кроме того, эта функция отображает круг E на себя. Поставим вопрос о принадлежности функции (4) классу $K_n(E)$. При $n=1$ функция $F_{t,1}(z)$, очевидно, принадлежит классу $K_1(E)$ для любого $|t| < 1$. Если $t=0$, то получим функцию $F_{0,n}(z) = z^n$. Эта функция принадлежит обоим классам $S_n(E)$ и $K_n(E)$. Функция

$$z = \frac{\zeta+t}{1+\bar{t}\zeta}, \quad z \in E, \quad \zeta \in E, \quad t \in E,$$

отображает взаимно однозначно круг E на себя. Зафиксируем точки z_k и ζ_k , $k=0,1,\dots,n$ так, чтобы выполнялись равенства

$$z_k = \frac{\zeta_k+t}{1+\bar{t}\zeta_k}, \quad k=0,1,\dots,n.$$

Воспользуемся следующим равенством: [1, стр. 602]

$$[F_{t,n}(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{(1-|t|^2)^n} \prod_{k=0}^n (1-\bar{t}\zeta_k) \cdot [H(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n], \quad (5)$$

где $H_{t,2n-1}(\zeta)$ – многочлен вида

$$H_{t,2n-1}(\zeta) = (1-\bar{t}\zeta)^{n-1} \zeta^n. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

Утверждение 1. Для того чтобы $F_{t,n}(z) \in K_n(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $H_{t,2n-1}(z) \in K_n(E)$.

В самом деле, при некотором $t \in E$ обе разделенные разности в (5) одновременно равны нулю или одновременно обе отличны от нуля.

Сделаем еще одну замену $\bar{t}\zeta = \xi$ и пусть $\bar{t}\zeta_k = \xi_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Функция $\xi = \bar{t}\zeta$ взаимно однозначно отображает единичный круг E на круг $|\xi| < |t|$, который обозначим E_t . Легко убедиться в том, что

$$[H_{t,2n-1}(\zeta); \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n] = [\Psi_{2n-1}(\xi); \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n], \quad (7)$$

где $\Psi_{2n-1}(\xi)$ – многочлен вида

$$\Psi_{2n-1}(\xi) = (1 - \xi)^{n-1} \xi^n. \quad (8)$$

Благодаря (7) и (8) равенство (5) можно переписать в виде

$$[F_{t,n}(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{(1 - |t|^2)^n} \prod_{k=0}^n (1 - \xi_k) \cdot [\Psi_{2n-1}(\xi); \xi_0, \dots, \xi_n]. \quad (9)$$

Из (9) следует

Утверждение 2. Для того чтобы $F_{t,n}(z) \in K_n(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi_{2n-1}(\xi) \in K_n$ в круге $|\xi| < |t|$.

В самом деле, утверждение 2 доказывается точно также как и утверждение 1.

Рассмотрим отдельно многочлен $\Psi_{2n-1}(\xi)$. Он имеет корень $\xi = 1$ кратности $n - 1$ и корень $\xi = 0$ кратности n . Опираясь на теоремы Гаусса и Ролля, заключаем, что многочлен

$$P_{n-1}(\xi) = \frac{1}{n!} \Psi_{2n-1}^{(n)}(\xi) \quad (10)$$

имеет степень, равную $n - 1$, а также $n - 1$ попарно различных положительных корней ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , расположенных в интервале $(0; 1)$, причем $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1}$. Тогда ξ_1 – наименьший положительный корень.

Предположим, что $t = t_0 > \xi_1$. Так как $P_{n-1}(\xi_1) = \frac{1}{n!} \Psi_{2n-1}^{(n)}(\xi_1) = 0$, то

$$\Psi_{2n-1}(\xi) \notin K_n(E_{t_0}).$$

Здесь мы опираемся на следующее свойство разделенных разностей.

Утверждение 3. ([1, с. 600]). Если $F(z) \in K_n(D)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ в области D .

Теперь согласно утверждению 2 следует, что $F_{t_0,n}(z) \notin K_n(E)$. Таким образом, мы указали функцию $F_{t_0,n}(z)$, которая принадлежит классу $S_n(E)$, но не принадлежит классу $K_n(E)$. Теорема 1 доказана.

После того как теорема 1 нами доказана, займемся вопросом о вычислении тех значений параметра t , для которых функция $F_{t,n}(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$. Нам уже известно, что параметр t не может удовлетворять неравенству $|t| > \xi_1$, так как в этом случае $F_{t,n}(z) \notin K_n(E)$, а это нас не устраивает. Можно предположить существование такого числа ρ_n , чтобы функция $F_{\rho_n,n}(z)$ принадлежала классу $K_n(E)$ при $|t| \leq \rho_n < 1$ и не принадлежала классу $K_n(E)$ при $|t| > \rho_n$. Возвратимся снова к многочлену (10) и воспользуемся одним из многих признаков принадлежности аналитической функции $F(z)$ классу $K_n(E)$.

Утверждение 4. ([1, с. 601]). Если $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) \neq 0$ (или $\operatorname{Im} F^{(n)}(z) \neq 0$) в круге E , то $F(z) \in K_n(E)$.

Справедлива

Теорема 2. Функция $F_{t,n}(z)$ принадлежит классу $K_n(E)$ тогда и только тогда, когда $|t| \leq \rho_n$, где $\rho_n = \xi_1$ – наименьший корень многочлена $P_{n-1}(\xi)$.

В самом деле, легко установить, что

$$\operatorname{Re} P_{n-1}(\xi) = \operatorname{Re} \Psi_{2n-1}^{(n)}(\xi) > 0 \text{ в круге } |\xi| < \xi_1.$$

Пользуясь утверждением 4, получим, что многочлен $\Psi_{2n-1}(\xi)$ принадлежит классу K_n в этом круге. Тогда согласно утверждению 2 функция $F_{t,n}(z)$ при $|t| < \xi_1$, будет принадлежать классу $K_n(E)$. Таким образом, мы получили, что $\rho_n = \xi_1$. Практически удалось вычислить ρ_n только при $n = 2, 3, 4, 5$.

Литература

1. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые свойства функций с отличной от нуля n -й разделенной разностью. // Сибирский математический журнал. – 2012. Т. 53, № 3. – С. 597–612

E. Kiriyytzkii, J. Kirjckis
Vilnius Gediminas Technical University

ON ONE CLASS OF MULTIVALENT FUNCTIONS

Keywords: analytic function; divided difference; polynomial, unit disk.

Abstract. The article considers a class of functions analytic in a unit disk, with a nonvanishing in this disk divided difference of n -th order. The question is posed and resolved as to whether this class is a proper subclass of the class of n -valent functions in the unit disk. In addition we study the

behavior of the roots of one special polynomial that is closely related to the automorphism of the unit disk.

Э. Кирьяцкий, Е. Кирьяцкий
Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

УДК 517-54

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СРЕДНИХ РАССТОЯНИЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключевые слова: *евклидово пространство; круг, шар; среднее расстояний.*

В известном задачнике Г. Поля и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа» сформулирована следующая задача: «Пусть в круге произвольным образом фиксировано некоторое множество точек, а одна переменная точка пробегает границу этого круга. Тогда среднее геометрическое расстояний от этой точки до фиксированных точек имеет максимум, не меньший радиуса круга, а минимум – не больший радиуса круга». Оказалось, что в случае среднего арифметического для минимума и среднего гармонического для максимума указанное выше свойство среднего геометрического не всегда имеет место. В данной статье мы выясняем, почему такое нарушение происходит.

1. Введение. Пусть E_k – евклидово пространство размерности $k \geq 1$. Пусть $W_1(R)$, $W_2(R)$, $W_k(R)$ означают соответственно интервал $(-R, R)$, открытый круг радиуса R и открытый шар радиуса R с центрами в начале координат O . Далее, $T_k(R)$ обозначает границу $W_k(R)$. Пусть точки M_1, \dots, M_n произвольно фиксированы в $W_k(R)$, а переменная точка $M \in T_k(R)$. Расстояние между точками $M(x_1, \dots, x_n)$ и $M_i(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ в E_k обозначим $\rho_k(M; M_i)$. Среднее s -го порядка расстояний определяется формулой

$$\Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_k^s(M; M_i) \right)^{1/s}, & s \neq 0, \\ \left(\prod_{i=1}^n \rho_k(M; M_i) \right)^{1/n}, & s = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При фиксированных s, k и фиксированных $M_1, M_2, \dots, M_n \in W_k(R)$ среднее (1) является функцией от точки M .

Идея изучить свойства средних расстояний s -го порядка в E_k , где $k \geq 1$, возникла в связи с приведенными в известном задачнике Г. Полия и Г. Сеге следующими тремя задачами (см. [1, с. 141], задачи №№ 139–141), в которых рассматриваются свойства классических средних ($s = 0, s = 1, s = -1$) в двумерном евклидовом пространстве E_2 .

Сформулируем в нашей интерпретации и обозначениях эти задачи.

Пусть в круге $W_2(R)$ произвольно фиксированы точки M_1, M_2, \dots, M_n , а переменная точка M пробегает границу $T_2(R)$ этого круга. Требовалось доказать три утверждения.

1. Среднее геометрическое имеет $\min \leq R$, а $\max \geq R$.
2. Среднее арифметическое имеет $\max \geq R$, но $\min \leq R$ не всегда.
3. Среднее гармоническое имеет $\min \leq R$, но $\max \geq R$ не всегда.

В двумерном пространстве (т.е. при $k = 2$) задачи были решены Г. Полия и Г. Сеге с помощью теории аналитических функций. При этом не ставился вопрос о зависимости между размерностью k и порядком s среднего. С такой зависимостью между k и s можно познакомиться в наших статьях [2–4]. Это подтверждается также сформулированной ниже общей теоремой и примерами.

2. Постановка задачи. Введем понятия устойчивости системы точек. Если для фиксированного расположения точек M_1, \dots, M_m в $W_k(R)$ и любого перемещения точки M по $T_k(R)$ выполняется двойное неравенство

$$\min_{M \in T_k(R)} \Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_m) \leq R \leq \max_{M \in T_k(R)} \Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_m), \quad (2)$$

($\min \leq R \leq \max$), то такую систему точек M_1, \dots, M_m называем *устойчивой в $W_k(R)$* . Если же $\min < \max \leq R$ или $\max > \min \geq R$, то система соответственно является *неустойчивой в $W_k(R)$* .

Заметим, что если все точки M_1, \dots, M_m совпадают с началом координат, то (2) превращается в двойное равенство. Задача состоит в том, чтобы при заданных k и s выбрать такую систему точек, зависящую от R , для которой выполняются или не выполняются условия (2). С этим связана задача о вычислении экстремума функции $\Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_m)$ при фиксированных M_1, \dots, M_m . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. (Принцип устойчивости). Если $k + s = 2$, то для любых фиксированных $M_1, \dots, M_n \in W_k(R)$ одновременно справедливы оценки

$$\min_{M \in T_k(R)} \Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_n) \leq R \leq \max_{M \in T_k(R)} \Psi_{s,k}(M; M_1, \dots, M_n). \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: 1) $k=1, s=1$.
2) $k=2, s=0$; 3) $k>2, s<0$, где $k+s=2$.

Первый случай. Пусть $k=1, s=1$ и среди точек M_1, \dots, M_n , есть хотя бы одна точка, например M_1 , не совпадающая с O . Тогда

$$\rho_1(A, M_1) + \rho_1(B, M_1) = 2R, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где A и B – концы интервала $(-R, R)$. Поэтому

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_1(A, M_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_1(B, M_i) = 2R.$$

Следовательно,

$$\min_{M \in T_1(R)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_1(M, M_i) < R < \max_{M \in T_1(R)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_1(M, M_i). \quad (4)$$

Если все точки M_1, \dots, M_n совпадают с точкой O , то в (3) и (4) будут знаки равенства. Для второго и третьего случая теоремы 1 нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть $k \geq 1$. Зафиксируем в $W_k(R)$ точку M_1 , не совпадающую с центром O . Пусть точка M_1^\bullet является концом вектора

$$OM_1^\bullet = \frac{R^2}{\rho_k^2(O, M_1)} OM_1.$$

Тогда для любой точки $M \in T_k(R)$, $k \geq 2$, справедливо равенство

$$\rho_k(M; M_1) = \rho_k(M; M_1^\bullet) \frac{\rho_k(O; M_1)}{R}. \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть переменная точка $M(x_1, \dots, x_n) \in W_k(R)$, а фиксированная точка $M_1^*(y_1, \dots, y_n) \notin \bar{W}_k(R)$. Если $k=2, s=0$, то функция $U_{0,2}(M) = \ln \rho_2(M, M_1^*)$ будет гармонической в круге $W_2(R)$. Если $k>2$ и $s<0$, где $k+s=2$, то функция $U_{s,k}(M) = \rho_k^s(M, M_1^*)$ будет гармонической в шаре $W_k(R)$.

Перейдем ко второму случаю в теореме 1. Пусть $k=2, s=0$ и среди точек M_1, \dots, M_n в $W_2(R)$ есть хотя бы одна точка, например M_1 , не совпадающая с центром O . Возьмем точку M_1^\bullet , являющуюся концом вектора

$$OM_1^\bullet = \frac{R^2}{\rho_2^2(O, M_1)} OM_1.$$

Так как точка M_1^* лежит вне замкнутого круга $\bar{W}_2(R)$, то по лемме 2 функция $U_{0,2}(M) = \ln \rho_2(M, M_1^*)$ будет гармонической в круге

$W_2(R)$. Применяя формулу (5) при $k=2$ и интегральное свойство о среднем для гармонической функции, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(T_2(R))} \int_{T_2(R)} \ln \rho_2(M, M_1) d\tau &= \frac{1}{\tau(T_2(R))} \int_{T_2(R)} \ln \rho_2(M, M_1^*) d\tau + \ln \frac{\rho_2(O; M_1)}{R} = \\ &= \ln \rho_2(0, M_1^*) + \ln \frac{\rho_2(O; M_1)}{R} = \ln \frac{R^2}{\rho_2(O; M_1)} + \ln \frac{\rho_2(O; M_1)}{R} = \ln R, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{1}{\tau(T_2(R))} \int_{T_2(R)} \ln \rho_2(M, M_1) d\tau = \ln R.$$

Далее,

$$\frac{1}{\tau(T_2(R))} \int_{T_2(R)} \ln \prod_{i=1}^n \rho_2(M; M_i) d\tau = \sum_{i=1}^n \ln R = \ln R^n. \quad (6)$$

Опираясь на (6), получим

$$\min_{M \in T_2(R)} \left(\prod_{i=1}^n \rho_2(M, M_i) \right)^{1/n} < R < \max_{M \in T_2(R)} \left(\prod_{i=1}^n \rho_2(M, M_i) \right)^{1/n}. \quad (7)$$

Если все точки M_1, \dots, M_n совпадают с центром O круга $|z| < R$, то в (3) и (7) будут знаки равенства.

Третий случай. Пусть $k > 2$ и $s < 0$, где $k + s = 2$. Тогда по лемме 2 функция $U_{s,k}(M) = \rho_k^s(M, M_1^*)$ будет гармонической в шаре $W_k(R)$. Применяя формулу (5) и интегральное свойство о среднем для гармонических функций, можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k^s(M, M_1) d\tau &= \frac{\rho_k^s(O; M_1)}{R^s} \frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k^s(M, M_1^*) d\tau = \\ &= \frac{\rho_k^s(O; M_1)}{R^s} \rho_k^s(O, M_1^*) = R^s, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \rho_k^s(M, M_1) d\tau = R^s.$$

Далее

$$\frac{1}{\tau(T_k(R))} \int_{T_k(R)} \sum_{i=1}^n \rho_k^s(M, M_i) d\tau = \sum_{i=1}^n R^s = n R^s. \quad (8)$$

Согласно равенству (8) и неравенству $s < 0$, получим

$$\min_{M \in T_k(R)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_k^s(M, M_i) \right)^{1/s} < R < \max_{M \in T_k(R)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_k^s(M, M_i) \right)^{1/s}. \quad (9)$$

Если все точки M_1, \dots, M_n совпадают с центром O шара $W_k(R)$, то в (3) и (9) будут знаки равенства. Так как случаев больше нет, то теорема 1 доказана.

Замечание 1. Случай среднего геометрического ($k=2, s=0$) рассмотрен в [1]. Решение основано на свойствах аналитических функций.

Замечание 2. Если $k+s \neq 2$, то принцип устойчивости, вообще говоря, не выполняется. Это будет видно из приведенных ниже примеров.

Примеры. Ограничимся примерами классических средних в плоскости. В круге $W_2(R)$, где $R \geq 1$, берем три вершины равностороннего треугольника:

$$M_{1,2}(1;0), M_{2,2}\left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_{3,2}\left(\frac{-1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Мы находим экстремальные значения функции $\Psi_{s,2}(M; M_{1,2}, M_{2,2}, M_{3,2})$ в круге $\bar{W}_2(R)$ для $s = -1, 0, 1, 2$ и сравниваем эти значения с радиусом R этого круга. Так как точки $M_{1,2}, M_{2,2}, M_{3,2}$ фиксированы, то для простоты обозначений пишем просто $\Psi_{s,2}(M)$.

Среднее гармоническое.

$$\min_{M \in T_2(R)} \Psi_{-1,2}(M) = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{R^2+1-2R}} + \frac{2}{\sqrt{R^2+1+R}}} < R, \quad \forall R \geq 1; \quad (10)$$

$$\max_{M \in T_2(R)} \Psi_{-1,2}(M) = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{R^2+1+2R}} + \frac{2}{\sqrt{R^2+1-R}}} < R, \quad \forall R > \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \quad (11)$$

$$\max_{M \in T_2(R_0)} \Psi_{-1,2}(M) = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{R_0^2+1+2R_0}} + \frac{2}{\sqrt{R_0^2+1-R_0}}} = R_0,$$

где

$$R_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \quad (12)$$

$$\max_{M \in T_2(R)} \Psi_{-1,2}(M) = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{R^2+1+2R}} + \frac{2}{\sqrt{R^2+1-R}}} > R,$$

где

$$1 \leq R < \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \quad (13)$$

Замечание 3. В [1] Г. Поля и Г. Сеге, пользуясь свойствами полиномов Лежандра, доказывают, что неравенство (11) справедливо для $R \geq 5$. Сравнивая между собой (11), (12) и (13), мы видим, что неравенство (11) становится справедливым уже для $R > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$.

Кроме того, неравенство (13) справедливо при $1 \leq R < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, о чем в [1] не было сказано.

Среднее геометрическое.

$$\min_{M \in T_2(R)} \Psi_{0,2}(M) = \left(\left(\sqrt{R^2 + 1 - 2R} \right) \left(\sqrt{R^2 + 1 + R} \right)^2 \right)^{1/3} < R, \quad \forall R \geq 1, \quad (14)$$

$$\max_{M \in T_2(R)} \Psi_{0,2}(M) = \left(\left(\sqrt{R^2 + 1 + 2R} \right) \left(\sqrt{R^2 + 1 - R} \right)^2 \right)^{1/3} > R, \quad \forall R \geq 1. \quad (15)$$

Среднее арифметическое.

$$\min_{M \in T_2(R)} \Psi_{1,2}(M) = \frac{\sqrt{R^2 + 1 - 2R} + 2\sqrt{R^2 + 1 + R}}{3} > R, \quad \forall R \geq 1, \quad (16)$$

$$\max_{M \in T_2(R)} \Psi_{1,2}(M) = \frac{\sqrt{R^2 + 1 + 2R} + 2\sqrt{R^2 + 1 - R}}{3} > R, \quad \forall R \geq 1. \quad (17)$$

Среднее квадратичное.

$$\min_{M \in T_3(R)} \Psi_{2,2}(M) = \sqrt{R^2 + 1} > R, \quad \forall R \geq 1, \quad (18)$$

$$\max_{M \in T_2(R)} \Psi_{2,2}(M) = \sqrt{R^2 + 1} > R, \quad \forall R \geq 1. \quad (19)$$

Рассматривая (10) – (19), мы видим, что принцип устойчивости систем из трех точек $M_{1,2}$, $M_{2,2}$, $M_{3,2}$, имеет место для среднего геометрического при любом $R \geq 1$ и для среднего гармонического при любом R в промежутке $1 \leq R \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Для среднего арифметического он нарушается при любом $R \geq 1$, а для среднего гармонического – при любом $R > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$.

Литература

1. Поля Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 396 с.
2. Кирьяцкий Э.Г. О геометрическом среднем в k -мерном евклидовом пространстве // Современные проблемы математики и механики. Математика. Вып.3. – М.: Изд-во МГУ, 2011, Т. 6. – С. 1–12.
3. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э. Некоторые экстремальные свойства взвешенного арифметического среднего в евклидовом пространстве // Системы

компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. – Вып. 19. – С. 293–298.

4. Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э.. О среднем взвешенном гармоническом в k -мерном евклидовом пространстве // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. – 1918. –Т. 8, № 3. – С. 16–26.

Е.Е. Kirjackis, E.G. Kiriyatzkii
Vilnius Gediminas Technical University

ON SOME EXTREME PROPERTIES OF MEAN DISTANCES IN THE EUCLIDEAN SPACE

Keywords: *Euclidean space; circle; sphere; mean of distances.*

Abstract. *In the well-known book “Problems and theorems in analysis” by G. Polya and G. Szego the following problem is formulated: Suppose that a set of points is arbitrarily fixed in a circle and one variable point runs over the boundary of this circle. Then the geometric mean of the distances from this point to the fixed points has a maximum not less than the radius of the circle, and a minimum not greater than the radius of the circle. It turned out that in the case of the arithmetic mean for the minimum and the harmonic mean for the maximum, the above property of the geometric mean does not always hold. In this article, we find out why such a violation occurs.*

С.Ю. Курицын, К.М. Расулов
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО ТИПА

Ключевые слова: *метааналитическая функция первого типа; обобщенная краевая задача типа Римана; фредгольмовы ядра; гладкие кривые.*

В статье разработан общий алгоритм решения одной обобщенной краевой задачи типа задачи Римана в классах метааналитических функций первого типа в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами. Установлено, что решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению двух интегрально-дифференциальных скалярных задач Римана в классах аналитических функций комплексного переменного.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C_\mu^2$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

Обычно (см., например, [1, с. 139] или [2]) *кусочно метааналитической функцией с линией скачков L* называют функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая в двух дополняющих друг друга до расширенной комплексной плоскости областях T^+ и T^- определяется так:

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = [\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)]\exp\{\lambda_0\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = [\varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z)]\exp\left\{\lambda_0\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (1)$$

или

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z)\exp\{\lambda_1\bar{z}\} + \varphi_1^+(z)\exp\{\lambda_2\bar{z}\}, & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z)\exp\left\{\lambda_1\frac{\bar{z}}{z^m}\right\} + \varphi_1^-(z)\exp\left\{\lambda_2\frac{\bar{z}}{z^m}\right\}, & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi_k^\pm(z) \in A(T^\pm)$, $k=0,1$, а $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – некоторые постоянные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), $m \in \mathbb{N}$ и $m \geq 2$, причем существуют конечные пределы:

$$\lim_{z \rightarrow t \in L} F^+(z) = F^+(t), \quad \lim_{z \rightarrow t \in L} F^-(z) = F^-(t).$$

В дальнейшем функцию $F(z)$, задаваемую формулой (1), назовем *кусочно метааналитической функцией первого типа*, а функцию, задаваемую формулой (2), – *кусочно метааналитической функцией второго типа*.

Кроме того, кусочно метааналитическую функцию $F(z)$ вида (1) (или (2)) будем называть *исчезающей на бесконечности*, если $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1$ (или $\Pi\{\varphi_k^-, \infty\} \geq 1$), где $k=0,1$.

Наконец, будем говорить, что кусочно метааналитическая функция $F(z)$ с линией скачков L принадлежит классу $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, если ее аналитические компоненты $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) непрерывно продолжаются на границу L вместе со своими производными $\frac{d\varphi_k^\pm(z)}{dz}$ ($k=0,1$), причем так, что граничные значения функций $\varphi_k^\pm(z)$ ($k=0,1$) и указанных производных удовлетворяют на L условию Гёльдера.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно метааналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $M_2(T^\pm) \cap H^{(1)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_{11}(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L B_{11}(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x} d\tau + \int_L A_{10}(t, \tau) F^+(\tau) d\tau + \int_L B_{10}(t, \tau) F^-(\tau) d\tau = g_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_{21}(t, \tau) \frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L B_{21}(t, \tau) \frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y} d\tau + \int_L A_{20}(t, \tau) F^+(\tau) d\tau + \int_L B_{20}(t, \tau) F^-(\tau) d\tau = g_2(t), \quad (4)$$

где $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k=1, 2$) – заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_k(t) \neq 0$, а $A_{k,m}(t, \tau)$, $B_{k,m}(t, \tau)$ ($k=1, 2$; $m=0, 1$) – заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(3-k)}(L \times L)$.

Сформулированную выше краевую задачу будем называть *первой основной обобщенной краевой задачей типа Римана в классах метааналитических функций* или, короче, *задачей $GR_{1,M}$* , а соответствующую однородную задачу ($g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0$) – *задачей $GR_{1,M}^0$* .

В статье авторов [2] разработан метод решения задачи $GR_{1,M}$ в классах метааналитических функций второго типа (т.е. функций вида (2)) в случае, когда носителем краевых условий является единичная окружность. Основной целью настоящего сообщения является разработка общего метода решения задачи $GR_{1,M}$ в классах функций вида (1). Всюду в дальнейшем будем использовать обозначения и терминологию, принятую в монографии [1].

2. Метод решения задачи $GR_{1,M}$. Сначала с учетом формул (1) и $\partial/\partial x = \partial/\partial z + \partial/\partial \bar{z}$, $\partial/\partial y = i(\partial/\partial z - \partial/\partial \bar{z})$ краевые условия (3) и (4) перепишем в виде

$$\left\{ \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \lambda_0 \varphi_0^+(t) + (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t}) - G_1(t) \left\{ \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m) - G_1(t) \left\{ \left(\frac{\lambda_0}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_0^-(t) + \left(1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_1^-(t) \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m) + \int_L M_{10}(t, \tau) \varphi_0^+(\tau) d\tau + \int_L M_{11}(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L N_{10}(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau + \int_L N_{11}(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau = g_1(t), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \lambda_0 \varphi_0^+(t) - (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t}) - \\
& - G_2(t) \left\{ \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m) + \\
& + G_2(t) \left\{ \left(\frac{\lambda_0}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_0^-(t) + \left(1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_1^-(t) \right\} \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m) + \quad (6) \\
& + \int_L M_{20}(t, \tau) \varphi_0^+(\tau) d\tau + \int_L M_{21}(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \\
& + \int_L N_{20}(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau + \int_L N_{21}(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau = g_2(t),
\end{aligned}$$

где $M_{k,m}(t, \tau)$, $N_{k,m}(t, \tau)$ ($k=1, 2$; $m=0, 1$) – фредгольмовы ядра, которые вполне определенным образом выражаются через $G_k(t)$ и $A_{k,m}(t, \tau)$, $B_{k,m}(t, \tau)$ ($k=1, 2$; $m=0, 1$) (для экономии места мы здесь не выписываем их явные выражения), причем $M_{k,m}(t, \tau)$, $N_{k,m}(t, \tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$.

В свою очередь, из равенства (5) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \lambda_0 \varphi_0^+(t) - G_{10}(t) \left\{ \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \left(\frac{\lambda_0}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_0^-(t) \right\} + \\
& + \int_L T_{10}(t, \tau) \varphi_0^+(\tau) d\tau + \int_L H_{10}(t, \tau) \varphi_0^-(\tau) d\tau = Q_1(t), \quad (7)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{10}(t) &= \frac{G_1(t) \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m)}{\exp(\lambda_0 \bar{t})}, \quad T_{10}(t, \tau) = \frac{M_{10}(t, \tau)}{\lambda_0 \bar{t}}, \quad H_{10}(t, \tau) = \frac{N_{10}(t, \tau)}{\lambda_0 \bar{t}}, \\
Q_1(t) &= - \left\{ \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) \right\} + G_{10}(t) \left\{ \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \left(1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \right) \varphi_1^-(t) \right\} - \\
& - \int_L \frac{M_{21}(t, \tau)}{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_1^+(\tau) d\tau - \int_L \frac{N_{21}(t, \tau)}{\lambda_0 \bar{t}} \varphi_1^-(\tau) d\tau + \frac{g_2(t)}{\lambda_0 \bar{t}}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Предположим временно, что $Q_1(t)$ – известная функция. Тогда равенство (7) представляет собой краевое условие невырожденной интегро-дифференциальной задачи Римана (7) относительно кусочно аналитической функции $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$. Решая краевую задачу (7) методом, изложенным в § 2 монографии [1] (см. также [3] или § 36 монографии [4]), будем иметь:

$$\begin{aligned}
\varphi_0^+(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L Q_1(\tau) \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L R_{10}^+(z, \tau) Q_1(\tau) d\tau + E_{10}^+(z), \\
\varphi_0^-(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_{10}(\tau)} \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L R_{10}^-(z, \tau) Q_1(\tau) d\tau + E_{10}^-(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0^+(z)}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\partial R_{10}^+(z, \tau)}{\partial z} Q_1(\tau) d\tau + \frac{dE_{10}^+(z)}{dz}, \\ \frac{d\varphi_0^-(z)}{dz} &= \frac{z^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau Q_1(\tau)}{G_{10}(\tau) \tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\partial R_{10}^-(z, \tau)}{\partial z} Q_1(\tau) d\tau + \frac{dE_{10}^-(z)}{dz},\end{aligned}\quad (9)$$

где $R_{10}^+(z, \tau)$ ($R_{10}^-(z, \tau)$) – вполне определенная функция, аналитическая по переменной z в области T^+ (T^-), причем предельные значения $R_{10}^+(t, \tau) = \lim_{z \rightarrow t \in L} R_{10}^+(z, \tau)$ ($R_{10}^-(t, \tau) = \lim_{z \rightarrow t \in L} R_{10}^-(z, \tau)$) принадлежат классу $H_*^{(1)}(L \times L)$; здесь $E_{10}^+(z)$ и $E_{10}^-(z)$ – вполне определенные аналитические функции в T^+ и T^- соответственно.

С учетом формул Сохоцкого (см., например, [4, с. 38]) из (9) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} &= \frac{1}{2} Q_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\partial R_{10}^+(t, \tau)}{\partial t} Q_1(\tau) d\tau + \frac{dE_{10}^+(t)}{dt}, \quad t \in L, \\ \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{Q_1(t)}{G_{11}(t)} + \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau Q_1(\tau)}{G_{11}(\tau) \tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\partial R_{10}^-(t, \tau)}{\partial t} Q_1(\tau) d\tau + \frac{dE_{10}^-(t)}{dt}, \quad t \in L.\end{aligned}\quad (10)$$

В силу равенств (8) формулы (10) (после несложных преобразований) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} &= -\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) + \int_L W_{10}^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L W_{10}^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + p_0^+(t), \\ \frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} &= -\bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \left(1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}}\right) \varphi_1^-(t) + \int_L W_{20}^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \\ &+ \int_L W_{20}^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau + p_0^-(t), \quad t \in L,\end{aligned}\quad (11)$$

где $W_{k0}^+(t, \tau)$, $W_{k0}^-(t, \tau)$ ($k=1, 2$) – определенные фредгольмовы ядра, а $p_0^\pm(t)$ – вполне определенные на L функции, непрерывные в смысле Гельдера.

Наконец, подставив в правую часть равенства (6) вместо $\varphi_0^+(t)$, $\varphi_0^-(t) \frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}$ и $\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}$ их значения, определяемые по формулам (9) и (11), получаем

$$\begin{aligned}-2 \exp(\lambda_0 \bar{t}) \cdot (1 + \lambda_0 \bar{t}) \varphi_1^+(t) + 2G_2(t) \left(1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}}\right) \exp(\lambda_0 \bar{t} / t^m) \cdot \varphi_1^-(t) + \\ + \int_L W_{21}^+(t, \tau) \varphi_1^+(\tau) d\tau + \int_L W_{21}^-(t, \tau) \varphi_1^-(\tau) d\tau = Q_2(t), \quad t \in L,\end{aligned}\quad (12)$$

где $W_{21}^+(t, \tau)$, $W_{21}^-(t, \tau)$ – определенные фредгольмовы ядра, а $Q_2(t)$ – известная функция, непрерывная в смысле Гельдера на L .

Равенство (12) является граничным значением обобщенной краевой задачи Римана относительно кусочно аналитической функции

$\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$. При этом краевая задача (12) будет невырожденной тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$1 + \lambda_0 \bar{t} \neq 0, \quad 1 + \frac{\lambda_0 \bar{t}}{t^m} - \frac{m\lambda_0 \bar{t}}{t^{m+1}} \neq 0, \quad t \in L. \quad (13)$$

Описанные выше рассуждения приводят к следующему основному результату.

Теорема 1. Пусть $L \in C_\mu^2$ и выполняются условия (13). Тогда решение задачи $GR_{1,M}$ в классе кусочно метааналитических функций первого типа сводится к последовательному решению невырожденной обобщенной задачи Римана (12) и невырожденной интегро-дифференциальной задачи Римана (7) относительно неизвестных кусочно аналитических функций $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \varphi_1^-(z)\}$ и $\varphi_0(z) = \{\varphi_0^+(z), \varphi_0^-(z)\}$ соответственно.

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Kuritsyn S.Yu., Rasulov K.M. On a Generalized Riemann Problem for Metaanalytic Functions of the Second Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, No. 1. – P. 97-103.
3. Рогожин В.С. Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 4. – С. 191-193.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

S.Yu. Kuritsyn, K.M. Rasulov

Smolensk State University

ON SOLVING THE GENERALIZED PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR METAANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST TYPE

Keywords: *metanalytic functions of the first type; generalized boundary value problem of Riemann type; Fredholm kernels; smooth curves.*

Abstract. *In this article we develop a general algorithm of solving one generalized boundary value problem of Riemann type for metanalytic functions of the first type in case of simply connected areas with smooth boundaries. It is established that the solving of the considered problem reduces to consecutive solving of two integral-differential scalar Riemann boundary value problems in class of analytic functions of a complex variable.*

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Ключевые слова: *кусочно-гладкая кривая; конформное отображение; проектор; произведение областей.*

В данной работе строится ограниченный интегральный оператор, отображающий весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей с кусочно-гладкими границами.

Пусть $E_p(G)$ – класс Смирнова в области G ; $L^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций, для которых

$$\|f\|_{L^p(G)}^p = \int_G |f(z)|^p dm_2(z) < +\infty; 0 < p < +\infty,$$

где $dm_2(z)$ – плоская мера Лебега.

Как хорошо известно, интеграл типа Коши по границе ∂G отображает пространство $L^p(G)$ на $E_p(G)$ при всех $1 < p \leq +\infty$ (теорема М. Рисса). Исходя из результатов А.Н. Колмогорова, такой интегральный оператор не отображает пространство $L^1(G)$ на $E_1(G)$ и в том случае, если ∂G представляет собой единичную окружность. Как показал Дж. Ньюмен, такого интегрального оператора вообще нет.

Однако в пространствах Бергмана существует ограниченный проектор из $L^1(G)$ на соответствующее пространство Бергмана. Для гладких контуров эти результаты были получены Ф.А. Шамояном при всех $0 < p \leq 1$. А при $1 < p \leq +\infty$ их можно вывести из указанных выше результатов М. Рисса.

Актуальной является проблема обобщения данного результата для областей с более общими границами (см., например, [1] и литературу там).

Пусть класс (C) есть класс кривых Γ на комплексной плоскости, состоящих из конечного числа гладких дуг (Γ_j) , в точках стыка w_j ,

$j = \overline{1, n}$, образующих внутренние углы $\frac{\pi}{\alpha_j}, \frac{1}{2} \leq \alpha_j < +\infty, j = \overline{1, n}$, (см.,

например, [4] и литературу там).

Свойства областей с кусочно-гладкими границами, применяемые при доказательстве полученных результатов, изучались, в частности, в работах автора [3; 4].

Пространства функций на произведениях областей рассматривались, например, в работе [5].

Пусть G_j – некоторая односвязная область на комплексной плоскости, граница которой принадлежит классу (C). Рассмотрим $\{G_j\}_{j=1}^m$ – множество таких областей и $\tilde{G} = G_1 \times \dots \times G_m$.

Обозначим $L_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})$ – множество измеримых в \tilde{G} функций таких, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})} &= \int_{\tilde{G}} |f(w)|^p d^{\vec{\beta}}(w, \partial G) dm_{2m}(w) = \\ &= \int_{G_1} \dots \int_{G_m} |f(w_1, \dots, w_m)|^p \prod_{j=1}^m d^{\beta_j}(w_j, \partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty, \end{aligned}$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1, m}; dm_{2m} = dm_2 \dots dm_2$ – мера Лебега на \tilde{G} . Пусть также $A_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})$.

В работе [6] доказан результат, касающийся существования ограниченного проектора из L^p -весовых пространств в соответствующие пространства аналитических функций в областях со спрямляемой границей.

В качестве дальнейшего распространения данного результата нами доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\{G_j\}_{j=1}^m$ – некоторое множество односвязных областей на комплексной плоскости с границами класса (C), $\tilde{G} = G_1 \times \dots \times G_m$.

Пусть также $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ – множество функций, конформно отображающих единичный круг S на G_j , $\varphi_j(0) = w_0^j, w_0^j \in G_j, \varphi_j'(0) > 0, \psi_j = \varphi_j^{-1}, j = \overline{1, m}$.

Тогда интегральный оператор вида

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^n \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int_{G_1} \dots \int_{G_m} f(\mu_1, \dots, \mu_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m \frac{\left(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2\right)^{\eta_j} |\psi_j'(\mu_j)|^2}{\left(1 - \overline{\psi_j(\mu_j)} \psi_j(w_j)\right)^{\eta_j + 2}} dm_2(\mu_1) \dots dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает $L_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})$ на $A_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})$, $1 < p < +\infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$, при всех $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta})$, $j = \overline{1, m}$; и существует такая положительная постоянная $c = c(\vec{\beta}, p)$, что справедлива оценка $\|F\|_{A_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})} \leq c \|f\|_{L_{\vec{\beta}}^p(\tilde{G})}$.

Литература

1. Ткаченко Н.М. Весовые L_p -оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. – 116 с.
2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
3. Махина Н.М. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2017. – № 2. – С. 16-22.
4. Махина Н.М. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского государственного университета. – 2018. – Т. 23(3). – С. 47-51.
5. Шамоян Р.Ф., Максаков С.П. On some new estimates for a gradient of a function in product domains and related results // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т. 3(32). – С. 69-74.
6. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – Т. 5(2). – С. 192-210.

N.M. Makhina

Bryansk State University named after academician I. G. Petrovsky

ON THE BOUNDEDNESS OF SOME INTEGRAL OPERATORS IN DOMAINS WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARIES

Keywords: *piecewise smooth curve; conformal mapping; projector; product of domains.*

Abstract. *In this paper we construct a bounded integral operator, mapping the weight space of measurable functions on the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on the products of domains with piecewise smooth boundaries.*

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БАУЭРА В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Ключевые слова: задача Неймана; дифференциальное уравнение Бауэра; круговая область; явное решение.

В статье дается общая постановка краевой задачи типа задачи Неймана для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. Устанавливается, что в случае круговых областей рассматриваемая задача решается в явном виде, то есть ее общее решение можно найти, используя лишь формулы Ф.Д. Гахова для решения скалярной задачи сопряжения (задачи Римана) для аналитических функций комплексного переменного, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах.

1. Постановка задачи. Пусть $U_1^+ = \{z: |z| < 1\}$ – единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а T^+ – односвязная область, лежащая в круге U_1^+ (т.е. $T^+ \subset U_1^+$) и ограниченная простой гладкой замкнутой кривой L (см. рис. 1). Рассмотрим в области T^+ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n – некоторое неотрицательное

целое число, а $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция.

Поскольку впервые на некоторые качественные свойства решений дифференциального уравнения (1) обратил внимание К.В. Бауэр (K.W. Bauer) [1], то уравнение (1) в дальнейшем будем называть *дифференциальным уравнением Бауэра*. В монографии [2] достаточно подробно излагаются функциональные свойства решений дифференциального уравнения Бауэра, в частности, в ней установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические (голоморфные) в области T^+ функции.

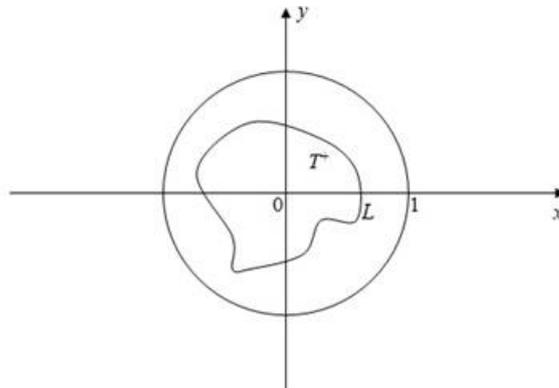


Рис. 1

Так как при $n=0$ решения уравнения (1) являются *гармоническими функциями* в области T^+ , в дальнейшем в случае $n \geq 1$ регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть *обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+* , а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), для удобства назовем соответственно *первой и второй аналитическими компонентами* обобщенной гармонической функции $W(z)$. При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $G_n(T^+)$, а через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т.е. $\varphi^+(z), f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все функции $W(z) \in G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$, удовлетворяющие на L условию:*

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = h(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_-}$ – производная по внешней нормали к L , а $h(t) = a(t) + ib(t)$ – заданная на L функция класса Гельдера $H(L)$.

Сформулированную задачу кратко будем называть *задачей GN_n* (или *задачей Неймана для обобщенных гармонических функций порядка n*).

Основной целью настоящей статьи является построение явного метода решения задачи GN_n в классах $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ в случае, когда $n=2$ и $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, где $0 < r < 1$.

2. О решении в явном виде задачи GN_2 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$. Пусть $L_r = \{t: |t| = r\}$ – граница круга $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$. В силу (2) при $n=2$ и $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ всякую обобщенную гармоническую функцию $W(z)$ из класса $G_2(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6\bar{z}}{1-z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}}\right)^2 \varphi^+(z) + \frac{\overline{d^2f^+(z)}}{dz^2} + \frac{6z}{1-z\bar{z}} \frac{\overline{df^+(z)}}{dz} + 12\left(\frac{z}{1-z\bar{z}}\right)^2 \overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где $\varphi^+(z), f^+(z)$ – аналитические в круге T_r^+ функции, принадлежащие классу $A(T^+) \cap H^{(3)}(L)$.

Так как на окружности $L_r = \{t: |t| = r\}$ выполняется тождество $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ и справедливо соотношение (см., например, [3, с. 37] или [4, с. 303])

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = t \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{r^2}{t} \frac{\partial W}{\partial \bar{t}}, \quad (5)$$

то (с учетом (4) и (5)) краевое условие (3) примет вид:

$$t^3 \cdot \frac{d^3\varphi^+(t)}{dt^3} + \frac{6r^2}{1-r^2} \cdot t^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)}{(1-r^2)^2} \cdot t \cdot \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{24r^4(r^2+1)}{(1-r^2)^3} \cdot \varphi^+(t) + \frac{t^4}{r^4} \cdot \left(t^3 \frac{d^3\overline{f^+(t)}}{dt^3} + \frac{6r^2}{1-r^2} t^2 \frac{d^2\overline{f^+(t)}}{dt^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)}{(1-r^2)^2} \cdot t \frac{d\overline{f^+(t)}}{dt} + \frac{24r^4(r^2+1)}{(1-r^2)^3} \cdot \overline{f^+(t)} \right) = t^2 \cdot h(t). \quad (6)$$

Далее, вводя в рассмотрение голоморфные в круге T_r^+ функции

$$\Phi^+(z) = z^3 \frac{d^3\varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{6r^2z^2}{1-r^2} \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)z}{(1-r^2)^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{24r^2(r^2+1)}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z), \quad (7)$$

$$F^+(z) = z^3 \frac{d^3\overline{f^+(z)}}{dz^3} + \frac{6r^2z^2}{1-r^2} \frac{d^2\overline{f^+(z)}}{dz^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)z}{(1-r^2)^2} \frac{d\overline{f^+(z)}}{dz} + \frac{24r^2(r^2+1)}{(1-r^2)^2} \cdot \overline{f^+(z)},$$

равенство (6) перепишем в виде

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^4}{r^4} \overline{F^+(t)} + t^2 \cdot h(t), \quad t \in L_r. \quad (8)$$

Наконец, обозначив через T_r^- дополнение замкнутого круга $T_r^+ \cup L_r$ до расширенной комплексной плоскости (т.е. $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$) и вводя в рассмотрение вспомогательную голоморфную в T_r^- функцию $F^-(z)$, связанную с $F^+(z)$ по формуле

$$F^-(z) = \overline{F^+\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^-, \quad (9)$$

равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^4}{r^4} F^-(t) + t^2 \cdot h(t), \quad t \in L_r. \quad (10)$$

Равенство (10) является граничным условием безусловно разрешимой краевой задачи Римана (задачи сопряжения) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), F^-(z)\}$ (см., например, [4, с. 106]). Общее решение задачи Римана (10) можно задавать в виде (см., например, [4, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{h(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{r^4} (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4), \quad z \in T_r^+, \quad (11)$$

$$F^-(z) = -\frac{r^4 z^{-4}}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{h(\tau)}{\tau - z} d\tau + \left(\frac{C_0}{z^4} + \frac{C_1}{z^3} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z} + C_4 \right), \quad z \in T_r^-, \quad (12)$$

где $C_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) – произвольные комплексные постоянные.

В силу (9) и (12) значения аналитической в T_r^+ функции $F^+(z)$ можно найти по формуле:

$$F^+(z) = \overline{F^-\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^+. \quad (13)$$

Теперь заметим, что в силу равенств (7) относительно аналитических функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ получаем следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера (см., например, [5, с. 136]):

$$z^3 \frac{d^3 \varphi^+(z)}{dz^3} + \frac{6r^2 z^2}{1-r^2} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)z}{(1-r^2)^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{24r^2(r^2+1)}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad (14)$$

$$z^3 \frac{d^3 f^+(z)}{dz^3} + \frac{6r^2 z^2}{1-r^2} \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \frac{6r^2(3r^2+1)z}{(1-r^2)^2} \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{24r^2(r^2+1)}{(1-r^2)^2} f^+(z) = F^+(z), \quad (15)$$

где $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ – аналитические функции, определяемые по формулам (11) и (13) соответственно.

Нетрудно проверить, что однородные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям (14) и (15), не имеют нетривиальных аналитических решений в круге T_r^+ , $0 < r < 1$. Следовательно, в случае их разрешимости, неоднородные уравнения (14) и (15) будут иметь единственные решения.

Предположим, что неоднородные дифференциальные уравнения (14) и (15) имеют аналитические в круге T_r^+ решения $\varphi_1^+(z)$ и $f_1^+(z)$ соответственно, которые принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(3)}(L)$. Тогда, поставив в правую часть формулы (4) вместо $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ функции

$\varphi_1^+(z)$ и $f_1^+(z)$ соответственно, получим решение искомой задачи GN_2 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$, то решение неоднородной задачи Неймана GN_2 в классе $G_2(T_r^+) \cap H^{(3)}(L_r)$ сводится к последовательному решению задачи сопряжения (10) и двух линейных дифференциальных уравнений (14) и (15), причем для разрешимости задачи GN_2 , необходимо и достаточно, чтобы линейные дифференциальные уравнения (14) и (15) были разрешимы в классе $A(T^+) \cap H^{(3)}(L)$. При выполнении этих условий, общее решение задачи GN_2 можно задавать формулой (4), где $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ – решения дифференциальных уравнений (14) и (15) соответственно.

Литература

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965. – Schriften 23.
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. – 253 p.
3. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.

T.R. Nagornaya, K.M. Rasulov
Smolensk State University

ON THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR BAUER DIFFERENTIAL EQUATION IN CIRCULAR DOMAINS

Keywords: Neumann boundary value problem; Bauer differential equation; circular domain; explicit solution.

Abstract. The article is devoted to the boundary value problem of Neumann problem's type for solution of the one second-order elliptic differential equation. It's established, that in the case of circular domains the given problem is solved explicitly, i.e. its general solution can be found using solely formulas of F.D. Gahov for the solution scalar Riemann problem for analytic functions of a complex variable, and also solving a finite number of linear differential equations and (or) the systems of linear algebraic equations, for which the system matrix can be written out in quadratures.

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ВЕС

Ключевые слова: *целая функция; вес; корневые множества; фактор бесконечного произведения; считающая функция.*

В комплексном анализе особое место отводится изучению различных классов целых функций комплексных переменных. В статье описан класс целых функций в комплексной плоскости, имеющих экспоненциальный вес. Доказательство основного результата строится с использованием вспомогательных утверждений, справедливость которых устанавливается с помощью основных методов комплексного анализа.

1. Введение

Обозначим через C комплексную плоскость. $H(C)$ – множество всех целых функций в C .

Для $0 < \alpha < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$ определим класс функций:

$$A_{\alpha, \sigma}(C) = \left\{ f \in H(C) : \int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, f) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty \right\}.$$

Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|z_k| \leq |z_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$, $|z_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Пусть $q \in N$, $z \in C$, тогда $A_q(z, z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^q \left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right)$ – фактор бесконечного произведения Вейерштрасса порядка q .

Если $f \in H(C)$, то $Z_f = \{z \in C : f(z) = 0\}$. Обозначим $n(r) = \text{card}\{z_k : |z_k| \leq r\}$, $0 < r < +\infty$. Если $Z = Z_f$, то соответствующую считающую функцию назовём n_f .

В данной работе получено описание класса $A_{\alpha, \sigma}(C)$ при $\alpha \notin N$, $0 < \alpha < +\infty$.

Ранее автором рассматривались аналогичные задачи для L_p -весовых классов целых функций типа Валирона в комплексной плоскости, а

также для классов субгармонических функций, имеющих экспоненциальный вес (см. [1; 2]).

При доказательстве основного результата работы использовались методы, изложенные в [1 – 5].

2. Формулировка основного результата

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < +\infty$, $\alpha \notin N$, $0 < \sigma < +\infty$. Тогда равносильны следующие утверждения:

a) $f \in A_{\alpha, \sigma}(C)$;

b) f допускает представление

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^q \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right) \exp(h(z)),$$

где $z \in C$, $h(z)$ – многочлен степени m , $m < \alpha$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{n(r)e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty.$$

3. Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$, $\psi(R)$ – неотрицательная монотонно растущая функция, причём $\int_1^{+\infty} \psi(x)e^{-\sigma x^\alpha} dx < +\infty$. Тогда $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\psi(R)e^{-\sigma R^\alpha}}{R^{1-\alpha}} = 0$.

Лемма 2. Пусть $\psi(x) = \sigma x^\alpha$, $x \in R_+$, $R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$, $\varepsilon_x = \frac{1}{x^\alpha}$.

Тогда $e^{\psi(x+\varepsilon_x)} = e^{\psi(x)} \cdot e^{\beta(x)}$, где $\beta(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство лемм 1 и 2 приведено в работе [2].

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < +\infty$, $\alpha \notin N$, $0 < \sigma < +\infty$. Тогда утверждения равносильны:

a) найдётся $f \in A_{\alpha, \sigma}(C)$, такая, что $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно представить в виде $Z = Z_f$;

b) $\int_1^{+\infty} \frac{n(r)e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty$.

Доказательство. Функция $n(r)$ монотонна на R_+ . Пусть $f \in A_{\alpha, \sigma}(C)$, $Z = Z_f$. Докажем сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{n(r)e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty$.

Применяя неравенство Иенсена, имеем $n_f(r) \leq \ln M(er, f) + C_f$. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} \frac{n_f(r) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln M(er, f) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr \leq e^{\alpha-1} \int_e^{+\infty} \frac{\ln M(t, f) e^{-\sigma t^\alpha}}{t^\alpha} dt < +\infty.$$

Покажем справедливость обратного утверждения.

Рассмотрим $E_q(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} A_q(z, z_k)$.

$E_q(z, z_k)$ сходится на компактных подмножествах C при $E_q(z, z_k) \in A_{\alpha, \sigma}(C)$.

Произведение $E_q(z, z_k) \in A_{\alpha, \sigma}(C)$. Это несложно показать, применяя оценку произведения Вейерштрасса:

$$\ln M(r, E_q) \leq K_q \left(r^q \int_1^r t^{-q-1} n(t) dt + r^{q+1} \int_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t) dt \right), \quad |z| = r.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, E_q) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr \leq K_q \left(\int_1^{+\infty} \frac{\left(\int_1^r t^{-q-1} n(t) dt \right) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^{\alpha-q}} dr + \int_1^{+\infty} \frac{\left(\int_r^{+\infty} t^{-q-2} n(t) dt \right) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^{\alpha-q-1}} dr \right) = K_q (I_1 + I_2).$$

Сходимость обоих интегралов несложно показать, применяя методы, изложенные в [1]. Тогда $E_q(z, z_k) \in A_{\alpha, \sigma}(C)$ (с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$).

Из сходимости интегралов I_1, I_2 следует, что $\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, E_q) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty$.

При этом $q > \alpha - 1$, $\alpha \notin N$, $0 < \alpha < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1.

Покажем, что из пункта а) следует б). Предположим, что $f \in A_{\alpha, \sigma}(C)$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ – корни f . Получаем, что по теореме 2:

$$\int_1^{+\infty} \frac{n(r) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty, \quad \text{сходится } E_q(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \left(\sum_{j=1}^q \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k} \right)^j \right) \quad \text{при}$$

$\alpha - 1 < q$, $E_q(z, z_k) \in A_{\alpha, \sigma}(C)$.

Тогда $g(z) = \frac{f(z)}{E_q(z, z_k)}$, $z \in C$, принадлежит $H(C)$, при этом

$g(z) \neq 0$, $z \in C$.

Покажем, что $g(z) = \exp(h(z))$. Причём $h(z)$ – многочлен степени m , $m < \alpha$. Докажем, что $g \in A_{\alpha, \sigma}(C)$.

Согласно равенству $\ln |g(z)| = \ln |f(z)| - \ln |E_q(z, z_k)|$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^- |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi,$$

где $\ln^- |a| = \max(0, -\ln |a|)$, $a \in \mathbb{C}$.

С учётом равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^- |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi$$

воспользуемся равенством Йенсена:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^- |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi + \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |E_q(re^{i\varphi}, z_k)| d\varphi \leq \ln M(r, E_q).$$

Из последних оценок вытекает:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \leq C \ln M(r, E_q) + \ln M(r, f).$$

Для произвольных $0 < r < R$ получим:

$$\ln M(r, g) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R+r}{R-r} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |g(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Пусть $R = 2r$, тогда согласно оценке

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \leq C \ln M(r, E_q) + \ln M(r, f) \text{ имеем}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, g) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr &\leq C_1 \left(\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(2r, E_q) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr + \int_1^{+\infty} \frac{\ln M(2r, f) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr \right) = \\ &= C_2 \left(\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, E_q) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr + \int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, f) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr \right) < +\infty, \end{aligned}$$

то есть $g \in A_{\alpha, \sigma}(C)$, при этом $g(z) \neq 0$, $z \in C$.

Тогда $g(z) = \exp(h(z))$, $h(z)$ – целая функция. Пусть $u(z) = \operatorname{Re} h(z)$, $z \in C$. Не ограничивая общности, предположим: $u(z) \geq 1$.

Из того, что функция g принадлежит классу $A_{\alpha, \sigma}(C)$, получаем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \tilde{M}(r, u) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty, \text{ где } \tilde{M}(r, u) = \max(u, 0). \text{ Применяя теорему о}$$

среднем и предыдущие рассуждения, имеем: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, u) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty.$

Согласно монотонности функции $\ln M(r, u)$ и сходимости последнего

интеграла, получаем $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{M(R, u)}{R^{\rho p}} = 0$. По формуле Шварца, имеем:

$h(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$, где $k < \alpha$. Причём $\int_1^{+\infty} \frac{\ln M(r, h) e^{-\sigma r^\alpha}}{r^\alpha} dr < +\infty$. Учитывая, что $M(r, h) \approx |h_m| r^m$, имеем: $m < \alpha$.

Обратное утверждение очевидно. Теорема 1 доказана.

Литература

1. Охлупина О.В. Обобщение одной теоремы Валирона на случай целых функций // Вестник Брянского государственного университета: Педагогика. Психология. История. Право. Литературоведение. Языкознание. Экономика. Точные и естественные науки. – Брянск: БГУ, 2015. – № 3(26). – С. 400-408.
2. Охлупина О.В. Об одном весовом классе субгармонических функций // Вестник Башкирского университета. Серия: Математика и механика. – 2018. – Т. 23, № 1. – С. 23-26.
3. Охлупина О.В. Потенциалы типа Грина и интегральные представления весовых классов субгармонических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Брянск, 2012. – 118 с.
4. Шамоян Ф.А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сибирский матем. журнал. – 1999. – Т.40, №6. – С. 1422-1440.
5. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых L_p -классов мероморфных функций. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.
6. Boas, R.P. Entire functions. – New York: Acad. Press, Ink., 1989.
7. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973.

O.V. Okhlupina

Bryansk State Engineering-Technological University

DESCRIPTION OF SOME CLASSES OF INTEGER FUNCTIONS THAT HAVE EXPONENTIAL WEIGHT

Keywords: entire function; weight; root sets; factor of infinite product; counting function.

Abstract. In complex analysis, a special place is given to the study of various classes of integral functions of complex variables. The article describes a class of integer functions in the complex plane that have exponential weight. The proof of the main result is constructed using auxiliary statements, the validity of which is established using the main methods of complex analysis.

**О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ
С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

Ключевые слова: аналитическая функция; бианалитическая функция; квазигармоническая функция; аналитическая кривая; дифференциальное уравнение; функция Шварца.

В работе рассматривается краевая задача Дирихле для квазигармонических функций в односвязных областях с аналитическими границами. Методом аналитического продолжения и на основе тесной функциональной связи между бианалитическими и квазигармоническими функциями комплексного переменного разработан конструктивный алгоритм решения рассматриваемой задачи. Полученный метод иллюстрируется на конкретном примере.

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область с аналитической границей Γ на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, содержащая точку $z = 0$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup \Gamma)$.

Всюду в дальнейшем в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографиях [1–2].

Напомним [1], что квазигармоническими функциями рода n в области T^+ называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, а n – некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [2–5], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (2)$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+

функция, называемая аналитической компонентой квазигармонической функции $W(z)$.

Определение 1. Будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap E_1^{(m)}$, если в представлении (2) аналитическая компонента $\varphi^+(z)$ принадлежит классу Смирнова E_1 (см. [6] или [7]) вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача D_n . Требуется найти все квазигармонические функции рода n ($n \geq 1$), принадлежащие классу $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap E_1^{(n)}$, угловые граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют условию

$$W(t) = g(t), \quad (3)$$

где $g(t)$ – заданная функция класса $L_1(\Gamma)$ (т.е. $g(t)$ – интегрируемая в смысле Лебега на Γ функция).

Следуя [5], сформулированную выше задачу D_n будем называть задачей Дирихле для квазигармонических функций рода n . Соответствующую D_n однородную задачу ($g(t) \equiv 0$) будем называть задачей D_n^0 .

Определение 2. Конечную односвязную область T^+ с аналитической границей Γ будем называть областью типа M , если уравнение Шварца кривой Γ имеет вид (см. также [1, с. 246]):

$$\bar{z} = \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] G_1(z), \quad (5)$$

где $P(z)$, $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общего делителя, отличного от константы, и все нули которых находятся внутри области T^+ , а $G_1(z)$ – аналитическая в T^+ функция, не имеющая в ней нулей.

Замечание 1. Отметим, что в случае, когда рассматриваемая область T^+ есть круг $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $r > 0$, то уравнение Шварца ее границы (т.е. окружности $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$) задается в виде

$$\bar{z} = \frac{r^2}{z}, \quad (6)$$

(в этом случае имеем: $P(z) = r^2$, $Q(z) = z$, $G_1(z) \equiv 1$).

Ранее в работах авторов (см., например, [2; 5]) задача D_n была подробно исследована в случае $n=1$ в круговых областях $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $r > 0$, причем в этих работах было установлено, что в единичном круге $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ однородная задача D_1^0 имеет нетривиальные решения, а во всех круговых областях вида $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $r \neq 1$, однородная задача D_1^0 не имеет нетривиальных решений.

Основной целью настоящего сообщения является разработка конструктивного метода решения задачи D_n при $n=1$ в областях типа M .

2. О решении однородной задачи D_1^0 в областях типа M . Пусть T^+ есть область типа M , границей которой служит аналитическая кривая Γ , задаваемая уравнением Шварца вида (5). Рассматривается следующая краевая задача D_1^0 : *требуется найти все квазигармонические функции $W(z)$ рода $n=1$, принадлежащие классу $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap E_1^{(1)}$, угловые граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют следующему условию:*

$$W(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (7)$$

Поскольку решения задачи D_1^0 ищутся в классе $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap E_1^{(1)}$, то в силу (2) эти решения могут быть представлены в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\varphi^+(z), \quad (8)$$

где $\varphi^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, принадлежащая классу Смирнова E_1 вместе со своей производной (т.е. $\varphi^+(z) \in E_1$ и $\frac{d\varphi^+(z)}{dz} \in E_1$).

В работе авторов [1] было установлено, что аналитическая компонента $\varphi^+(z)$ всякого решения однородной задачи D_1^0 в области T^+ , ограниченной аналитической кривой Γ с уравнением Шварца $\bar{z} = \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] G_1(z)$, должна удовлетворять в области T^+ линейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2P(z)G_1(z)}{Q(z) + zP(z)G_1(z)}\varphi^+(z) = 0, \quad z \in T^+. \quad (9)$$

С другой стороны, известно (см., например, [3]), что для всякой квазигармонической в области T^+ функции $W(z)$ первого рода функция $F(z)$, задаваемая формулой

$$F(z) = (1 + z\bar{z})W(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

будет *бианалитической* в этой области.

В дальнейшем бианалитическую в области T^+ функцию $F(z)$, определяемую по формуле (10), будем называть *привязанной* к квазигармонической функции $W(z)$ рода $n=1$, и, наоборот, квазигармоническую функцию $W(z)$ назовем *привязанной* к бианалитической функции $F(z)$, если справедлива формула (10).

В силу формулы (8) бианалитическую функцию $F(z)$, *привязанную* к $W(z)$, можно представить так:

$$F(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} + \bar{z} \cdot \left(z \frac{d\varphi(z)}{dz} - 2\varphi(z) \right). \quad (11)$$

Из равенства (10) видно, что если квазигармоническая функция $W(z)$ почти всюду на Γ имеет нулевые угловые граничные значения, то и привязанная к ней бианалитическая функция $F(z)$ также будет иметь почти всюду на Γ нулевые угловые граничные значения. Значит, если $W(z)$ является нетривиальным решением однородной задачи D_1^0 , то привязанная к $W(z)$ бианалитическая функция $F(z)$ будет нетривиальным решением однородной задачи Дирихле в классах бианалитических функций (см., например, [1, с. 230]). Но, как известно (см. [1, с. 247]), всевозможные нетривиальные решения однородной задачи Дирихле для бианалитических функций в областях типа M задаются формулой

$$F_0(z) = (\bar{z}Q(z) - P(z)G_1(z))f(z), \quad z \in T^+, \quad (12)$$

где $f(z)$ – произвольная аналитическая в области T^+ функция класса Смирнова E_1 , удовлетворяющая условию

$$f(z) = o\left(\frac{1}{\bar{z} - S(z)}\right), \quad (13)$$

когда $z \rightarrow t \in \Gamma$ по любому пути, некасательному к Γ (здесь $S(z) = \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] G_1(z)$ – функция Шварца кривой Γ).

Нетрудно проверить, что в силу (11) и (12) аналитическая компонента квазигармонической функции $W_0(z)$, привязанной к бианалитической функции $F_0(z)$, задается формулой:

$$\varphi_0^+(z) = -\frac{f(z)}{2} [Q(z) + zP(z)G_1(z)]. \quad (14)$$

Следовательно, сама квазигармоническая функция $W_0(z)$, привязанная к бианалитической функции $F_0(z)$, будет иметь вид:

$$W_0(z) = -\frac{1}{2} \frac{df(z)}{dz} [Q(z) + zP(z)G_1(z)] - \frac{f(z)}{2} \frac{d(Q(z) + zP(z)G_1(z))}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{f(z)}{2} [Q(z) + zP(z)G_1(z)], \quad z \in T^+. \quad (15)$$

Так как функция $W_0(z)$, задаваемая формулой (15), является решением однородной задачи D_1^0 , ее аналитическая компонента $\varphi_0^+(z)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (9), т.е. $(Q(z) + zP(z)G_1(z)) \frac{df(z)}{dz} + \left(\frac{dQ(z)}{dz} + z \frac{d[P(z)G_1(z)]}{dz} - P(z)G_1(z) \right) f(z) \equiv 0, \quad z \in T^+. \quad (16)$

Таким образом, для того, чтобы функция вида (15) была решением задачи D_1^0 , необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ являлась решением линейного дифференциального уравнения (16), удовлетворяющим условию (13).

Замечание 2. Важно отметить, что в случае, когда $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{df(z)}{dz} + \frac{1-r^2}{1+r^2} \frac{1}{z} f(z) \equiv 0, \quad z \in T^+. \quad (17)$$

Нетрудно проверить (например, методом степенных рядов), что дифференциальное уравнение (17) имеет нетривиальные аналитические в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ решения лишь при $r=1$, причем при $r=1$ из (17) получаем $f(z) = C$, $C = const$.

Таким образом, из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Общее решение однородной краевой задачи D_1^0 в областях типа M задается формулой (15), где $f(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, удовлетворяющая условию (13) и дифференциальному уравнению (16).*

3. Метод решения неоднородной задачи D_1 в областях типа M . Далее рассматривается следующая краевая задача D_1 : *требуется найти все квазигармонические функции рода $n=1$, принадлежащие классу $Q_1(T^+) \cap E_1^{(1)}$, угловые граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют условию*

$$W(t) = g(t), \quad (18)$$

где $g(t)$ – заданная функция класса $L_1(\Gamma)$ (т.е. $g(t)$ – интегрируемая в смысле Лебега на Γ функция).

Поскольку краевая задача D_1 является *линейной*, то (в случае её разрешимости) общее решение этой задачи представляется в виде

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z), \quad (19)$$

где $W_0(z)$ – общее решение соответствующей *однородной задачи D_1^0* , а $W_1(z)$ – какое-нибудь частное решение рассматриваемой *неоднородной задачи D_1* . Следовательно, для полного решения неоднородной задачи D_1 достаточно найти *общее решение $W_0(z)$ соответствующей однородной задачи D_1^0* и функцию $W_1(z)$, являющейся *частным решением неоднородной задачи D_1* .

В предыдущем пункте был разработан метод отыскания общего решения $W_0(z)$ однородной задачи D_1^0 в областях *типа M* . Ниже приводится метод отыскания частного решения неоднородной задачи D_1 в областях *типа M* .

Предположим, что квазигармоническая функция

$$W_1(z) = \frac{d\phi_1^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} \phi_1^+(z), \quad (20)$$

где $\varphi_1^+(z)$ – аналитическая в области T^+ функция, принадлежащая классу Смирнова E_1 вместе со своей производной первого порядка, является частным решением неоднородной задачи D_1 в области типа M . Рассмотрим бианалитическую функцию $F_1(z)$, привязанную к $W_1(z)$, т.е. функцию вида

$$F_1(z) = \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \bar{z} \cdot \left(z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 2\varphi_1(z) \right). \quad (21)$$

Легко проверить, что функция $F_{1\Gamma}(z)$, согласованная с $F_1(z)$ на кривой Γ (см., например, [1, с. 232]), задаваемой уравнением Шварца (5), будет иметь вид:

$$F_{1\Gamma}(z) = \frac{Q(z) + zP(z)G_1(z)}{Q(z)} \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \frac{2P(z)G_1(z)}{Q(z)} \varphi_1^+(z). \quad (22)$$

Известно (см., например, [8, с. 61]), что угловые граничные значения бианалитической функции (21) и согласованной функции (22) совпадают, если выполняются условия:

$$\left(z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 2\varphi_1(z) \right) = o\left(\frac{1}{\bar{z} - S(z)} \right), \quad (23)$$

когда $z \rightarrow t \in \Gamma$ по любому пути, некасательному к Γ (здесь $S(z) = \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] G_1(z)$ – функция Шварца кривой Γ).

Из формулы (22) видно, что функция $\Phi^+(z) = Q(z)F_{1\Gamma}(z)$ будет аналитической в области T^+ функцией, принадлежащей классу Смирнова E_1 . Поскольку при выполнении условий (23) угловые граничные значения функции $\Phi^+(z) = Q(z)F_{1\Gamma}(z)$ совпадают с угловыми граничными значениями функции $Q(z)(1 + z\bar{z})W_1(z)$, где $\bar{z} = P(z)G_1(z)/Q(z)$, то, умножив обе части равенства (18) на $Q(t) + tP(t)G_1(t)$, получим

$$\Phi^+(t) = \{Q(t) + tP(t)G_1(t)\}g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Таким образом, функция $\{Q(t) + tP(t)G_1(t)\}g(t)$ должна быть граничным значением аналитической в T^+ функции $\Phi^+(z) \in E_1$, а значит, она должна удовлетворять следующим условиям (см., например, [6, с. 202]):

$$\int_{\Gamma} \{Q(t) + tP(t)G_1(t)\}g(t) \cdot t^j dt = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

Замечание 4. Здесь важно отметить (см. также [7, с. 420]), что условия (24) необходимы и достаточны, чтобы для функции $\Phi^+(z)$, определяемой интегралом типа Коши

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\{Q(\tau) + \tau P(\tau)G_1(\tau)\}g(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in T^+, \quad (25)$$

была справедлива интегральная формула Коши, т.е.

$$\int_{\Gamma} \frac{\{Q(\tau) + \tau P(\tau)G_1(\tau)\}g(\tau)}{\tau - z} d\tau \equiv 0, \quad z \in T^-. \quad (26)$$

Далее заметим, что при выполнении условий (24) функция $\Phi^+(z)$, определяемая формулой (26), является аналитической в T^+ функцией из класса Смирнова E_1 . Значит, умножив обе части равенства (22) на $Q(z)$, получаем относительно аналитической компоненты $\varphi_1^+(z)$ искомой квазигармонической функции следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\{Q(z) + zP(z)G_1(z)\} \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - 2P(z)G_1(z)\varphi_1^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+. \quad (27)$$

Замечание 5. Отметим, что в случае, когда $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, уравнение (26) принимает следующий простой вид:

$$(1+r^2)z \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - 2r^2\varphi_1^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+. \quad (28)$$

Итак, для того чтобы квазигармоническая функция (20) являлась решением неоднородной задачи D_1 , необходимо, чтобы выполнялись условия (24) и аналитическая компонента $\varphi_1^+(z)$ этой функции удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению (27) и условию (23).

Покажем, что эти условия и достаточны для того, чтобы функция вида (20) являлась решением неоднородной задачи D_1 .

Действительно, предположим, что функция $g(t)$ удовлетворяет условиям (24) и аналитическая в области T^+ функция $\tilde{\varphi}_1^+(z)$ из класса Смирнова E_1 удовлетворяет условию (23) и является частным решением дифференциального уравнения (27). Покажем, что тогда квазигармоническая в области T^+ функция вида

$$\tilde{W}_1(z) = \frac{d\tilde{\varphi}_1^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}\tilde{\varphi}_1^+(z) \quad (29)$$

будет частным решением неоднородной задачи D_1 . Действительно, из тождества

$$\{Q(z) + zP(z)G_1(z)\} \frac{d\tilde{\varphi}_1^+(z)}{dz} - 2P(z)G_1(z)\tilde{\varphi}_1^+(z) \equiv \Phi^+(z), \quad z \in T^+,$$

где $\Phi^+(z)$ определяется формулой (25), получаем равенство

$$\frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - \frac{2P(z)G_1(z)}{Q(z) + zP(z)G_1(z)}\varphi_1^+(z) = \frac{\Phi^+(z)}{Q(z) + zP(z)G_1(z)} \quad (30)$$

во всех точках T^+ , за исключением нулей функции $Q(z) + zP(z)G_1(z)$. Следовательно, в силу (26) из (30) при $z \rightarrow t \in \Gamma$ по любому пути, некасательному к Γ , почти всюду будем иметь:

$$\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \frac{2P(t)G_1(t)}{Q(t)+tP(t)G_1(t)}\varphi_1^+(t) = g(t), \quad t \in \Gamma. \quad (31)$$

Но так как в силу (5) на Γ справедливо соотношение $\bar{t} = \left[\frac{P(t)}{Q(t)} \right] G_1(t)$, равенство (31) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \frac{2\bar{t}}{1+\bar{t}}\varphi_1^+(t) = g(t), \quad t \in \Gamma,$$

то есть функция (29) является частным решением неоднородной задачи D_1 .

Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Для того чтобы квазигармоническая функция $W_1(z)$ вида (20) являлась решением неоднородной задачи D_1 в областях типа M , необходимо и достаточно, чтобы относительно функции $g(t)$ выполнялись условия (24) и аналитическая компонента $\varphi_1(z)$ функции $W_1(z)$ являлась решением дифференциального уравнения (27), удовлетворяющим условию (23).

Наконец, на основании лемм 1 и 2 можно сформулировать следующее важное утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы неоднородная задача D_1 в областях типа M была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы относительно функции $g(t)$ выполнялись условия (24) и линейное дифференциальное уравнение вида (27) было разрешимо в классах аналитических функций, принадлежащих классу Смирнова E_1 и удовлетворяющих условию (27). При выполнении указанных условий общее решение задачи D_1 можно задавать формулой (19), где $W_0(z)$ – общее решение соответствующей однородной задачи D_1^0 , а $W_1(z)$ – какое-нибудь частное решение рассматриваемой неоднородной задачи D_1 .

Пример. Пусть $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$. Требуется найти все квазигармонические функции рода $n=1$, принадлежащие классу $Q_1(T_r^+) \cap E_1^{(1)}$, угловые граничные значения которых почти всюду на $\Gamma_r = \{t: |t| = r\}$ удовлетворяют условию

$$W(t) = \frac{2t}{1+r^2}. \quad (32)$$

Решение. Здесь (см. также замечание 1) уравнение Шварца кривой Γ_r имеет вид: $\bar{z} = \frac{r^2}{z}$, то есть $P(z) = r^2$, $Q(z) = z$, $G_1(z) \equiv 1$, а $g(t) = \frac{2t}{1+r^2}$. В силу замечания 2 в данном случае однородная задача D_1^0 не имеет нетривиальных решений. Значит, неоднородная задача D_1 , в случае ее

разрешимости, будет иметь единственное решение. Нетрудно проверить, что для функции $g(t) = \frac{2t}{1+r^2}$ условия (24) выполняются и дифференциальное уравнение (27) в данном случае имеет вид:

$$(1+r^2)z \frac{d\varphi_1^+(z)}{dz} - 2r^2\varphi_1^+(z) = 2z^2, \quad z \in T^+. \quad (33)$$

Методом степенных рядов легко проверить, что единственным аналитическим в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ решением дифференциального уравнения (33) является функция $\varphi_1^+(z) = z^2$, причем эта функция удовлетворяет условию (23). Следовательно, согласно формуле (20), единственное решение задачи (32) можно задавать так:

$$W(z) = 2z - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}}z^2, \quad \text{или} \quad W(z) = \frac{2z}{1+z\bar{z}}.$$

Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.
2. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 188 с.
3. Heersink R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum. – 1986. – Bericht № 268.
4. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. – 1965, Schriften 23.
5. Попков А.Е., Расулов К.М. О единственности решения задачи Дирихле для квазигармонических функций в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: матер. междунар. конф. Вып. 17. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016.
6. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.–Л., 1950. – 337 с.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
8. Balk M.V. Polyanalytic functions. – Berlin: Akademie Verlag, 1991. – 192 p.

A.E. Popkov, K.M. Rasulov
Smolensk State University

ON SOLVING THE GENERALIZED PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR METAANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST TYPE

Keywords: *analytic function, bianalytic function; quasiharmonic function; analytic curve; differential equation; Schwartz function.*

Abstract. *The paper considers the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in simply connected domains with analytic functions. By the method of analytical continuation and on the basis of a close functional relationship between the bianalytic and quasi-harmonic functions*

of a complex variable, a constructive algorithm for solving the problem under consideration is developed. The resulting method is illustrated by a specific example.

Е.А. Ровба, Н.Ю. Козловская

*Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы*

УДК 517.5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РАЦИОНАЛЬНЫЙ РЯД ДЛЯ ФУНКЦИИ $|\sin x|$

Ключевые слова: рациональный тригонометрический ряд Фурье; коэффициенты Фурье.

Тригонометрические полиномиальные ряды Фурье нашли широкое применение в различных областях науки и практики. В частности, известно достаточно много интересных представлений для элементарных функций как сумм соответствующих тригонометрических рядов Фурье (см., например, [1; 2]).

Рациональные тригонометрические ряды Фурье как обобщение соответствующих полиномиальных рядов были построены М.М. Джрбашьяном [3]. В этой работе получены также признаки Дини-Липшица и Жордана-Дирихле сходимости рациональных тригонометрических рядов Фурье для случая, когда полюсы рациональных функций не имеют предельных точек на единичной окружности.

В настоящей работе построен рациональный ряд Фурье для функции $|\sin x|$.

Пусть $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, α_k – произвольные комплексные числа, такие, что $|\alpha_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим систему рациональных функций на единичной окружности $|z|=1$:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_k|^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-\alpha_k z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Введем обозначение:

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} \varphi_k(z), & k \in \mathbb{N}_0, \\ \varphi_{-k}(z), & k < 0. \end{cases}$$

В [3] было показано, что система функций $\{\Phi_n(z)\}_{-\infty}^{+\infty}$ ортогональна на окружности $|z|=1$.

Разложим функцию $|\sin x|$ в ряд Фурье по системе функций $\{\Phi_n(z)\}$:

$$|\sin x| \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \Phi_k(z), \quad z = e^{ix}. \quad (1)$$

Коэффициенты Фурье для ряда (1) определяются по формулам

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \overline{\Phi_k(e^{ix})} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Используя формулу (2), найдем значение коэффициента c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-\cos x)|_0^{\pi} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Вычислим теперь коэффициенты c_k при $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cdot \overline{\varphi_k(e^{ix})} dx = \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin x|}{1-\alpha_k e^{-ix}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-ix} - \overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j e^{-ix}} dx = \\ &= \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{e^{ix}}{e^{ix} - \alpha_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} e^{ix}}{e^{ix} - \alpha_j} dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \frac{1}{1 - \alpha_k e^{ix}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{e^{ix} - \overline{\alpha_j}}{1 - \alpha_j e^{ix}} dx \right). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{При } k=1 \text{ имеем: } c_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{1}{e^{ix}} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot e^{ix} dx \right) = 0.$$

При $k \geq 2$ в формуле (3) выполним замену $\xi = e^{ix}$, получим $d\xi = i\xi dx$,

$$c_k = \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} \left(\int_C \frac{\xi - 1/\xi}{2i} \cdot \frac{\xi}{\xi - \alpha_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} \xi}{\xi - \alpha_j} \frac{d\xi}{i\xi} + \int_C \frac{\xi - 1/\xi}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_k \xi} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\xi - \overline{\alpha_j}}{1 - \alpha_j \xi} \frac{d\xi}{i\xi} \right),$$

где $C = \{\xi: \xi = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} c_k &= \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} \left(\int_C \frac{1-\xi^2}{2\xi^3} \cdot \frac{1}{\xi - \alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} \xi}{\xi - \alpha_j} d\xi + \int_C \frac{1-\xi^2}{2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{1 - \alpha_k \xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi - \overline{\alpha_j}}{1 - \alpha_j \xi} d\xi \right) = \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} (I_1 + I_2), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_C \frac{1-\xi^2}{2\xi^3} \cdot \frac{1}{\xi - \alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} \xi}{\xi - \alpha_j} d\xi, \\ I_2 &= \int_C \frac{1-\xi^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_k \xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi - \overline{\alpha_j}}{1 - \alpha_j \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция интеграла I_1 аналитична в области $|\xi| > 1, \text{Im } \xi > 0$, на бесконечности она имеет нуль третьего порядка. Следовательно,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1-\xi^2}{2\xi^3} \cdot \frac{1}{\xi-\alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1-\overline{\alpha_j}\xi}{\xi-\alpha_j} d\xi + \int_1^{\infty} \frac{1-\xi^2}{2\xi^3} \cdot \frac{1}{\xi-\alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1-\overline{\alpha_j}\xi}{\xi-\alpha_j} d\xi.$$

Выполним замену $\eta = \frac{1}{\xi}$ и получим:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{\eta^2-1}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_k\eta} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\eta-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\eta} d\eta$$

Подынтегральная функция интеграла I_2 аналитична в области $|\xi| < 1, \text{Im } \xi > 0$, тогда

$$I_2 = -\int_{-1}^1 \frac{1-\xi^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi} d\xi.$$

Таким образом,

$$c_k = \sqrt{\frac{1-|\alpha_k|^2}{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{\xi^2-1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi} d\xi, \quad k \geq 2. \quad (4)$$

Нетрудно заметить также, что

$$c_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cdot \varphi_k(e^{ix}) dx = \overline{c_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Вычислим интеграл:

$$J_k = \int_{-1}^1 \frac{\xi^2-1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi} d\xi$$

в предположении, что все числа $\alpha_i, i = 2, 3, \dots$ различные.

Введём обозначение:

$$F_k(\xi) = \frac{\xi^2-1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi}. \quad (6)$$

Разложим рациональную дробь $\frac{1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi}$ на сумму

элементарных дробей:

$$\frac{1}{1-\alpha_k\xi} \prod_{j=2}^{k-1} \frac{\xi-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j\xi} = \sum_{j=2}^k \frac{A_j}{1-\alpha_k\xi}.$$

Домножим обе части последнего равенства на $\prod_{j=2}^k (1-\alpha_k\xi)$, получим:

$$\prod_{j=2}^{k-1} (\xi-\overline{\alpha_j}) = \sum_{j=2}^k \left(A_j \prod_{2 \leq i \leq k, i \neq j} (1-\alpha_i\xi) \right). \quad (7)$$

Подставив в равенство (7) значения $\xi = \frac{1}{\alpha_l}$, $2 \leq l \leq k-1$, будем

иметь, что

$$A_l = \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_l}{\alpha_l} \prod_{\substack{2 \leq i \leq k \\ i \neq l}} \frac{\alpha_l}{\alpha_l - \alpha_i} = \frac{1 - \overline{\alpha_l} \cdot \alpha_l}{\alpha_l - \alpha_k} \cdot \prod_{\substack{2 \leq i \leq k-1 \\ i \neq l}} \frac{1 - \overline{\alpha_i} \alpha_l}{\alpha_l - \alpha_i}, \quad l = 2, 3, \dots, k-1.$$

Подставим в равенство (7) значение $\xi = \frac{1}{\alpha_k}$, получим, что

$$A_k = \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_k}{\alpha_k} \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha_k - \alpha_j} \right) = \prod_{j=2}^{k-1} \frac{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_j}.$$

Таким образом,

$$F_k(\xi) = \sum_{j=2}^k A_j \cdot \frac{\xi^2 - 1}{1 - \alpha_j \xi} = \sum_{j=2}^k A_j \cdot \left(-\frac{\xi}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_j^2} + \frac{1 - 1/\alpha_j^2}{1 - \alpha_j \xi} \right).$$

Подставив полученное выражение для функции $F_k(\xi)$ (см. (6)) в формулу (4), получим:

$$c_k = -\sqrt{\frac{1 - |\alpha_k|^2}{2\pi}} \cdot \left(\sum_{j=2}^{k-1} \frac{1 - |\alpha_j|^2}{\alpha_j^3 (\alpha_j - \alpha_k)} \left(2\alpha_j + (\alpha_j^2 - 1) \ln \left(\frac{1 - \alpha_j}{1 + \alpha_j} \right) \right) \right) + \\ + \frac{1}{\alpha_k^3} \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_j} \right) \left(2\alpha_k + (\alpha_k^2 - 1) \ln \left(\frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right) \right).$$

Заметим, что при $|z|=1$ имеем: $\left| \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z} \right| = 1$, откуда следует, что

значение $\varphi_k(z)$ представимо в виде $\varphi_k(z) = r_k(z) \cdot e^{i\gamma_k(z)}$, где

$$r_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_k|^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{|1 - \overline{\alpha_k} z|}, \quad \gamma_k(z) = \arg \left(\frac{1}{1 - \overline{\alpha_k} z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z} \right). \quad (8)$$

На основании леммы 5 из [3] имеет место равенство

$$\frac{e^{ix} - \alpha}{1 - \overline{\alpha} e^{ix}} \cdot \frac{1 - \overline{\alpha}}{1 - \alpha} = \exp \left(i \int_0^x \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - 2|\alpha| \cos(u - \Theta) + |\alpha|^2} du \right),$$

где $|\alpha| < 1$, $\Theta = \arg \alpha$.

Следовательно, в случае, если $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$),

$$\frac{e^{ix} - \alpha_k}{1 - \alpha_k e^{ix}} = \exp \left(i \int_0^x \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \Theta) + |\alpha_k|^2} du \right),$$

откуда следует, что

$$\gamma_k(z) = \int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(u - \Theta) + |\alpha_j|^2} du - \arg(1 - \alpha_k z), \quad z = e^{ix}. \quad (9)$$

Отметим также, что в случае, когда $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$),

$$|1 - \overline{\alpha_k} z| = |(1 - \alpha_k \cos x) - i\alpha_k \sin x| = \sqrt{1 - 2\alpha_k \cos x + \alpha_k^2}$$

первая из формул (8) примет вид

$$r_k(z) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_k^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha_k \cos x + \alpha_k^2}}. \quad (10)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. В предположении, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ все различны, коэффициенты Фурье ряда (1) имеют вид:

$$c_0 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad c_1 = 0;$$

$$c_k = -\sqrt{\frac{1 - |\alpha_k|^2}{2\pi}} \cdot \left(\sum_{j=2}^{k-1} \frac{1 - |\alpha_j|^2}{\alpha_j^3(\alpha_j - \alpha_k)} \left(2\alpha_j + (\alpha_j^2 - 1) \ln \left(\frac{1 - \alpha_j}{1 + \alpha_j} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_k^3} \prod_{j=2}^{k-1} \left(\frac{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_j} \right) \left(2\alpha_k + (\alpha_k^2 - 1) \ln \left(\frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \right) \right) \right), \quad k \geq 2;$$

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При этом тригонометрический рациональный ряд Фурье (1) имеет вид

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} c_k r_k(z) \cos \gamma_k(z), \quad (11)$$

где $r_k(z)$ и $\gamma_k(z)$ могут быть найдены по формулам (8). В частности, если все числа $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), то формулы (8) примут вид (9) и (10).

Замечание. На основании признака Дини-Липшица [3] в случае, если последовательность $\{\alpha_k\}$ не имеет предельных точек на единичной окружности $|z| = 1$, в формулах (1) и (11) имеет место знак равенства.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 3. – 662 с.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: Физматгиз, 1949. – 688 с.
3. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

E.A. Rovba, N.Yu. Kozlovskaya
Yanka Kupala State University of Grodno

TRIGONOMETRIC RATIONAL FOURIER SERIES FOR $|\sin x|$

Keywords: *rational trigonometric Fourier series; Fourier coefficients.*

Abstract. *Trigonometric polynomial Fourier series are widely used in various fields of science and practice. In particular, we know quite a lot of interesting representations for elementary functions as sums of corresponding Fourier series (see, for example, [1; 2]).*

Rational trigonometric Fourier series as a generalization of the corresponding polynomial series were constructed by M. M. Jrbashyan [3]. In [3] the Dini-Lipschitz and Jordan-Dirichlet criterions of the convergence of rational trigonometric Fourier series for the case when the poles of rational functions don't have limit points on the unit circle were also obtained.

In this paper we construct rational Fourier series for $|\sin x|$.

Е.Х. Садекова, А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков
НИЯУ «МИФИ»

УДК 517.521.1

О КОНСТАНТАХ ФАВАРА

Ключевые слова: *константы Фавара; числа Бернулли; числа Эйлера; двусторонние оценки; асимптотические формулы.*

В работе исследуются общие свойства последовательности известных констант Фавара, играющих важную роль в оценках приближений периодических функций тригонометрическими полиномами. Для рассматриваемой числовой последовательности подробно изучен ряд вопросов, связанных с монотонностью, ограниченностью и асимптотическим представлением. Отмечается связь констант Фавара с числами Бернулли и числами Эйлера.

Пусть число $r \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_+$, а $\tilde{C}^{(r)}$ – класс r раз непрерывно дифференцируемых на \mathbb{R} и 2π -периодических функций, $\tilde{C} = \tilde{C}^{(0)}$. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и для $f \in \tilde{C}$ обозначим

$$E_n^T(f) = \inf\{\|f - T_n\|_{C[0,2\pi]}\},$$

где инфимум берётся по всем тригонометрическим полиномам

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

степени, не превосходящей n . Величина $E_n^T(f)$ является классической характеристикой наилучшего приближения заданной функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n в равномерной метрике. Следуя [1], обозначим через $K\tilde{C}^{(r)}$ множество функций из $\tilde{C}^{(r)}$, подчиненных неравенству $\|f^{(r)}\|_{C[0,2\pi]} \leq K$ с фиксированным значением $K > 0$. При $r \in \mathbb{N}$ определим ещё $\tilde{C}^{(r-1)}LH^{(1)}$ как множество функций $f \in \tilde{C}^{(r-1)}$, таких, что $f^{(r-1)}$ удовлетворяет условию Липшица с заданной константой $L > 0$.

В теории аппроксимации широко используются следующие утверждения (см., например, [1, глава 2, §3]).

Теорема (Ахиезер – Крейн – Фавар). Для любой функции $f \in \tilde{C}^{(r)}$ справедлива точная оценка

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathfrak{K}_r}{(n+1)^r} E_n^T(f^{(r)}),$$

где $r \in \mathbb{Z}_+$, а величина \mathfrak{K}_r задаётся формулой

$$\mathfrak{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}} \quad (1)$$

и называется константой Фавара.

Следствие 1. Для любой функции $f \in K\tilde{C}^{(r)}$ справедлива оценка

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathfrak{K}_r \cdot K}{(n+1)^r}.$$

Следствие 2. Для любой функции $f \in \tilde{C}^{(r-1)}LH^{(1)}$ справедлива оценка

$$E_n^T(f) \leq \frac{\mathfrak{K}_r \cdot L}{(n+1)^r}.$$

Отметим, что следствие 2 сформулировано в книге [1, глава 2, §3] как задача; в [2] этот результат применён для получения оценки наилучшего приближения ограниченной функции в метрике Хаусдорфа.

В настоящей заметке мы изучаем свойства последовательности (1) констант Фавара \mathfrak{K}_r , $r \in \mathbb{Z}_+$, которую сразу удобно разбить на две подпоследовательности:

$$\mathfrak{K}_{2s-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2s}}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$\mathfrak{K}_{2s} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2s+1}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Интерес авторов к последовательности (1) вызван отчасти отсутствием развёрнутой информации о константах Фавара в известных

монографиях по теории приближений [1; 3; 4]. Ясно, что вопрос сводится к изучению свойств сумм

$$A_{2s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2s}}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

$$A_{2s+1}^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2s+1}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad (5)$$

связанных с константами Фавара (2), (3) очевидными равенствами $\mathfrak{K}_{2s-1} = \frac{4}{\pi} A_{2s}$, $\mathfrak{K}_{2s} = \frac{4}{\pi} A_{2s+1}^*$. В стандартной справочной литературе (см., например, [5, глава 5, раздел 5.1.4]) для сумм (4), (5) можно найти несколько первых значений

$$A_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad A_4 = \frac{\pi^4}{96}, \quad A_6 = \frac{\pi^6}{960}, \quad A_8 = \frac{17\pi^8}{2^9 \cdot 315}, \quad A_{10} = \frac{31\pi^{10}}{2^{10} \cdot 35 \cdot 81},$$

$$A_1^* = \frac{\pi}{4}, \quad A_3^* = \frac{\pi^3}{32}, \quad A_5^* = \frac{5\pi^5}{2^9 \cdot 3}, \quad A_7^* = \frac{61\pi^7}{2^{12} \cdot 45}, \quad A_9^* = \frac{277\pi^9}{2^{17} \cdot 63}.$$

При их вычислении используются общие формулы:

$$A_{2s} = \frac{1}{2(2s)!} (2^{2s} - 1) \pi^{2s} |B_{2s}|, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$A_{2s+1}^* = \frac{1}{2(2s)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s+1} |E_{2s}|, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \quad (7)$$

Здесь B_{2s} и E_{2s} – числа Бернулли и числа Эйлера соответственно. Для справки выпишем нужные значения

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66};$$

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385,$$

а также производящие функции

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < 2\pi,$$

$$\frac{1}{ch z} = \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Подробную информацию о числах Бернулли и числах Эйлера содержит недавняя монография [6, глава 6 и глава 7, разделы 7.8, 7.9].

В книге [3, с. 242] выписана (без пояснений) цепочка неравенств

$$1 = \mathfrak{K}_0 < \mathfrak{K}_2 < \dots < \mathfrak{K}_{2s} < \dots < \frac{4}{\pi} < \dots < \mathfrak{K}_{2s-1} < \dots < \mathfrak{K}_3 < \mathfrak{K}_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Для величин (4), (5) формула (8) принимает вид

$$\frac{\pi}{4} = A_1^* < A_3^* < \dots < A_{2s+1}^* < \dots < 1 < \dots < A_{2s} < \dots < A_4 < A_2 = \frac{\pi^2}{8}. \quad (9)$$

Убедимся в справедливости соотношений (9). Из определения (4)

сразу следуют оценка $A_{2s} > 1$ при всех $s \in \mathbb{N}$ и строгое убывание последовательности чисел A_{2s} . Поясним подробнее оставшиеся неравенства в (9). Поскольку A_{2s+1}^* есть сумма ряда типа Лейбница (5), то при всех $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$A_{2s-1}^* = 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} - \dots < 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}}, \quad (10)$$

$$A_{2s+1}^* = 1 - \frac{1}{3^{2s+1}} + \frac{1}{5^{2s+1}} - \dots > 1 - \frac{1}{3^{2s+1}}. \quad (11)$$

Для доказательства неравенства $A_{2s-1}^* < A_{2s+1}^*$ проверим, что

$$1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} < 1 - \frac{1}{3^{2s+1}}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Последнее равносильно элементарному неравенству $\left(\frac{3}{5}\right)^{2s-1} < \frac{8}{9}$, выполненному при всех значениях $s \in \mathbb{N}$. Строгое возрастание последовательности чисел A_{2s+1}^* доказано. Оценка $A_{2s+1}^* < 1$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$ видна, например, из (10). Таким образом, соотношения (8), (9) полностью обоснованы.

Дополнительно к (9) установим, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_{2s+1}^* = \lim_{s \rightarrow \infty} A_{2s} = 1. \quad (12)$$

С одной стороны, полученное выше двойное неравенство

$$1 - \frac{1}{3^{2s-1}} < A_{2s+1}^* < 1, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

даёт

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_{2s+1}^* = 1.$$

С другой стороны,

$$1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{-2s}}{2s-1} < A_{2s} < 1 + 3^{-2s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{-2s}}{2s-1}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Оценка (13) получена из простейших неравенств для интеграла:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2s}} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^{2s}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{-2s}}{2s-1} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2s}}. \quad (14)$$

Из (13) вытекает равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} A_{2s} = 1$, что завершает доказательство формулы (12). Теперь для исходной последовательности констант Фавара (1) имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{K}_r = \frac{4}{\pi}.$$

Элементарный вывод соотношения (14) основан на достаточно грубой двусторонней оценке интеграла по формуле прямоугольников. Более аккуратная работа с интегралом позволяет существенно уточнить асимптотическое поведение значений A_{2s} . При этом оказывается полезным следующий несложно проверяемый факт.

Лемма. Пусть $f \in C^2[a, b]$, причём $f(x) > 0$, а $f''(x) < 0$ на $[a, b]$. Обозначим $S(\xi)$, где $\xi \in [a, b]$, площадь трапеции, образованной касательной к графику функции $y = f(x)$, проведённой в точке $(\xi, f(\xi))$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс. Тогда

$$S(\xi) \leq \max_{\zeta \in [a, b]} S(\zeta) = S\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x) dx$$

при всех $\xi \in [a, b]$.

Для формулировки последующих результатов введём обозначение

$$R_{2s}(N) = A_{2s} - \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{(2m+1)^{2s}} = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2s}}, \quad s, N \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Теорема. Для любых $s, N \in \mathbb{N}$ справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{s+N}{(2s-1)(2N+1)^{2s}} < R_{2s}(N) < \frac{N}{(2s-1)(2N)^{2s}}. \quad (16)$$

Схема доказательства. Фиксируем $s, N \in \mathbb{N}$.

1. Введём вспомогательную величину

$$\tilde{R}_{2s}(N) = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2s}}.$$

Применяя сформулированную выше лемму к функции $y = x^{-2s}$ на отрезках вида $[2m-1, 2m+1]$ и суммируя по m от N до ∞ , выводим оценку

$$\tilde{R}_{2s}(N) < \frac{1}{2(2s-1)(2N-1)^{2s-1}}. \quad (17)$$

2. Оценивая сверху интегралы

$$\int_{2m+1}^{2m+2} \frac{dx}{x^{2s}}, \quad \int_{2m+2}^{2m+3} \frac{dx}{x^{2s}}, \quad m \geq N,$$

по формуле трапеций, получим, что

$$R_{2s}(N) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2N+1)^{2s}} - \tilde{R}_{2s}(N+1) + \frac{1}{(2s-1)(2N+1)^{2s-1}}. \quad (18)$$

Из (17), (18) вытекает оценка снизу в (16).

3. Снова применив лемму к функции $y = x^{-2s}$ на отрезках вида $[2m, 2m+2]$, получим оценку сверху в (16).

Следствие. Пусть $s \in \mathbb{N}$ фиксировано. Тогда

$$R_{2s}(N) \sim \frac{1}{(2s-1)2^{2s}} \cdot \frac{1}{N^{2s-1}}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано. Тогда

$$R_{2s}(N) \sim \frac{1}{(2N+1)^{2s}}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Отметим, что асимптотический закон (19) может быть установлен независимо, с помощью известной теоремы Штольца. Действительно, при фиксированном значении $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим две бесконечно малые

последовательности чисел $R_{2s}(N)$ и N^{1-2s} . Простые вычисления дают

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_{2s}(N) - R_{2s}(N+1)}{N^{1-2s} - (N+1)^{1-2s}} = \frac{1}{(2s-1)2^{2s}},$$

откуда по теореме Штольца имеем результат

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{R_{2s}(N)}{N^{1-2s}} = \frac{1}{(2s-1)2^{2s}},$$

эквивалентный (19).

Укажем в заключение, что предложенный подход применим также к исследованию поведения остатков

$$R_{2s+1}^*(N) = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2s+1}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N},$$

числовых рядов (5). Так, например, при фиксированном значении $s \in \mathbb{Z}_+$ справедлива (ср. с (19)) асимптотика

$$R_{2s+1}^*(N) \sim \frac{(-1)^N}{2(2N)^{2s+1}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Соответствующие аналоги для $R_{2s+1}^*(N)$ имеют и формулы (16), (20).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

Литература

1. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. — Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1977. — 185 с.
2. Садекова Е.Х. Об одной оценке для наилучшего приближения ограниченных функций тригонометрическими полиномами в метрике Хаусдорфа // Современные проблемы теории функций и их приложения. — Саратов: Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 352-353.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 409 с.
4. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
6. Деза Е.И. Специальные комбинаторные числа. От чисел Стирлинга до чисел Моцкина: всё о двенадцати известных числовых множествах комбинаторной природы (история, классические свойства, примеры и задачи). — М.: ЛЕНАНД (URSS), 2018. — 504 с.

E.H. Sadekova, A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov
NRNU «MEPhI»

ON THE FAVARD'S CONSTANTS

Keywords: Favard's constants; Bernoulli numbers; Euler numbers; two-sided estimates; asymptotic formulas.

Abstract. The paper investigates the general properties of the sequence of well-known Favard's constants, which play an important role in estimates of approximations of periodic functions by trigonometric polynomials. For the considered numerical sequence, a number of questions related to monotonicity, boundness, and asymptotic representation have been studied in detail. The connection of the Favard's constants with the Bernoulli and Euler numbers is noted.

И.В. Тихонов, Муатаз Алмохамед

МГУ имени М.В. Ломоносова, МПГУ, Университет Алленпо

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ ЭКСПОНЕНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: обобщенные экспоненты; индикаторные функции; обобщенные гиперболические и тригонометрические функции; целые функции типа Миттаг-Леффлера; дифференциальные уравнения; спектральные задачи; обратные задачи.

Дан краткий обзор по теории так называемых обобщенных экспонент (индикаторных функций), включающих в единую схему обобщенные гиперболические и тригонометрические функции. Указаны основные свойства обобщенных экспонент. Представлена таблица «операционного исчисления». Отмечена связь с целыми функциями типа Миттаг-Леффлера. Приведены результаты по распределению нулей. Рассмотрены возможные применения обобщенных экспонент при исследовании спектральных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений.

1. Обобщенные экспоненты. Рассматриваем специальные функции вида

$$y_{n,k}(t, \lambda) = \frac{t^k}{k!} + \lambda \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} + \lambda^2 \frac{t^{2n+k}}{(2n+k)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{t^{mn+k}}{(mn+k)!}. \quad (1)$$

Здесь t – вещественное переменное. Особый спектральный параметр λ предполагаем комплексным, значение n – натуральным, а k – целым:

$$t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Параметр n называем *индексом* функции $y_{n,k}(t, \lambda)$, а k – ее *номером*.

Как обычно, действует правило

$$\frac{1}{(-1)!} = \frac{1}{(-2)!} = \frac{1}{(-3)!} = \dots = \frac{1}{(-m)!} = \dots = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

обнуляющее соответствующие слагаемые в (1) при отрицательных номерах k . Соглашения (2), (3) считаем выполненными по умолчанию.

Функции вида (1) называем *обобщенными экспонентами* индекса n . Встречается также термин *обобщенные λ -гиперболические функции* порядка n и типа k , но мы его использовать не будем. Информация про обобщенные экспоненты и их модификации представлена в [1–4]. Выделим отдельно специальные классы обобщенных экспонент.

При $\lambda = 1$ формула (1) принимает вид

$$y_{n,k}(t, 1) = \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{t^{2n+k}}{(2n+k)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{mn+k}}{(mn+k)!}. \quad (4)$$

Функции вида (4) называют *обобщенными гиперболическими функциями* индекса n (см. [1; 2]).

При $\lambda = -1$ формула (1) принимает вид

$$y_{n,k}(t, -1) = \frac{t^k}{k!} - \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} + \frac{t^{2n+k}}{(2n+k)!} - \dots = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{mn+k}}{(mn+k)!}. \quad (5)$$

Функции вида (5) называют *обобщенными тригонометрическими функциями* индекса n (см. [1; 2]).

Отметим также статьи Поли [5] и Микусинского [6], содержащие много полезных сведений про обобщенные гиперболические и тригонометрические функции соответственно.

Укажем элементарные примеры обобщенных экспонент:

- $y(t) = e^t$ при $n = 1, k = 0, \lambda = 1,$
- $y(t) = \operatorname{ch} t$ при $n = 2, k = 0, \lambda = 1,$
- $y(t) = \operatorname{sh} t$ при $n = 2, k = 1, \lambda = 1,$
- $y(t) = \operatorname{cost}$ при $n = 2, k = 0, \lambda = -1,$
- $y(t) = \operatorname{sin} t$ при $n = 2, k = 1, \lambda = -1.$

Видно, что функции (1) образуют широкий класс, естественный для целей анализа.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}$. Следующие свойства функций (1) удобно свести в единую таблицу операционного исчисления:

$$\bullet y_{n,k}^{(q)}(t, \lambda) = y_{n,k-q}(t, \lambda), \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\bullet y_{n,k}^{(n)}(t, \lambda) = \lambda y_{n,k}(t, \lambda) + \frac{t^{k-n}}{(k-n)!}, \quad (7)$$

$$\bullet y_{n,k}^{(n)}(t, \lambda) = \lambda y_{n,k}(t, \lambda), \quad k \leq n-1, \quad (8)$$

$$\bullet y_{n,k}^{(l)}(0, \lambda) = \delta_{k,l}, \quad k, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (9)$$

Уточним, что в формулах типа (6) – (9) производные всегда берутся по основной переменной t .

Соотношение (7) является частным случаем следующей общей формулы

$$y_{n,k}^{(pn)}(t, \lambda) = \lambda^p y_{n,k}(t, \lambda) + \sum_{r=1}^p \lambda^{p-r} \frac{t^{k-rn}}{(k-rn)!}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Отсюда, учитывая (6), получаем

$$y_{n,k}^{(pn+q)}(t, \lambda) = \lambda^p y_{n,k-q}(t, \lambda) + \sum_{r=1}^p \lambda^{p-r} \frac{t^{k-rn-q}}{(k-rn-q)!}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad q = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Кроме того, отметим соотношение

$$y_{n,-pn-q}(t, \lambda) = y_{n,n}^{(pn+n+q)}(t, \lambda) = \lambda^{p+1} y_{n,n-q}(t, \lambda), \quad p = 0, 1, \dots, \quad q = 1, 2, \dots \quad (12)$$

важность которого состоит в том, что оно позволяет переходить от отрицательных номеров $k = -pn - q$ к неотрицательным $n - q$ за счет выбора подходящих значений p, q .

Использование формальных правил (6)–(12) сильно упрощает аналитическую работу с обобщенными экспонентами.

2. Функции Миттаг-Леффлера. Обобщенные экспоненты (1) тесно связаны с целыми функциями типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; \mu)$. Напомним, что

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m\rho^{-1} + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

где $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, а Γ обозначает гамма-функцию. Теория функций типа Миттаг-Леффлера изложена в [1; 7; 8]. Нас будет интересовать особый случай $\rho = 1/n$ со значением $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим формулу (1), полагая там $t=1$ и $\lambda=z$. Получим семейство целых функций

$$Y_{n,k}(z) = \frac{1}{k!} + \frac{z}{(n+k)!} + \frac{z^2}{(2n+k)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(mn+k)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

Функции (14) играют особую роль. Поскольку $a! = \Gamma(a+1)$, то

$$Y_{n,k}(z) = E_{1/n}(z; k+1), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

то есть $Y_{n,k}(z)$ есть целая функция типа Миттаг-Леффлера (13) при выборе параметров $\rho = 1/n$ и $\mu = k+1$.

При этом имеем

$$y_{n,k}(t, \lambda) = t^k Y_{n,k}(\lambda t^n) = t^k E_{1/n}(\lambda t^n; k+1). \quad (16)$$

Последовательно подставляя сюда $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$, получим связи

$$y_{n,k}(t, 1) = t^k Y_{n,k}(t^n) = t^k E_{1/n}(t^n; k+1), \quad (17)$$

$$y_{n,k}(t, -1) = t^k Y_{n,k}(-t^n) = t^k E_{1/n}(-t^n; k+1) \quad (18)$$

функций Миттаг-Леффлера (15) с обобщенными гиперболическими функциями (4) и обобщенными тригонометрическими функциями (5).

С другой стороны, при фиксированном $t = T > 0$ из формулы (16) следует, что

$$y_{n,k}(T, \lambda) = T^k Y_{n,k}(\lambda T^n) = T^k E_{1/n}(\lambda T^n; k+1). \quad (19)$$

Учитывая также правило (6), имеем формулу

$$y_{n,k}^{(q)}(T, \lambda) = y_{n,k-q}(T, \lambda) = T^{k-q} Y_{n,k-q}(\lambda T^n) = T^{k-q} E_{1/n}(\lambda T^n; k-q+1). \quad (20)$$

Перечисленные соотношения (16) – (20) позволяют находить взаимосвязи между нулями функций Миттаг-Леффлера и корнями уравнений с обобщенными экспонентами.

При $n=1$ и $n=2$ ситуация, как правило, элементарна и корни уравнений с обобщенными экспонентами находятся явно. При $n \geq 3$ требуется дополнительная информация «про нули».

3. Нули функций Миттаг-Леффлера. Вопросу распределения нулей функций Миттаг-Леффлера посвящена специализированная монография [8], подводящая итог исследованиям многих аналитиков (Виман, Полиа, Островский, Седлецкий, Попов и др.). Приведем формулировку одного результата в нужной нам редакции.

Теорема 1. Пусть $n, d \in \mathbb{Z}$, причем $n \geq 3$, $d \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда все нули функции $Y_{n,d}(z) = E_{1/n}(z; d+1)$ являются вещественными, отрицательными и простыми. При нумерации $m \in \mathbb{N}$ нули выражаются асимптотической формулой

$$z_m = - \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \left(m - \frac{1}{2} + \frac{d}{n} \right) + \alpha_m \right)^n. \quad (21)$$

Здесь $\alpha_m = o(1)$ при $m \rightarrow \infty$, точнее

$$|\alpha_m| \leq C_{n,d} \exp(-m\theta_n), \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\theta_n = 2\pi \sin(2\pi/n) > 0$, а $C_{n,d}$ – некоторая константа, зависящая лишь от выбора n, d .

Для описания нулей функции $Y_{n,l}(z) = E_{1/n}(z; l+1)$ с отрицательными значениями $l \in \{-1, -2, \dots, -n\}$ можно воспользоваться формулой перехода

$$Y_{n,l}(z) = z Y_{n,n+l}(z), \quad (22)$$

где значение $n+l \equiv d$ попадает в множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$, давая, тем самым, возможность применять результаты из первой части теоремы.

Сформулированная теорема 1 получается как следствие нескольких утверждений из [8] (см. там теорему 3.1.1 на с. 57, теорему 2.1.4 на с. 45 и теорему 2.2.2 на с. 48–49). Помимо асимптотической формулы (21) имеются двусторонние оценки нулей, конкретизирующие их положение при всех номерах $m \in \mathbb{N}$ в определенных интервалах локализации (см. [8, гл. 3]). Формула перехода (22) следует из определения (14) с учетом действующего соглашения (3).

Полезно дополнить теорему 1 таким результатом.

Теорема 2. Пусть $n, d, k \in \mathbb{Z}$, причем $n \geq 3$, $d, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $d \neq k$. Тогда ни один нуль функции $Y_{n,d}(z) = E_{1/n}(z; d+1)$ не является нулем функции $Y_{n,k}(z) = E_{1/n}(z; k+1)$. Более того, нули этих функций перемежаются друг друга: между двумя любыми соседними нулями функции $Y_{n,d}(z)$ находится в точности один нуль функции $Y_{n,k}(z)$, и наоборот.

Для получения теоремы 2 надо воспользоваться формулой (18) и одним из результатов работы [6], где среди прочего установлено следующее: пусть $d, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $d \neq k$, тогда положительные нули функций $y_{n,d}(t, -1)$ и $y_{n,k}(t, -1)$ перемежаются друг друга.

4. Индикаторные задачи Коши. Изложенное выше является весьма полезным для общей теории дифференциальных уравнений: ряд новых приложений обобщенных экспонент (1) к неклассическим краевым и обратным задачам был обнаружен при подготовке диссертации [9] (см. также работы [10–13]).

В основе лежит следующий простой факт. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. По формуле (8) функции

$$y_{n,0}(t, \lambda), y_{n,1}(t, \lambda), \dots, y_{n,n-1}(t, \lambda) \quad (23)$$

удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$y^{(n)}(t) = \lambda y(t). \quad (24)$$

Для них также выполнены индикаторные начальные условия (9).

Другими словами, задача Коши

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \lambda y(t), & t \geq 0, \\ y^{(j)}(0) = 0, & j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{k\}, \\ y^{(k)}(0) = 1, \end{cases} \quad (25)$$

с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, \dots, n-1\}$ имеет единственное решение $y_{n,k}(t, \lambda)$, определяемое формулой (1).

Например, при $n = 2$ возникают две задачи Коши

$$\begin{cases} y''(t) = \lambda y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y''(t) = \lambda y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Решением первой из них будет функция $y_{2,0}(t, \lambda) = \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda} t)$, а решением второй – функция $y_{2,1}(t, \lambda) = \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} t) / \sqrt{\lambda}$.

Функции $y_{n,k}(t, \lambda)$ из набора (23) будем называть *индикаторными функциями* из-за их связи с индикаторными задачами Коши вида (25). Понятно, что такие функции образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (24). Используя формулу Остроградского – Лиувилля, нетрудно показать, что при $n \geq 2$

определитель Вронского системы (23) тождественно равен единице (см. также [2]).

Индикаторные функции (23) полезны при исследовании различных спектральных задач, связанных с уравнением (24).

5. Спектральные краевые задачи. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \lambda y(t), & 0 \leq t \leq T, \\ y^{(j)}(0) = 0, & j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{k\}, \\ y^{(q)}(T) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $T > 0$, $k, q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Требуется найти все *собственные значения* параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых в задаче (26) существуют нетривиальные решения $y \in C^n[0, T]$, т.е. решения, отличные от тождественного нуля. Совокупность всех собственных значений составляет *спектр* задачи (26).

Дадим описание спектра. С точностью до умножения на константу решением ОДУ в задаче (26) при указанных там начальных условиях является индикаторная функция $y_{n,k}(t, \lambda)$. Поэтому все собственные значения $\lambda \in \mathbb{C}$ находим из уравнения $y_{n,k}^{(q)}(T, \lambda) = 0$. По формуле (20) переходим к эквивалентному уравнению

$$Y_{n,k-q}(\lambda T^n) = 0 \quad (27)$$

относительно неизвестной λ с функцией Миттаг-Леффлера

$$Y_{n,k-q}(z) = E_{1/n}(z; k-q+1). \quad (28)$$

Таким образом, все собственные значения задачи (26) выражаются формулой $\lambda_m = z_m / T^n$, где $z_m = z_m(n, k-q)$ суть нули целой функции (28). При $n=2$ нули находятся элементарно – как корни гиперболических синуса или косинуса. При $n \geq 3$ можно воспользоваться теоремой 1, заведомо применимой, ибо $k-q \in \{-n+1, \dots, 0, \dots, n-1\}$.

Как видим, разработанный аппарат обобщенных экспонент позволяет элементарно сводить исследование спектральной задачи (26) к ее характеристическому уравнению (27). Отметим, что эта концепция была использована в работе [11] при изучении *обобщенной задачи Уорда* для абстрактных дифференциальных уравнений.

6. Особая спектральная задача. Продемонстрируем гибкость метода на другом нестандартном примере. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \lambda y(t) + 1, & 0 \leq t \leq T, \\ y^{(j)}(0) = 0, & j \in \{0, \dots, n-1\}, \\ y^{(q)}(T) = 0, \end{cases} \quad (29)$$

с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $q \in \{0, \dots, n-1\}$ и спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Требуется найти все *собственные значения* параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых в задаче (29) существует решение $y \in C^n[0, T]$.

Нетрудно проверить (см. также формулу (7) при $k = n$), что решением ОДУ в задаче (29) при указанных там начальных условиях является функция $y_{n,n}(t, \lambda)$. Поэтому все собственные значения $\lambda \in \mathbb{C}$ находим из уравнения $y_{n,n}^{(q)}(T, \lambda) = 0$. Вновь обращаясь к формуле (20), приходим к эквивалентному уравнению

$$Y_{n,n-q}(\lambda T^n) = 0 \quad (30)$$

относительно неизвестной λ с функцией Миттаг-Леффлера

$$Y_{n,n-q}(z) = E_{1/n}(z; n-q+1). \quad (31)$$

Тем самым, все собственные значения задачи (29) выражаются формулой $\lambda_m = z_m / T^n$, где $z_m = z_m(n, n-q)$ суть нули целой функции (31). При $n=1$ и $n=2$ нули находятся элементарно. При $n \geq 3$ можно снова воспользоваться теоремой 1.

Спектральная задача (29) и ее характеристическое уравнение (30) играют важную роль при исследовании линейных обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений.

7. Модельная обратная задача. Дадим соответствующий пример. В комплексном банаховом пространстве E рассмотрим линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A)$. Зафиксируем значения $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и $q \in \{0, \dots, n-1\}$. На интервале $(0, T)$ поставим так называемую *обратную задачу*

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = Au(t) + g, & 0 < t < T, \\ u^{(j)}(0) = u_j, & j \in \{0, \dots, n-1\}, \\ u^{(q)}(T) = u_n, \end{cases} \quad (32)$$

с заданными элементами $u_0, \dots, u_n \in E$ и неизвестной парой $(u(t), g)$, удовлетворяющей условиям

$$u \in C^n((0, T); E) \cap C^{n-1}([0, T]; E), \quad u(t) \in D(A) \text{ при } 0 < t < T, \quad g \in E.$$

Используя теорию обобщенных экспонент и соображения комплексного анализа, можно получить следующий основной результат.

Теорема 3. Для того чтобы модельная обратная задача (32) с фиксированными значениями $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, \dots, n-1\}$ при любом выборе элементов $u_0, \dots, u_n \in E$ имела не более одного решения $(u(t), g)$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел $\lambda_m = z_m / T^n$ не являлось собственным значением оператора A . Здесь $z_m = z_m(n, n-q)$

суть нули целой функции $Y_{n,n-q}(z) = E_{1/n}(z; n-q+1)$, такой же, как и в формуле (31).

Главное достоинство теоремы 3 заключено в ее универсальном характере: при минимальных ограничениях на тип абстрактного дифференциального уравнения удается получить критерий единственности решения обратной задачи (32) для всех возможных значений $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Некоторые частные проявления данного результата отмечались ранее в работах [10; 12–14]. Авторы планируют посвятить подробному доказательству теоремы 3 отдельную публикацию.

Работа подготовлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00236).

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
2. Muldoon M. E., Ungar A. A. Beyond Sin and Cos // Mathematics Magazine. – 1996. – Vol. 69, No. 1. – P. 3-14.
3. Ungar A. Higher order alpha-hyperbolic functions // Indian J. Pure Appl. Math. – 1984. – Vol. 15. – P. 301-304.
4. Bayat M., Teimoori H., Mehri B. A generalization of rotation and hyperbolic matrices and its application // Electronic Journal of Linear Algebra. – 2007. – Vol. 16, No. 11. – P. 125-134.
5. Poli L. Sur les sinus d'ordre supérieur // Cahiers Rhodaniens 1. Université de Lyon. – 1949. – P. 1-15.
6. Mikusinski G. J. Sur les fonctions $k_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{n+k\nu}}{(n+k\nu)!}$ ($k = 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, \dots, k-1$) // Annales de la société Polonaise de Mathématique. – 1948. – T. 21, Fasc. 1. – P. 1-12.
7. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
8. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – Т. 40. – С. 3-171.
9. Тихонов И. В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02; защищена 29.10.08. – М., 2008.
10. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференциальные уравнения. – 2002. –Т. 38, № 5. – С. 637-644.
11. Тихонов И.В. Обобщенная задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 325-336.

12. Тихонов И.В. Неклассические задачи для дифференциальных уравнений и распределение нулей целых функций типа Миттаг-Леффлера // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – Вып 14. – С. 170-173.

13. Тихонов И. В., Алмохамед М. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения высокого порядка в банаховом пространстве // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2019. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. – С. 91-95.

14. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. –2019. – № 3. – С. 50-58.

I. V. Tikhonov, Muataz Almohamed
MSU, MPGU, University of Aleppo

GENERALIZED EXPONENTS AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Keywords: *generalized exponents; indicator functions; generalized hyperbolic and trigonometric functions; Mittag-Leffler entire functions; differential equation; spectral problems; inverse problems.*

Abstract. *A brief review of the theory of generalized exponents (indicator functions) is given. Generalized hyperbolic and trigonometric functions are included in a universal scheme. Basic properties of the generalized exponents are indicated. A table of «operational calculus» is represented. A connection with the theory of Mittag-Leffler entire functions is noted. Results on the distribution of zeros are given. Applications to some spectral and inverse problems for differential equations are considered.*

СЕКЦИЯ 4

Новые информационные и педагогические технологии в образовании

М.В. Акуленок, М.Р. Тихонов, О.С. Шикула
*Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»*

УДК 378.1:519.23

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ТЕСТИРОВАНИЯ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Ключевые слова: *тестирование; веб-сервис; модель тестирования; адаптивное тестирование; статистика тестирования.*

В статье рассматривается модель адаптивного тестирования, основанная на использовании данных ответов тестируемого для последующего изменения траектории тестирования и предоставления вопросов соответствующей сложности. Данная модель положена в основу разработанного веб-приложения. Приведены результаты анализа статистических данных, полученных в процессе тестирования студентов программы «Управление качеством».

1. Модель адаптивного тестирования

При конструировании тестов и интерпретации их результатов статистическую достоверность измеряемым переменным обеспечивает применение современной математической модели. Для того, чтобы считать результаты тестирования объективной оценкой знаний студентов, необходимо быть уверенным в высоком качестве теста, т.е. его диагностической состоятельности. Для разработки и алгоритмизации процесса адаптивного тестирования студентов была выбрана модель Раша, как наиболее применимая к образовательной деятельности [1].

Модель оперирует латентными (в явном виде не измеряемыми) переменными. Для обеспечения единства измерений введена интегральная шкала логитов с ограничением двумя переменными: готовность студента и сложность тестового задания. То есть введены две меры: «логит уровня знаний» Θ и «логит уровня сложности задания» δ :

$$\Theta_i = \ln \left(\frac{\text{доля верных ответов тестируемого}}{\text{доля неверных ответов тестируемого}} \right)$$

$$\delta_j = \ln \left(\frac{\text{доля неверных ответов на } j\text{-й вопрос}}{\text{доля верных ответов на } j\text{-й вопрос}} \right)$$

При этом на практике часто решается задача: по ответам тестируемых на задания теста оценить значения латентных параметров Θ и δ .

Рассматриваемая модель описывает вероятность успеха испытуемого как функцию одного параметра ($\Theta_i - \delta_j$), поэтому ее называют однопараметрической моделью (*Item Response Theory* – далее *IRT*) [1]. Таким образом, *IRT* моделирует ответ каждого испытуемого на каждый элемент теста. *IRT* основана на идее о том, что вероятность правильного ответа на элемент теста является математической функцией параметров человека и элемента.

Взаимодействие двух множеств $\{\Theta_i\}$ и $\{\delta_j\}$ образует данные, обладающие свойством «совместной аддитивности». Правильное использование модели позволяет отделить оценки испытуемых от оценок трудности заданий и наоборот, т.е. обеспечить независимость оценок заданий от испытуемых и оценок испытуемых от параметров заданий.

На рис. 1 показаны характеристические кривые с трудностями заданий $-2, 0$ и $+2$ логита (первое самое лёгкое, второе – среднее, третье самое трудное). Из приведённых зависимостей видно, что чем выше уровень подготовленности θ испытуемого, тем выше вероятность успеха в том или ином задании.

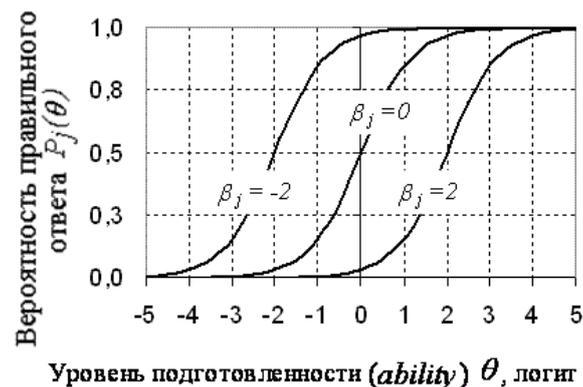


Рис. 1. Характеристические кривые заданий в IRT-модели [2]

Например, для испытуемого с $\Theta_j=0$ вероятность правильно ответить на первое задание близка к единице, на второе равна $1/2$ и на третье почти равна нулю. Отметим, что в точках, где $\{\Theta_i\}$ уровень подготовленности равен уровню сложности задания (на рисунке обозначен β) вероятность правильного ответа равна $0,5$. То есть, если

трудность задания равна уровню подготовленности испытуемого, то он с равной вероятностью может справиться или не справиться с этим заданием.

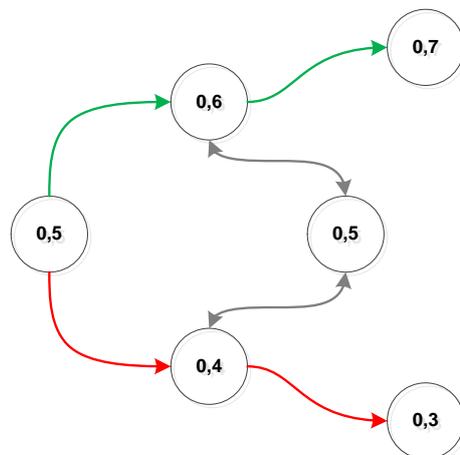


Рис. 2. Траектории прохождения тестов испытуемым в адаптивной тестирующей программе

На рис. 2 представлены персональные траектории тестирования испытуемых с разным уровнем подготовленности. В соответствии с алгоритмом адаптивного тестирования изначально испытуемому предлагается вопрос средней сложности весом 0,5. Если тестируемый отвечает правильно, то следующий вопрос будет более сложным с весом 0,6. Если ответ на вопрос неверен, то следующий вопрос будет более простым – и соответственно с весом 0,4 и так далее. При заранее известном уровне подготовленности студента первый вопрос может быть и с другим уровнем сложности, что позволяет полноценно реализовать идеи модели [1].

2. Веб-сервис электронного тестирования

Описанная выше модель была заложена в основу веб-сервиса электронного тестирования KuroT Trainer [3]. Данная программа написана на языке JavaScriptи PHP и доступна с использованием программы-браузера по сети «Интернет».

KuroT Trainer включает:

1) *окно авторизации* – содержит поля ввода логина и пароля тестируемого (или преподавателя), имя и группу, в которой он обучается, выпадающие списки выбора дисциплины и типа теста (логин, пароль, дисциплина и тип теста являются обязательными полями);

2) *окно вопроса* – выводится баллы за вопрос, текст вопроса (при необходимости с рисунками), возможные ответы и поле ввода выбранного ответа;

3) *окно результатов* – таблично представлены вопросы, баллы за вопросы, ответы на вопросы и данные пользователем ответы.

В системе реализована форма тестирования «Своя игра», содержащая, помимо описанных выше, окно выбора вопроса.

Программа содержит четыре таблицы базы данных.

1. Дисциплины. Таблица содержит следующие атрибуты: индекс, название, баллы, время.

2. Модули. Таблица содержит следующие атрибуты: индекс, дисциплина, название, цены вопросов.

3. Вопросы. Таблица содержит следующие атрибуты: индекс, модуль, вопрос, ответы, правильный ответ, цена вопроса, тип вопроса.

4. Ответы. Таблица содержит следующие атрибуты: индекс, группа, имя, баллы, дисциплина, история.

Хранение информации в отдельной базе данных, а также структура и функционал программы позволяют обеспечить расширяемость и изменяемость данных тестов.

При добавлении новой дисциплины необходимо создать новую запись в таблице базы данных «дисциплины». Каждая дисциплина состоит из модулей, хранящихся в таблице «модули» и содержащих вопросы в таблице «вопросы». Система поддерживает следующие типы тестовых вопросов:

1) единичный выбор («один из») – предполагает выбор одного правильного варианта ответа из нескольких (реализовано с использованием «radiobutton»).

2) множественный выбор («несколько из») – предполагает выбор нескольких правильных ответов из предложенных (реализовано с использованием «check box»).

3) свободный ответ (ввод правильного ответа) – предполагает отсутствие предлагаемых вариантов и ввод собственного ответа (реализовано с использованием «input text»).

Поскольку тестируемый осуществляет авторизацию, при удачном прохождении создаётся запись в таблице «ответы». А при ответе на вопросы в таблице «ответы» под записью с соответствующим индексом происходит изменение атрибута «история».

3. Анализ статистических результатов тестирования

Веб-сервис, описанный выше, использовался при подготовке студентов по программе «Управление качеством» в течение трёх лет [3].

Собранные статистические данные были проанализированы на предмет соотношения полученных баллов по пятибалльной системе (рис. 3). На диаграмме отображена информация по трём дисциплинам: 1) «Моделирование бизнес процессов»; 2) «Отраслевые модели систем менеджмента качества»; 3) «Техническое регулирование рынка в Российской Федерации». Каждый столбец гистограммы разделён на части, соответствующие доле полученных оценок (сверху вниз: 5 баллов, 4 балла, 3 балла, 2 балла, 1 балл).

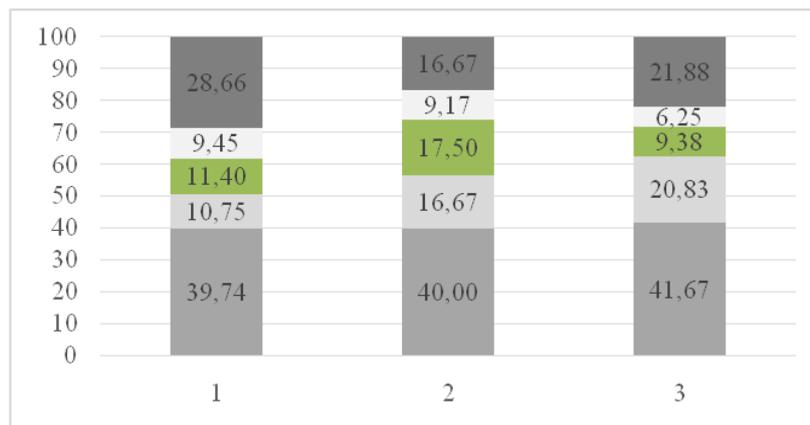


Рис. 3. Результаты тестирования студентов

Из анализа статистических данных тестирования и полученных итоговых баллов по дисциплинам можно сделать следующие выводы.

1. Студенты активно использовали возможность прохождения тестирования неоднократно. Зачастую по итогам первого прохождения тестирования они получали оценку «1 балл». На текущий момент веб-сервис тестирования используется в дисциплинах в качестве обучающего тренажёра, в связи с чем количество прохождений тестирования не ограничено.

2. Распределение итоговых баллов не зависит от уровня образования контингента (бакалавриат / магистратура). Так дисциплина «Моделирование бизнес-процессов» преподаётся студентам-бакалаврам, а «Отраслевые модели систем менеджмента качества» и «Техническое регулирование рынка в Российской Федерации» – магистрам. Можно заметить, что структура столбцов на отображённой выше диаграмме (рис. 3) не имеет существенных различий.

3. Большинство студентов проходят тестирование за неделю до зачётной недели. Анализируя дату прохождения тестов, которые можно проходить в любое время, можно сделать вывод о том, что более трёх четвертей студентов проходят тестирование в последние недели учебного семестра. Однако в каждой учебной группе находятся студенты, которые проходят тест в первые две недели обучения по дисциплине.

4. Большинство студентов проходят тестирование поздним вечером (от 22 до 24 часов). Учитывая тот факт, что тестирование проводится через сеть Интернет, у студентов есть возможность проходить тестирование в любое время. Также следует отметить, что в каждой группе студентов есть несколько студентов, проходящих тестирование ранним утром (от 4 до 7 часов).

5. Студенты тратят более 50 минут на первые прохождения теста, и менее 20 минут на последующие. Следует отметить, что система тестирования предусматривает автоматический выбор вопроса из базы

вопросов, то есть при заданном количестве вопросов вероятность повторения вопроса при повторном прохождении крайне мала (на каждую «ячейку» вопроса (модуль дисциплины – цена вопроса) задано 5-7 вариантов вопросов).

6. Вопросы тестов в большинстве своём относились к типу «один из». Для наполнения базы данных вопросов, студентам было предложено составить тест письменно для последующего анализа, проверки и внесения в базу вопросов. Большинство вопросов предполагали выбор одного правильного варианта ответа из 4–5 предложенных.

4. Выводы

Апробация и применение разработанного веб-сервиса электронного тестирования KuroT Trainer при подготовке студентов по программе «Управление качеством» позволяют сделать следующие выводы.

Система при текущих настройках подходит для тестирования студентов в качестве обучающего тренажёра, т.е. в режиме самоконтроля.

Система пригодна для «входного контроля» студентов и определения уровня подготовленности к изучению соответствующей дисциплины.

Применение системы в текущих настройках для итогового тестирования и выставления оценки по итогам прохождения тестов не является оптимальным, так как для итогового контроля важна оценка уровня сформированности компетенций и в том числе не только оценка уровня знаний, но и умений, а также практического опыта.

Литература

1. Шикун О.С., Аксенов А.Э., Кулакова В.А. Анализ и совершенствование процедур тестирования выпускника на примере программы 27.04.02 «Управление качеством» // Актуальные проблемы информатизации в науке и образовании – 2018. – М. – 2018. – С. 126-130.
2. Маслак А.А., Теория и практика измерения латентных переменных в образовании: монография. – М.: Изд-во Юрайт, 2020. – 200 с.
3. Свид. 2019663592 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. KuroT Trainer / М.Р. Тихонов; заявитель и правообладатель М.Р. Тихонов (RU); опублик. 18.10.2019, Реестр программ для ЭВМ. – 1 с.
4. Акуленок М.В., Тихонов М.Р., Шикун О.С. Об особенностях развития программы подготовки магистров по направлению «Управление качеством» // 8-я международная НПК «Современные технологии в российской и зарубежных системах образования». – Пенза, МНИЦ, 2019. – С. 3-7.

M.V. Akulenok, M.R. Tikhonov, O.S. Shikula
National Research University of Electronic Technology

DEVELOPMENT AND APPLICATION OF ADAPTIVE ELECTRONIC TESTING IN EDUCATIONAL PROCESS

Keywords: *testing; web service; testing model; adaptive testing; statistics of testing.*

Abstract. *The article discusses the adaptive testing model, based on the use of the test answer data for the subsequent change in the testing path and the provision of questions, their complexity and score. This model formed the basis for an information system based on a web application. The statistical data analysis obtained in the process of testing students of the program "Quality Management" are provided.*

А.М. Андрианов
Институт СПИНТЕех НИУ МИЭТ

УДК 001.91

ОБ АКТУАЛЬНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОЕКТНОГО ОБУЧЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОЕКТНОГО КОМАНДНОГО ОБУЧЕНИЯ (ПКО)

Ключевые слова: *обучение; фундаментальные знания; прикладные знания; компетенции; проектное обучение; командное обучение; актуальность знаний.*

В статье рассматриваются подходы к определению времени актуальности фундаментальных, прикладных знаний и компетенций. И предлагается подход проектного командного обучения для взаимосвязанного получения актуальных прикладных знаний и компетенций, повышающих качество выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций студентов.

Ускоряющееся усложнение мира поставило перед образованием в целом и высшей школой в частности фундаментальный вопрос - «Как и чему учить в ситуации, когда обучающий курс по дисциплине имеет все более высокую вероятность устареть за время своего написания?» Поиск ответа на этот вопрос, очевидно, требует введения понятия времени актуальности (действия) знаний и навыков, полученных в результате

обучения. Обозначим время актуальности знания в виде T_{rk} , где rk – сокращение от *relevant knowledge*. Введем ось времени, на которой будем откладывать диапазоны актуальности различных типов знаний.

В первом приближении все знания и навыки по времени актуальности можно разделить на две большие традиционные группы: фундаментальные знания, характеризующиеся временем актуальности, – T_{frk} и прикладные знания характеризующиеся временем актуальности, – T_{ark} . В этом приближении еще нет такой категории знаний и навыков, как компетенции. Поэтому начнем анализ с фундаментальных знаний, продолжим его на прикладных знаниях, а затем попробуем применить этот опыт к анализу компетенций.

Если отложить на оси времени диапазон времени актуальности (ДВА) фундаментальных знаний (ФЗ), то правая граница этого диапазона, очевидно, стремится к бесконечности, а минимальная левая граница равна усредненной продолжительности жизни человека из предположения, что фундаментальные знания и навыки потому фундаментальные, что остаются актуальными и востребованными всю жизнь. Более строгое требование к левой границе временного диапазона фундаментальных знаний можно сформулировать из предположения, что фундаментальное знание не должно устаревать в течение трех поколений. Тогда старики могут его передавать внукам. Отсюда, взяв для ориентира среднюю продолжительность жизни $T_{pl} = 75$ лет, где pl – сокращение от *peoplelife*, и среднее время смены поколения $T_{gc} = 30$ лет, где gc – сокращение от *generation change*, получаем минимальный срок актуальности фундаментальных знаний $T_{frk} = T_{pl} + (T_{pl} \text{ mod } T_{gc}) * T_{gc} = 75 + 2 * 30 = 135$ лет.

При увеличении продолжительности жизни – левая граница ДВА будет смещаться в сторону увеличения. Отсюда, если можно дать обоснованный прогноз актуальности некоторого знания на T_{frk} лет, то такое знание можно считать фундаментальным. Тривиальным примером фундаментального знания может быть закон всемирного тяготения, а тривиальным примером фундаментального навыка – умение читать.

Очевидно, приоритетной задачей высшей школы должна являться задача передачи фундаментальных знаний и навыков, хотя из приведенных примеров ясно, что многие из них должны быть получены еще в средней школе. Основной задачей НИИ РАН должно быть получение фундаментальных знаний, и в частности прогноз того, какие из них являются фундаментальными, а какие нет. Если принять T_{frk} критерием оценки фундаментальности, то следующим логичным действием должна быть разработка методики его расчета, учитывающая:

1) актуальную востребованность фундаментальных знаний с составлением базовых наборов фундаментальных знаний для дошкольников, школьников, студентов, аспирантов (сокращенно – ДШСА) и специальных наборов фундаментальных знаний по отраслям, направлениям, специализациям, специальностям (сокращенно – ОНСС) и т.д. Это количественное распределение;

2) актуальный уровень или степень глубины или сложности освоения фундаментальных знаний по категориям ДШСА и ОНСС. Это качественное распределение;

3) актуальные контрольные задания, обеспечивающие достоверную оценку достижения обучаемыми количественных и качественных показателей освоения фундаментальных знаний (из пунктов 1 и 2).

Рассмотрим теперь возможные подходы к оценке временного диапазона актуальности прикладных знаний. Понятно, что основными поставщиками прикладных знаний должны являться – отраслевые НИИ. Понятно, что задача передачи прикладных знаний является основной для колледжей, представляющих собой аналог советских профтехучилищ – ПТУ. Также понятно, что обе временные границы ДВА прикладных знаний (ПЗ) должны быть меньше границ ДВА ФЗ. Но насколько? Начнем с левой границы и обратимся к продолжительности опыта, который требуется в хороших вакансиях, размещаемых работодателями. Как правило, это 2–3 года. Понятно, что 2-летние вложения в квалификацию, требуют некоторого срока окупаемости, т.е. времени, в течение которого приобретенный опыт актуален и не надо кардинально переучиваться и тратить еще 2 года на приобретение опыта нового прикладного знания. Каким может быть этот срок? Как минимум, он не должен быть меньше времени, затраченного на обучение. Отсюда получаем первую минимальную оценку левой границы ДВА ПЗ в 4–6 лет. Таким образом, средняя оценка 5 лет.

Уточним данную оценку, рассматривая ситуацию приобретения человеком второго высшего образования. Известно, что срок обучения при получении второго высшего образования составляет 2–4 года и он меньше, чем срок обучения для получения полного первого высшего образования, который равен 6 годам. Эту разницу можно объяснить тем, что во втором высшем образовании человек получает больше прикладных знаний и меньше фундаментальных, в то время как в первом высшем образовании он получает больше фундаментальных и меньше прикладных знаний. Получение второго высшего образования – достаточно распространенное явление, свидетельствующее о резкой смене направления профессиональной деятельности. Учитывая, что получение третьего высшего образования – достаточно редкое явление, можно сделать вывод, что за период профессиональной деятельности, который округленно оценим в 50 лет (с 20 до 70 лет), переучиться на

новый набор прикладных знаний можно 1 раз. Таким образом, получаем вторую оценку левой границы ДВА ПЗ в $50/2=25$ лет.

Взяв среднее от первой и второй оценки, получаем значение для левой границы ДВА ПЗ: $(5+25)/2=15$ лет. Если взять среднее время получения второго высшего образования как $(2+4)/2=3$ года. То получаем, что продолжительность окупаемости от вложений в прикладное знание составляет $15-3=12$ лет, т.е. в 4 раза больше времени, потраченного на его приобретение. Оценка 15 лет близка к сроку устаревания прикладного знания при условии получения человеком третьего высшего образования: $50/3\sim=16,5$ лет. Получение же четвертого высшего образования представляется совершенно исключительным случаем. Отсюда можно сделать вывод о том, что на сегодня средняя левая граница ДВА ПЗ составляет 15 лет, минимальная – $2+2*4=10$ лет, максимальная – 25 лет.

Обоснование значения правой границы ДВА ПЗ представляется более простым. Здесь, в первом приближении, можно принять, что правая граница ДВА ПЗ совпадает с левой границей ДВА ФЗ $T_{frk} = 135$ лет.

Приведенные выше рассуждения с опорой на время актуальности фундаментального и прикладного знания позволяют сформулировать подход для получения определения компетенции, имеющего измеряемую характеристику в виде времени обучения и времени актуальности. При изучении одной дисциплины в течение семестра студент, как правило, должен получить несколько компетенций. Несколько – это не менее трех. Отсюда – среднее время получения компетенции $\sim= 5$ нед. Но понятно, что фактическое время обучения меньше так как студент изучает и другие предметы. Принимая во внимание, что студент имеет 2 занятия по дисциплине в неделю продолжительностью 1,5 часа, а время самостоятельного изучения материалов дисциплины втрое больше, получаем оценку времени получения компетенции в $(2+2*3)*1,5=12$ часов в неделю, или 60 часов за 5 недель. Это примерно соответствует длительности разнообразных «быстрых курсов», которые проводятся в форме 1–2 недели обучения с погружением, когда 5–6 дней в неделю учатся по 8–10 часов, или 2–6 мес. в более «щадящем» режиме – 2 раза в неделю по 2 часа. Таким образом, можно сделать вывод о том, что компетенция – востребованный рынком навык, которому можно обучиться в период от 1–2 недель до 2–6 мес. Отсюда, по аналогии с прикладным знанием, принимаем правую границу ДВА компетенции равной левой границе ДВА ПЗ, т.е. от 10 до 25 лет. Левую границу ДВА компетенции получаем на основе расчетов от времени обучения с закладкой пятикратного времени окупаемости обучения $0,5+5*0,5=3$ года. Можно предположить, что это время примерно соответствует времени

«короткоживущих» технологий, которые быстро теряют популярность, вытесняясь конкурентами.

Высказанные выше оценки позволяют классифицировать компетенцию как освоение некоторой технологии, навык в которой может быть продан непосредственно. То есть компетенции можно продавать «поштучно». Отсюда мы можем предложить такое определение прикладного знания: «Прикладное знание это знание, которое включает в себя как неотъемлемую часть связанное множество (граф, систему) таких компетенций, что каждая из них и любое сочетание части из них не может быть в общем случае продана (востребована) отдельно с достаточным спросом». Поэтому «продать» компетенцию проще, чем прикладное знание, и намного проще, чем фундаментальное [1]. Компетенция, по сути, это рабочая специальность информационной эпохи.

Полученные временные оценки ДВА дают ориентиры при определении времени обучения, отвечающего за освоение различных типов знаний. Например, выпускная квалификационная работа бакалавра – это демонстрация в первую очередь прикладных знаний. Чтобы работа была сделана хорошо, необходимо предварительно 2 года на получение прикладных знаний и составляющих их компетенций в виде, приближенном к конечному результату. На сегодня такому условию удовлетворяет проектный подход в обучении [2]. Он позволяет также решать проблемы выбора среди растущего многообразия технологий и актуализации дисциплин при условии получения проектных заданий от заинтересованных внешних заказчиков, осуществляющих деятельность в текущем актуальном стеке технологий. Лучшими задачами для проектов являются задачи от ведущего специалиста организации, на проверку выполнения которых у него не хватает времени из-за занятости.

В Институте СПИНТех проектный подход системно реализуется в форме проектного командного обучения (ПКО) с 2017 года [3], хотя нельзя не упомянуть, что первая коллективная защита состоялась в НИУ МИЭТ еще в 2005 году. Главное требование при отборе задач заключается в том, что задача обязательно должна иметь потенциал развития для ВКР и желательно для магистерской диссертации. За 3 года применения сформировались следующие принципы проведения ПКО:

- отборочный тур на тестовой задаче;
- добровольный выбор задачи ПКО (ПредПКО) из списка и самоорганизация в команды по 2–4 человека; допустимо двум командам работать над одной задачей;
- результат представляется на открытой защите с приглашением заинтересованного заказчика ПКО;
- курирование со стороны постановщика задачи

- еженедельное информирование о прогрессе в решении; 3 промежуточных сдачи этапов + защита. Несдача любого этапа, как и пропуск трех отчетов в любом порядке, означает прохождения курса лабораторных с начала и финальную оценку не выше 4;
- освоение в рамках задачи не менее 50% технологий дисциплины. Остальные 50% – это технологии, освоение которых требуется для решения задачи заинтересованного заказчика;
- наличие в проектной задаче потенциала ВКР, магистерской;
- приравнивание успешного решения проектной задачи к прохождению собеседования у постановщика задачи.

Опыт ПКО с 2017 года показан на рисунке 1.

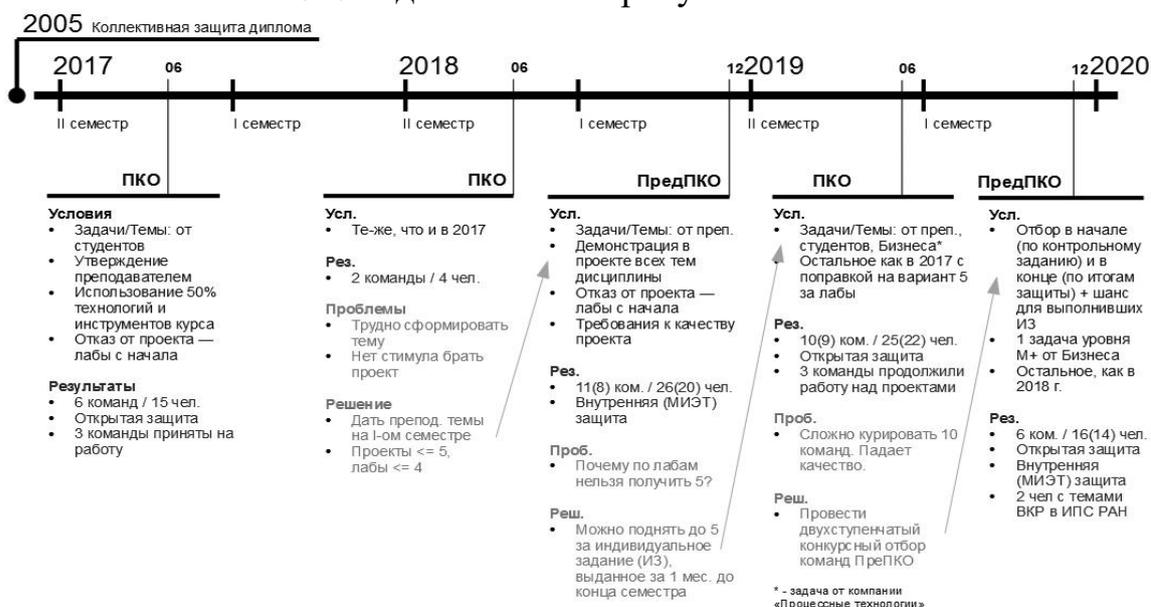


Рис. 1. Опыт проведения ПКО в Институте СПИНТех

Первый опыт в работе над задачей заинтересованного заказчика был получен в весеннем семестре 2020 года в сотрудничестве с компанией «Процессные технологии» [4]. На сегодняшний день студенты, которые делали этот проект, делают свои ВКР в данной компании. В весеннем семестре 2020 года реализуется уже два проектных задания.

Развитие решения ПКО позволяет выйти на обоснованное формирование индивидуальных образовательных траекторий (см. рис. 2). Для построения этого необходимо научиться классифицировать задачи ПКО по сложности и при этом резко увеличить количество этих задач, чтобы обеспечить полноту и актуальность. Очевидно, что такая работа в современных условиях должна проводиться с применением искусственного интеллекта.

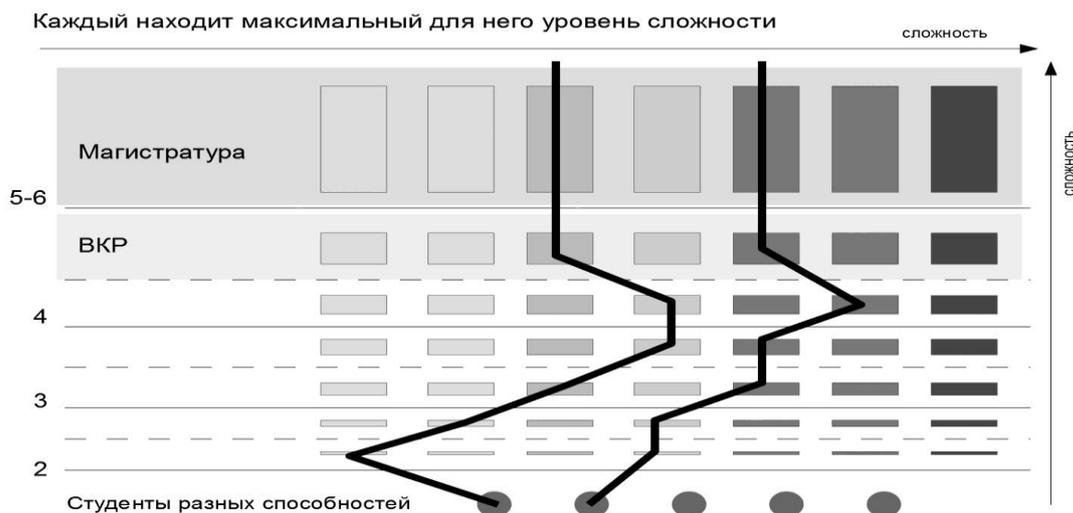


Рис. 2. Построение индивидуальных образовательных траекторий на основе критерия сложности

Литература

1. Андрианов А.М. Компетенции «против» фундаментальных знаний. Война или система? – URL: <http://glavkonstruktor.ru/news/kompetentsii-protiv-fundamentalnykh-i-prikladnykh-znaniy-voyna-ili-sistema>, 2016.
2. Проектное обучение. Практика внедрения в университетах / под ред. Евстратовой Л.А., Исаевой Н.В., Лешуковой О.В. – М.: Открытый университет Сколково, 2018. – 154 с.
3. Андрианов А.М. Проектное командное обучение с использованием СПО // Материалы четырнадцатой всероссийской конференции «Свободное программное обеспечение в высшей школе». – М.: МАКС Пресс, 2019 – С. 130–135.
4. Михеев А.Г. Андрианов А.М. Привлечение студентов к разработке свободной системы RunaWFE Free в рамках проектного командного обучения // Материалы пятнадцатой всероссийской конференции «Свободное программное обеспечение в высшей школе». – М.: МАКС Пресс, 2020. – С. 99–105.

A.M. Andrianov

Institute of System and Software Engineering and Information Technologies. National Research University of Electronic Technology (MIET)

ON THE RELEVANCE OF THE APPLICATION OF PROJECT TRAINING ON THE EXAMPLE OF PROJECT TEAM EDUCATION (PTE)

Keywords: *training; fundamental knowledge; applied knowledge; competence; project-based learning; team-teaching; the relevance of the knowledge.*

Abstract. *The article considers approaches to determining the time of relevance of fundamental and applied knowledge and competencies. And the approach of project team training is proposed for the interrelated acquisition*

of relevant applied knowledge and competencies that improve the quality of final qualifying works and master's theses of students.

Н.Н. Богданова, Р.А. Федотов
Смоленский государственный университет

УДК 519.283

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ СКМ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: *профильный уровень; ЕГЭ по математике; задачи с параметром; графический метод; система компьютерной математики Wolfram Mathematica.*

В данной статье рассматриваются возможности использования математического пакета Wolfram Mathematica при графическом решении задач с параметрами, в том числе предлагавшихся на ЕГЭ по профильной математике.

1. Введение. Современные тенденции развития образования диктуют необходимость комплексного подхода в обучении: сочетание традиционных методов с использованием математических пакетов. Многие школьные задачи, включая задачи повышенной сложности ЕГЭ по профильной математике, могут эффективно и корректно решаться с помощью систем компьютерной математики.

При правильном подходе большинство задач допускает геометрическую интерпретацию. В частности, для очень многих классов задач с параметрами графический способ часто бывает более рациональным, чем графические методы. Однако, трудности могут возникать при необходимости сделать чертеж к задаче и затем его проанализировать. Проблема решается с помощью графических возможностей компьютерных систем математики, а использование анимации этих систем позволяет изучать геометрические объекты в динамике.

2. Решение задач. Приведем некоторые примеры решения уравнений, неравенств и их систем с параметром координатно-графическим методом.

Пример 1 (ЕГЭ, 2017г.). *Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств*

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение. На плоскости Oxa построим графики:

```
Plot[{Labeled[2/x, "ax = 2", 0], Labeled[Sqrt[x - 1], "a = \sqrt{x - 1}", 2], Labeled[(3 x - 11)/2, "a = \frac{1}{2} (3 x - 11)", 1]},
{Labeled[0.5, "a = 0.5", 1], Labeled[1, "a = 1", 1], Labeled[Sqrt[3], "a = \sqrt{3}", 1]}, {x, -1, 6}, AxesStyle -> Arrowheads[0.03],
{Gray, White}}, 1 -> {{3}, {White, White}}, Epilog -> {Directive[{Thick, Black, Dashed}], Line[{{3, 4}, {3, -1}], Line[{{4, 4}, {4, -1}}]}
```

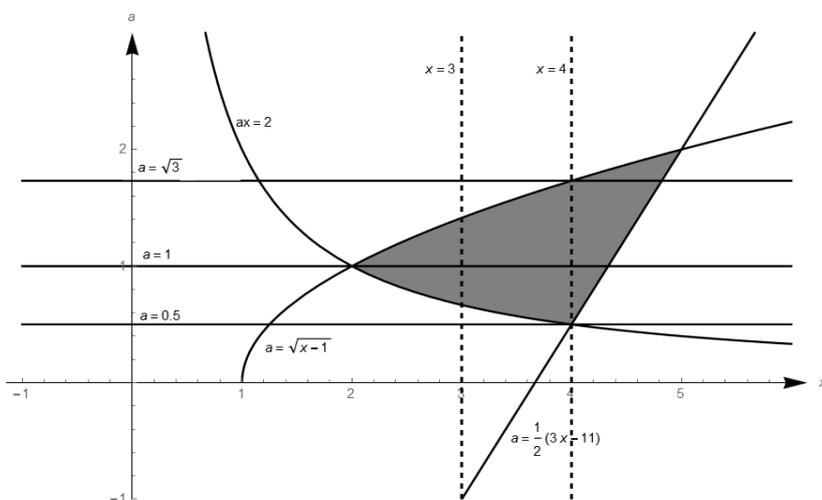


Рис. 1

гиперболу $ax = 2$, кривую $\sqrt{x-1} = a$ и прямую $3x = 2a + 11$, выделив серым цветом область, удовлетворяющую данной системе неравенств. При этом условию задачи удовлетворяет «полоса», ограниченная прямыми $x = 3$, $x = 4$ (рис. 1).

Из данного чертежа видно, что заданная система имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$ тогда и только тогда, когда $a \geq \frac{1}{2}$ и $a < \sqrt{3}$.

Ответ: $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}]$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x , не удовлетворяющее неравенству

$$a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2.$$

Решение. Заметим, что исходное неравенство можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} x(x-2) \leq 0, \\ a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x. \end{cases}$$

Неравенство $a \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ задает часть плоскости, которая ограничена параболой с вершиной $(2; 2)$ и содержит точку $(2; 0)$. Неравенство $x(x-2) \leq 0$ задает часть плоскости, расположенную между прямыми $x = 0$, $x = 2$.

Построим графики рассмотренных функций в системе Oxa (рис. 2):

```
Plot[{{Labeled[Piecewise[{{-1/2 (x^2) + 2 x, x <= 2}}, "a <= 2 x - x^2/2", 0.5]}, Labeled[2, "y = 2", 3]},
Labeled[1.5, "y = 1.5", 3]}, {x, 0, 2.5}, AxesStyle -> Arrowheads[0.03], PlotRange -> {0, 2.2}, AxesLabel -> {x, a},
PlotStyle -> Black, Filling -> {1 -> Bottom}, Epilog -> {Directive[{Thick, Black, Dashed}], Line[{{1, 0}, {1, 2.5}}],
Line[{{2, 0}, {2, 2.5}}]}]
```

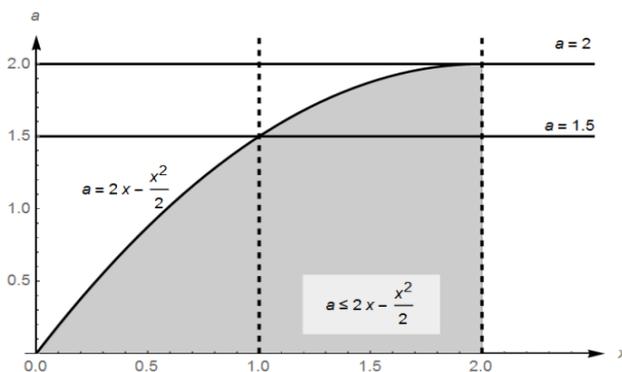


Рис. 2

Из данного чертежа понятно, что только при $a > 1,5$ на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x , не удовлетворяющее неравенству.

Ответ: $(1,5, +\infty)$.

Пример 3 (ЕГЭ, 2019г.). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{a - x^2 + 3x}{4x - a^2} = 0$$

имеет ровно 2 различных корня.

Решение. Заданное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} a - x^2 + 3x = 0, \\ 4x - a^2 \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $a - x^2 + 3x = 0$ задает на плоскости Oxa параболу, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$. Уравнение $4x - a^2 = 0$ задает параболу с осью Ox и вершиной в точке $(0; 0)$.

Построим графики данных функций в системе *Oxa* и найдем точки их пересечения, обозначив прямые пунктирной линией (рис. 3):

```
Solve[a - x^2 + 3 x == 0 && 4 x - a^2 == 0, {x, a}, Reals]
|решить уравнения |множество действительных чисел

Plot[{Labeled[-9/4, "a = -9/4", 4], Labeled[x^2 - 3 x, "a = x^2 - 3 x", 2], Labeled[Sqrt[4 x], "a^2 = 4 x", 2], Labeled[-Sqrt[4 x], "", 2]},
|гр... |с пометкой |с пометкой |с помет... |квадратный корень |с помет... |квадратный корень

{x, -1, 5}, AxesStyle -> Arrowheads[0.03], PlotRange -> {-3.5, 5}, AxesLabel -> {x, a}, PlotStyle -> Black, Filling -> {1 -> Top},
|стиль осей |наконечники |отображаемый диапазо... |обозначения на осях |стиль гр... |чёр... |заливка |вверх

Epilog -> {Directive[{Thick, Black, Dashed}], Line[{{-6, -2}, {6, -2}}], Line[{{-6, 0}, {6, 0}}], Line[{{-6, 4}, {6, 4}}]}
|эпилог |директива |жир... |чёр... |штрихо... |((ломаная) линия |((ломаная) линия |((ломаная) линия

{x -> 0, a -> 0}, {x -> 1, a -> -2}, {x -> 4, a -> 4}}
```

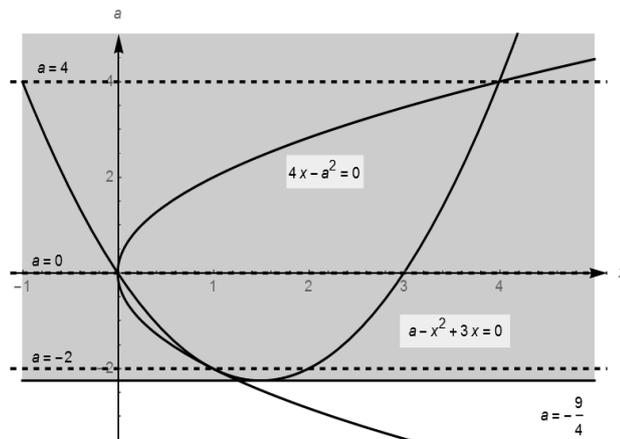


Рис. 3

Из данного чертежа видно, что данное уравнение имеет ровно 1 корень только тогда, когда $a = -\frac{9}{4}$, а также в точках пересечения данных парабол, то есть при $a = -2$, $a = 0$, $a = 4$. При $a < -\frac{9}{4}$ уравнение корней не имеет.

Ответ: $a \in \left(-\frac{9}{4}; -2\right) \cup (-2; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

Литература

1. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. – М.: Оникс, 2015.

N.N. Bogdanova, R.A. Fedotov
Smolensk State University

SOLUTION OF PROBLEMS WITH PARAMETERS BY SCM WOLFRAM MATHEMATICA

Keywords: *profile level; USE in mathematics; problems with a parameter; graphical method; Wolfram Mathematica computer mathematics system.*

Abstract. *This article discusses the possibilities of using the Wolfram Mathematica mathematical package for graphically solving problems with parameters, including those proposed at the exam in profile mathematics.*

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ КАРТЫ

Ключевые слова: *индивидуальные образовательные траектории; личностно ориентированное обучение; образовательные карты.*

В статье рассматривается проблема поиска понятия, обобщающего понятие «индивидуальная образовательная траектория». Анализируются современные подходы к определению понятий «карта концептов», «образовательная карта», «карта интеграции знаний». Предлагается рассматривать образовательную карту, как результат обобщения всех возможных альтернативных траекторий движения обучающегося по учебному материалу. Вводится понятие «индивидуальная образовательная карта».

Проблема личностно ориентированного обучения относится к наиболее востребованным на современном этапе развития педагогики. Придание особого значения личностному развитию и личностной самоактуализации приводит к развитию педагогических концепций, в рамках которых обучающийся рассматривается в качестве ключевого субъекта учебного процесса. В свою очередь, это вызывает повышенный интерес к проблеме поиска педагогических инструментов, создающих условия для реализации таких концепций [1]. Распространенным и востребованным инструментом индивидуализации учебного процесса является индивидуальная образовательная траектория [1]. Использование понятия «траектория» естественным образом вызывает вопрос о пространстве, в рамках которого реализуются рассматриваемые траектории, его природе и свойствах. Применительно к проблеме использования новых информационных технологий в обучении, такое пространство должно представлять собой удобную среду формального моделирования. Мы полагаем, что современное состояние педагогической науки позволяет дать достаточно подробный ответ на этот вопрос.

Если обратиться к геометрической аналогии, то траектории реализуются в каком-то пространстве определенной размерности. Если остановиться на размерности, равной двум, и учесть, что траектория обучения в нестрогой её трактовке представляет собой путь достижения цели обучения, то естественным образом возникает понятие «карта». Данное понятие, точнее говоря некоторые его производные, достаточно

широко представлены в современной педагогической науке. В зарубежной педагогике существует подход, основанный на использовании понятий «образовательная карта», «карта концептов», «карта интеграции знаний» и родственных им [3; 4; 5; 6]. В настоящее время встречаются достаточно разнообразные трактовки данных понятий, причём их анализ позволяет сделать вывод о наличии у них некоторой общей теоретической основы.

Согласно взглядам многих современных исследователей, понятие «образовательная карта» находится в тесной связи с понятием «карта концептов». А.Дж. Канас (Alberto J. Canas) трактует карту концептов как «графическое представление знаний, основными элементами которого являются понятия и отношения между ними» [3]. Заметим, что понятия, составляющие основу учебного материала по данной дисциплине, и отношения между ними рассматриваются в качестве основы анализа и моделирования учебного материала в отечественной педагогике на протяжении последних пятидесяти лет [2]. В целом данная традиция восходит к работам Н.И. Зильберберга и Р.Г. Хазанкина. Таким образом, можно констатировать определенное сходство подходов в отечественной и зарубежной педагогике. А. Дж. Канас определяет понятие «концепт» следующим образом: «воспринимаемая закономерность, характеризующая события или объекты, или запись событий или объектов, обозначенных определенной меткой» [3]. Концепты образуют систему, характеризующуюся определенными внутренними взаимосвязями. Концепты в совокупности со связями между ними образуют структуры («тройки») следующего вида: «концепт 1 – связь между концептами 1 и 2 – концепт 2». Такие тройки являются сущностно значимыми утверждениями о каком-либо объекте или явлении. Для их обозначения А.Дж. Канас предлагает использовать термины «предложения» (propositions), «семантические единицы» (semantic units), «единицы значения» (units of meaning) [3]. Все концепты в рамках определенной предметной области образуют некоторую иерархическую структуру. Такая структура, в свою очередь, находит отражение на карте концептов. При этом их дифференциация по уровню общности отражается в месте их расположения на карте. Самые общие концепты локализованы в верхней части карты, по мере снижения степени общности они размещаются на более низких уровнях. Подобный подход обладает определенным недостатком – в общем случае для конкретного учебного материала иерархия концептов может быть построена несколькими нетождественными способами [2]. Вызвано это тем, что иерархическая структура определенной области знания существенным образом определяется контекстом, в котором соответствующая информация рассматривается или находит практическое применение. Для разрешения отмеченной проблемы А.Дж.

Канас предлагает рассматривать в рамках моделируемой области так называемый «фокусный вопрос» (focus question) [3]. В процессе моделирования фокусный вопрос должен использоваться в качестве «отправной точки». При использовании фокусного вопроса субъект, который строит карту концептов (в его качестве может выступать преподаватель или обучающийся), фиксирует свое внимание на нем, что формирует контекст, в котором и происходит построение иерархии концептов. В свою очередь фокусный вопрос является инструментом организации информации. В рамках построения карт концептов присутствует инструмент, позволяющий отразить взаимосвязи концептов, существенно «удаленных» друг от друга на карте – «перекрестные ссылки» (cross-links) [3]. Они фиксируют отношения между концептами, не связанными непосредственно и, соответственно, не образующими «тройки». Использование перекрестных ссылок позволяет отразить взаимосвязи между концептами, относящимися к разным областям («доменам») карты концептов [3]. А.Дж. Канас особо отмечает роль перекрестных ссылок в процессе формирования нового знания. При определенных условиях они могут обеспечивать формирование устойчивых содержательных связей между новыми концептами, подлежащими усвоению, и уже усвоенными [3]. Такой результат имеет место в ситуации, когда карта концептов создается непосредственно самими обучающимися. При этом происходит интеграция новых концептов в уже сформированную у обучающегося когнитивную структуру.

Ц. Козентино де Коэн и Б. Чу Клевелл (С. Cosentino de Cohen & В. Chu Clewell) [4] трактуют понятие «образовательная карта» в контексте более общего понятия «дорожная карта» (roadmap) [4]. В качестве дорожной карты они вполне традиционно понимают совокупность промежуточных целей, соответствующих им задач и способов их решения, которые ведут к достижению основной, фундаментальной цели. Исключительно интересный и перспективный подход реализован Р. Миллером (Ron Miller). Он трактует понятие «образовательная карта» как «совокупность всех потенциальных альтернатив возможного хода процесса обучения и соответствующих сценариев личностного развития учащегося» [5]. Таким образом данный подход, хоть и в неявном виде, содержит в себе идею рассмотрения образовательной карты как результата обобщения всех возможных альтернативных траекторий движения обучающегося по учебному материалу, что представляется нам весьма перспективным.

Б.А. Швиндемманн (Beat A. Schwendimann) в своей работе вводит понятие «карта интеграции знаний» (knowledge integration map) [6]. Он указывает на существенные затруднения, которые имеют место при количественном анализе данных, содержащихся в карте концептов:

«отсутствует единый метод количественного анализа, который может точно описать все различные формы информации, содержащейся в карте концептов» [6]. При этом сочетание количественных и качественных методов анализа информации, применяемых на протяжении определенного времени, позволяет получить достоверное и допускающее количественное измерение описание процесса усвоения обучающимся учебного материала. В рамках подхода, предлагаемого Б.А. Швиндеманном, могут использоваться разнообразные количественные методы, такие как «взвешенные оценки основных ссылок, сетевой анализ, топологический анализ и качественный пропозициональный анализ» [6]. Заметим, что реализация количественных методов в рамках подхода Б.А. Швиндеманна существенным образом основывается на использовании разнообразных экспертных оценок. Их роль существенно выше, чем в других подходах, рассмотренных нами ранее.

Как следует из рассмотренных нами взглядов современных педагогов, в настоящее время исследователи отмечают наличие в картах концептов и образовательных картах информации, которая может служить основой для построения индивидуальных траекторий обучения. Мы предлагаем развить эту идею и рассматривать образовательную карту как совокупность всех возможных индивидуальных образовательных траекторий. При этом возникает определенное противоречие, обусловленное объективным характером образовательной карты (определяемой структурой и содержанием учебного материала) и субъективным характером индивидуальной образовательной траектории (определяемой, помимо учебного материала, индивидуальными особенностями обучающегося). Мы полагаем, что это противоречие может быть преодолено за счет придания образовательной карте индивидуализированного характера. Индивидуальная образовательная карта должна отражать все возможные альтернативные пути освоения данного учебного материала данным обучающимся. Соответственно такая карта будет представлять собой пространство всех возможных индивидуальных образовательных траекторий для данного обучающегося в рамках данного учебного материала, отражающее как содержание, структуру и логику этого учебного материала, так и индивидуальные особенности обучающегося. Индивидуальная образовательная карта является инструментом проектирования индивидуального образовательного маршрута.

Литература

1. Бояринов Д.А. Адаптивное сетевое образовательное пространство: модели, технологии, принципы построения: монография. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. – 200 с.

2. Емельченков Е.П., Бояринов Д.А., Козлов С.В. Информационные системы автоматизированной поддержки инновационной деятельности: модели, проектирование и реализация: монография. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. – 163 с.

3. Cañas A.J. A Summary of Literature Pertaining to the Use of Concept Mapping Techniques and Technologies for Education and Performance Support. – Pensacola FL: The Institute for Human and Machine Cognition, 2003. – 116 p.

4. Cosentino de Cohen C. Chu Clewell B. Putting English Language Learners on the Educational Map // Education if Focus. Urban Institute Policy Brief. – NW, Washington, DC; The Urban Institute, 2015. – 10 p.

5. Miller R. Educational Alternatives: A Map of the Territory // Paths of Learning. – #20 (Spring, 2004).– The Foundation for Educational Renewal. Brandon, VT, 2004.– 10 p.

6. Schwendimann B.A. Making Sense of Knowledge Integration Maps // Digital Knowledge Maps in Education. Technology-Enhanced Support for Teachers and Learners, Editors: Ifenthaler, Dirk, Hanewald, Ria, Springer-Verlag New York, 2014. – P. 17-40.

D.A. Boyarinov

Smolensk State University

INDIVIDUAL EDUCATIONAL TRAJECTORIES AND EDUCATIONAL MAPS

Keywords: *individual educational trajectories; personality-oriented learning; educational maps.*

Abstract. *The article deals with the problem of finding a concept that generalizes the concept of "individual educational trajectory." The modern approaches to the definition of the concepts "concept map", "educational map", "knowledge integration map" are analyzed. It is proposed to consider the educational map as a result of a generalization of all possible alternative trajectories of a student's progress based on educational material. The concept of "individual educational card" is introduced in the article.*

С.А. Гомонов

Смоленский государственный университет

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ ПРИЁМАХ ГЕНЕРИРОВАНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПРИБЛИЖАЮЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ПОЛЯ \mathbb{R}

Ключевые слова: *поле действительных чисел; поле алгебраических чисел; минимальный многочлен; степень алгебраического числа; простое и повторное алгебраические расширения поля рациональных чисел; итерационная последовательность; минимальный многочлен.*

В статье рассматриваются некоторые приемы построения итерационных последовательностей, связанных с последовательностями степеней фиксированных положительных чисел, меньших единицы.

Эти итерационные последовательности с рациональными членами позволяют с любой точностью получать приближенные значения алгебраических чисел поля R .

Хорошо известен так называемый процесс Герона для вычисления с любой наперед заданной точностью квадратных корней из положительных чисел (а также соответствующие процессы и для кубических корней и корней более высоких степеней), однако предлагаемый в данной статье способ построения рациональных приближений к алгебраическим числам настолько элементарен, что мог быть известен ещё во время первой Александрийской школы Архимеду и его современникам.

1. Рассмотрим вначале достаточно общую ситуацию, а именно: пусть задано числовое выражение вида $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – иррациональные алгебраические числа поля R , $s \in N$, а $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ – многочлен из кольца $Z[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (случай, когда $f \in Q[x_1, x_2, \dots, x_n]$ очевидным образом сводится к оговоренной выше ситуации); и пусть известно, что

$$0 < f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < 1, \quad (1)$$

а значит, будут справедливы и все числовые неравенства вида

$$0 < (f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s))^{m+n} < (f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s))^n < 1, \quad (2)$$

где $m, n \in N$, причём очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s))^n = 0. \quad (3)$$

Вот теперь можно будет сформулировать достаточно общего характера задачу:

а) есть ли возможность получить из неравенств (2) оценки сверху и снизу для каждого из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (а возможно, и для всех элементов поля $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$);

б) причём хотелось бы иметь всё более точные оценки, если использовать неравенства из (2) со всё возрастающими значениями n и m .

Сразу можно отметить, что данная задача допускает некоторые упрощения, а именно: сколь большим ни было бы число $s \in N$, всегда ситуацию можно свести к случаю $s = 1$, так как конечное алгебраическое расширение поля Q , полученное присоединением к Q конечного числа иррациональных действительных алгебраических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, т.е.

так называемое конечное алгебраическое расширение $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ совпадает с некоторым *простым алгебраическим расширением* поля Q , т.е. существует такое алгебраическое над полем Q иррациональное число Θ , для которого выполняется равенство $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = Q(\Theta)$, причём элемент Θ можно представить в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (или части их, если они алгебраически зависимы над полем Q) [1].

С другой стороны, поле $Q(\Theta)$ можно рассматривать как векторное пространство над полем скаляр – рациональных чисел с базисом $(1, \Theta, \Theta^2, \dots, \Theta^{p-1})$, где натуральное число $p = \deg_Q \Theta \geq 2$ – это степень любого из минимальных многочленов $\varphi(x) \in Z[x]$ числа Θ [1]. То, что можно выбрать этот минимальный многочлен именно с целыми коэффициентами, очевидно; более того, если перейти от Θ к $l \cdot \Theta$, где l – соответствующее целое число – старший коэффициент многочлена $\varphi(x)$, то минимальный многочлен для числа $l \cdot \Theta$, т.е. $\tilde{\varphi}(x) = l^{p-1} \cdot \varphi(\frac{x}{l})$ будет даже *нормированным*.

2. Пусть теперь $\Theta \in R$ – алгебраическое иррациональное число, $\varphi(x)$ – его минимальный многочлен с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом, причём $\deg_Q \Theta = s = \deg \varphi(x) \geq 2$.

Кроме того, пусть многочлен $f(x) \in Z[x] \setminus Z$ и известно, что выполняется двойное числовое неравенство

$$0 < f(\Theta) < 1, \quad (4)$$

а значит, выполняются и все неравенства вида

$$0 < (f(\Theta))^{m+n} < (f(\Theta))^n < 1, \quad (5)$$

где m, n – любые натуральные числа, а так как один из базисов поля $Q(\Theta)$ – это $(1, \Theta, \Theta^2, \dots, \Theta^{s-1})$, то $f(\Theta) = C_0 + C_1\Theta + \dots + C_{s-1}\Theta^{s-1}$, где $C_0, \dots, C_{s-1} \in Z$, а значит, учитывая возможность применения полиномиальной формулы, неравенства (4) и (5) можно переписать в следующем виде:

$$0 < C_0 + C_1\Theta + \dots + C_{s-1}\Theta^{s-1} < 1, \quad (6)$$

$$0 < A_0^{(m+n)} + A_1^{(m+n)}\Theta + \dots + A_{s-1}^{(m+n)}\Theta^{s-1} < B_0^{(n)} + B_1^{(n)}\Theta + \dots + B_{s-1}^{(n)}\Theta^{s-1} < 1, \quad (7)$$

где $A_0^{(m+n)}, A_1^{(m+n)}, \dots, A_{s-1}^{(m+n)}, B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, \dots, B_{s-1}^{(n)} \in Z$ при любых натуральных числах m, n , кроме того

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (B_0^{(n)} + B_1^{(n)}\Theta + \dots + B_{s-1}^{(n)}\Theta^{s-1}) = 0. \quad (8)$$

3. Рассмотрим теперь более частные случаи поставленной выше задачи, а именно: пусть $\Theta = \sqrt{t}$, где $t \in N$, но t не является “полным” квадратом натурального числа, тогда $\deg_Q \Theta = 2$, а $\varphi(x) = x^2 - t \in Z[x]$, причём многочлен $\varphi(x)$ – нормированный и неприводимый над Z и над Q . И пусть известно, что

$$0 < \sqrt{t} - r < 1, \quad (9)$$

где $r = [t]$ – целая часть числа \sqrt{t} , не меньшая единицы. Тогда будут справедливы следующие числовые неравенства: $0 < (\sqrt{t} - r)^2 < 1, 0 < (\sqrt{t} - r)^3 < 1, \dots, 0 < (\sqrt{t} - r)^n < 1, \dots$. Каждое из этих неравенств позволяет получить оценку сверху и снизу для \sqrt{t} , причём, используя бином Ньютона, эти неравенства, включая (9), можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{t} - r < 1, \\ 0 < (\sqrt{t} - r)^2 = t + r^2 - 2r\sqrt{t} < 1, \\ 0 < (\sqrt{t} - r)^3 = -(3tr + r^3) + (t + 3r^2)\sqrt{t} < 1, \\ 0 < (\sqrt{t} - r)^4 = t^2 + 6tr^2 + r^4 - (4tr + 4r^3)\sqrt{t} < 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

и так далее.

Причём последовательности $(A_n) \subset N$ и $(B_n) \subset N$, где:

$$\begin{cases} A_1 = r, A_2 = t + r^2, A_3 = 3tr + r^3, A_4 = t^2 + 6tr^2 + r^4, \dots; \\ B_1 = 1, B_2 = 2r, B_3 = t + 3r^2, B_4 = 4tr + 4r^3, \dots \end{cases} \quad (11)$$

являются монотонно возрастающими (в строгом смысле) последовательностями с сугубо натуральными членами. Из двойных неравенств (10) немедленно получаем, что:

$$\begin{aligned} r < \sqrt{t} < r + 1, \\ \frac{A_2 - 1}{B_2} = \frac{t + r^2}{2r} < \sqrt{t} < \frac{t + r^2}{2r} = \frac{A_2}{B_2}, \\ \frac{A_3}{B_3} = \frac{3tr + r^3}{t + 3r^2} < \sqrt{t} < \frac{3tr + r^3 + 1}{t + 3r^2} = \frac{A_3 + 1}{B_3}, \\ \frac{A_4 - 1}{B_4} = \frac{t^2 + 6tr^2 + r^4 - 1}{4tr + 4r^3} < \sqrt{t} < \frac{t^2 + 6tr^2 + r^4}{4tr + 4r^3} = \frac{A_4}{B_4}, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

и так далее.

Было бы весьма интересно исследовать на монотонность и сходимость последовательности $(\alpha_k) = \left(\frac{A_{2k}}{B_{2k}} \right)$ и $(\beta_k) = \left(\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} \right)$, причём из сходимости (α_k) вытекает сходимость к тому же пределу и

последовательности $\left(\frac{A_{2k}-1}{B_{2k}}\right)$, так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = +\infty$. Аналогичная ситуация для (β_k) и $\left(\frac{A_{2k+1}+1}{B_{2k+1}}\right)$.

Ограничимся подробным исследованием последовательности (α_k) .

Учитывая, что $A_{2k} - B_{2k}\sqrt{t} = (\sqrt{t}-r)^{2k}$, $k \in N$, имеем очевидное тождество:

$$\begin{aligned} A_{2k+2} - B_{2k+2} \cdot \sqrt{t} &= (A_{2k} - B_{2k} \cdot \sqrt{t}) \cdot (\sqrt{t}-r)^2, \text{ то есть} \\ A_{2k+2} - B_{2k+2} \cdot \sqrt{t} &= (A_{2k} - B_{2k} \cdot \sqrt{t}) \cdot (t+r^2-2r\sqrt{t}), \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} A_{2k+2} = A_{2k}(t+r^2) + 2rtB_{2k}, \\ B_{2k+2} = 2r \cdot A_{2k} + t \cdot B_{2k} + r^2 \cdot B_{2k}, \end{cases}$$

а значит:

$$\alpha_{k+1} = \frac{A_{2k+2}}{B_{2k+2}} = \frac{A_{2k} \cdot (t+r^2) + 2rtB_{2k}}{2r \cdot A_{2k} + (t+r^2) \cdot B_{2k}}.$$

Напомним, что $0 < A_{2k} - B_{2k} \cdot \sqrt{t} = (\sqrt{t}-r)^{2k} < 1$, следовательно $\sqrt{t} < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \alpha_k$, где $k \in N$, то есть (α_k) ограничена снизу.

Так как $A_{2k} = \alpha_k \cdot B_{2k}$, то

$$\alpha_{k+1} = \frac{A_{2k+2}}{B_{2k+2}} = \frac{A_{2k}(t+r^2) + 2rtB_{2k}}{2rA_{2k} + (t+r^2)B_{2k}} = \frac{\alpha_k \cdot B_{2k}(t+r^2) + 2rtB_{2k}}{2r \cdot \alpha_k \cdot B_{2k} + (t+r^2)B_{2k}} = \frac{\alpha_k \cdot (t+r^2) + 2rt}{2r \cdot \alpha_k + t+r^2}.$$

Убедимся, что $\alpha_{k+1} < \alpha_k$ при любом $k \in N$:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} < \alpha_k &\Leftrightarrow \frac{\alpha_k(t+r^2) + 2rt}{2r \cdot \alpha_k + t+r^2} < \alpha_k \Leftrightarrow \alpha_k(t+r^2) + 2rt < 2r \cdot \alpha_k^2 + (t+r^2) \cdot \alpha_k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2rt < 2r \cdot \alpha_k^2 \Leftrightarrow \alpha_k^2 > t \Leftrightarrow \alpha_k > \sqrt{t} \end{aligned}$$

– очевидное неравенство, а значит, последовательность (α_k) монотонно убывает и ограничена снизу, например, числом \sqrt{t} , а следовательно, имеет конечный предел. Обозначим $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$, причём очевидно, что $\alpha \geq \sqrt{t} > 0$.

Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в равенстве $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k(t+r^2) + 2rt}{2r \cdot \alpha_k + t+r^2}$, имеем следующее уравнение для α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha(t+r^2) + 2rt}{2r \cdot \alpha + t+r^2} \Leftrightarrow 2r\alpha^2 + \alpha(t+r^2) = \alpha(t+r^2) + \\ &+ 2rt \Leftrightarrow 2r\alpha^2 = 2rt \Leftrightarrow \alpha^2 = t \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{t}, \end{aligned}$$

то есть последовательность $(\alpha_k) = \left(\frac{A_{2k}}{B_{2k}} \right)$ убывает и сходится к \sqrt{t} .

Очевидно, что и последовательность $\left(\frac{A_{2k}-1}{B_{2k}} \right)$ сходится, причём к тому же

пределу \sqrt{t} . Напомним, что $\frac{A_{2k}-1}{B_{2k}} < \sqrt{t} < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \alpha_k$, где $k \in \mathbb{N}$. Аналогично

устанавливается, что последовательность $(\beta_k) = \left(\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} \right)$ монотонно

возрастает и сходится к \sqrt{t} . Напомним, что $\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} < \sqrt{t} < \frac{A_{2k+1}+1}{B_{2k+1}}$, а значит, и

последовательность $\left(\frac{A_{2k+1}+1}{B_{2k+1}} \right)$ тоже сходится к \sqrt{t} . Итак, имеет место

следующая лемма.

Лемма. Для любого натурального числа t , не являющегося квадратом натурального числа, последовательности

$\left(\frac{A_{2k}}{B_{2k}} \right), \left(\frac{A_{2k}-1}{B_{2k}} \right), \left(\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} \right), \left(\frac{A_{2k+1}+1}{B_{2k+1}} \right)$ удовлетворяют условиям

$\frac{A_{2k}-1}{B_{2k}} < \sqrt{t} < \frac{A_{2k}}{B_{2k}}$ и $\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} < \sqrt{t} < \frac{A_{2k+1}+1}{B_{2k+1}}$, где $k \in \mathbb{N}$, причём все четыре

сходятся к числу \sqrt{t} .

Замечание. При конкретных вычислениях приближённых значений числа \sqrt{t} удобнее использовать не числа

$(\sqrt{t}-r)^2, (\sqrt{t}-r)^3, (\sqrt{t}-r)^4, \dots$, а числа $(\sqrt{t}-r)^2, (\sqrt{t}-r)^4 = \left((\sqrt{t}-r)^2 \right)^2$,

$(\sqrt{t}-r)^8 = \left((\sqrt{t}-r)^4 \right)^2$ и т.д. Кроме того, очевидно, что числа $\frac{1}{B_{2k}}$ и $\frac{1}{B_{2k+1}}$

соответственно позволяют оценить отклонение членов последовательностей (α_k) и (β_k) от числа \sqrt{t} .

4. С благодарностью хочу отметить, что следующие примеры нахождения приближенных значений для $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$ были любезно предоставлены мне в частном письме осенью 2019 года большим любителем математики Вадимом Евгеньевичем Ольховым, проживающим в Нижнем Новгороде. Эти или аналогичные им любопытные и понятные любому старшекласснику вычисления вполне могли быть известны во времена Евклида, Герона и Архимеда [3–5].

Конечно, давно разработаны многочисленные методы вычисления приближённых значений корней любой степени из действительных

чисел [2], более того, современная компьютерная техника позволяет получать рациональные приближения к подобным иррациональностям с любой степенью точности, но иметь представления о приводимых ниже приёмах приближённых вычислений безусловно не лишено полезности, тем более, что с ними вполне можно познакомить школьников старших классов на математическом кружке или факультативе.

Пример 1. Рассмотрим получение приближённых рациональных значений чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

а) Так как $1 < \sqrt{2} < 2$, то есть $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, имеем следующие числовые неравенства и следствия из них:

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} > 0, \text{ т. е. } \sqrt{2} < \frac{3}{2};$$

$$(\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7 > 0, \text{ т. е. } \sqrt{2} > \frac{7}{5};$$

$$(\sqrt{2} - 1)^4 = 17 - 12\sqrt{2} > 0, \text{ т. е. } \sqrt{2} < \frac{17}{12};$$

$$(\sqrt{2} - 1)^5 = 29\sqrt{2} - 41 > 0, \text{ т. е. } \sqrt{2} > \frac{41}{29};$$

$$(\sqrt{2} - 1)^6 = 99 - 70\sqrt{2} > 0, \text{ т. е. } \sqrt{2} < \frac{99}{70},$$

и значит, $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$, то есть $1,4137 < \sqrt{2} < 1,4143$, а значит, $\sqrt{2} \approx 1,414$.

б) Судя по публикациям в [3–5], Архимед в сочинении «Измерение круга» даёт оценку для $\sqrt{3}$ вида $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, а вот и сами весьма простые вычисления, что приводят к этому результату и которые вполне могли быть известны Архимеду и его современникам: $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$, а значит:

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} > 0, \text{ т. е. } 2 - \sqrt{3} > 0,$$

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} > 0,$$

$$(7 - 4\sqrt{3})^2 = 97 - 56\sqrt{3} > 0.$$

$$(97 - 56\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 153\sqrt{3} - 265 > 0,$$

и значит, $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, и наконец: $(97 - 56\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}) = 1351 - 780\sqrt{3} > 0$, т.е.

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \text{ итак: } \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \text{ (см. [4; 5]).}$$

Пример 2. Пусть требуется найти приближённые рациональные значения чисел $\Theta = \sqrt[3]{2}$ и $\Theta^2 = \sqrt[3]{4}$.

Рассмотрим двойное неравенство $0 < \sqrt[3]{2} - 1 < 1$, а значит, $(\sqrt[3]{2} - 1)^3 = 1 - 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} > 0$, следовательно:

$(\sqrt[3]{2} - 1)^3(\sqrt[3]{2} - 1) = -7 + 6\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} > 0$; и из системы неравенств:

$$\begin{cases} 2 - 6\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} > 0, \\ -7 + 6\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} > 0 \end{cases}$$

(путём почленного их сложения) получим, что $-5 + 4\sqrt[3]{2} > 0$, а значит,

$$\sqrt[3]{2} > \frac{5}{4}.$$

Если же хочется оценить сверху $\sqrt[3]{2}$, то из неравенства $(\sqrt[3]{2} - 1)^4 \cdot (\sqrt[3]{2} - 1) = 19 - 8\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{2} > 0$, умножив обе части его на 3, и из неравенства $4 \cdot (-7 + 6\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}) > 0$, складывая их почленно, получаем, что

$$\begin{cases} -28 + 24\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{2} > 0, \\ 57 - 24\sqrt[3]{4} - 15\sqrt[3]{2} > 0 \end{cases}$$

$$29 - 23\sqrt[3]{2} > 0,$$

т.е. $\frac{5}{4} < \sqrt[3]{2} < \frac{29}{23}$, а значит, $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ (с избытком, так как $(1,26)^3 \approx 2,00037$).

Так как $\Theta^2 = \sqrt[3]{4} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, то получаем, что $1,26 \cdot \sqrt[3]{4} > 2$, то есть $\sqrt[3]{4} > \frac{2}{1,26} = \frac{100}{63}$,

причём $\left(\frac{100}{63}\right)^3 \approx 3,999\dots$, и значит, с недостатком $\sqrt[3]{4} \approx \frac{100}{63} \approx 1,5873$.

Аналогичные приёмы вычислений можно предложить и для приближённого вычисления, например, $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[3]{100}$.

Литература

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
3. Наука. Величайшие теории: выпуск 7: Эврика! Радость открытия. Архимед. Закон Архимеда. – М.: Де Агостини, 2015. – 160 с.
4. Каган В.Ф. Архимед. – М.: Гостехиздат, 1943. – 52 с.
5. Архимед. Сочинения / перевод и вступ. статья И.Н. Веселовского, перевод арабских текстов. Б.А. Розенфельда. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.

S.A. Gomonov
Smolensk State University

ON SOME TECHNIQUES FOR GENERATING ITERATIVE SEQUENCES THAT APPROXIMATE ALGEBRAIC IRRATIONALITIES OF THE FIELD R

Keywords: *field of real numbers; field of algebraic numbers; minimal polynomial; degree of an algebraic number; simple and repeated algebraic extension of the field of rational numbers; iterative sequence; polynomial; minimal polynomial.*

Abstract. *The article discusses some techniques for constructing iterative sequences associated with sequences of powers of fixed positive numbers less than one.*

These iterative sequences with rational members allow us to obtain approximate values of algebraic numbers of the field R with any accuracy.

The so-called Heron process is well known for calculating square roots from positive numbers with any predetermined accuracy (as well as their corresponding processes for cubic roots and roots of higher degrees), but the method proposed in this article for constructing rational approximations to algebraic numbers is so elementary that it could have been known even during the First Alexandrian school of Archimedes and his contemporaries.

А.В. Дюндин

Смоленский государственный университет

УДК 378.096

НЕПРЕРЫВНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРОГРАММ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Ключевые слова: *федеральный образовательный стандарт высшего образования; профессиональный стандарт; профессиональные компетенции; программный комплекс; процесс обучения в вузе.*

В работе на основе анализа федеральных образовательных и профессиональных стандартов, а также потребностей регионального рынка труда обоснована необходимость изучения студентами-строителями специальных программных комплексов для расчета конструкций; определены критерии выбора конкретного комплекса; рассмотрены основы методики организации работы по обучению работе с ними.

Основные требования к реализации профессиональных образовательных программ высшего образования определяются

федеральным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО). В настоящее время по большинству направлений подготовки действуют новые ФГОС ВО 3++, которые определяют, в том числе, и группы компетенций: универсальных и общепрофессиональных. При определении профессиональных компетенций образовательная организация должна дополнительно руководствоваться выбранным профессиональным стандартом из перечня, включенного во ФГОС ВО.

В своей работе мы рассматриваем процесс обучения студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство на основе ФГОС ВО [12] и выбранного профессионального стандарта [10].

Как в содержание стандарта ВО рассматриваемого направления подготовки [12], так и в описание трудовых функций выбранного профессионального стандарта [10] включены упоминания о необходимости использования при подготовке проектной документации «средств автоматизированного проектирования и вычислительных программных комплексов», необходимости «пользоваться компьютером с применением специализированного программного обеспечения», «применять современные информационные технологии при проектировании технологических процессов» и др.

Таким образом, основные нормативные документы, определяющие как требования к организации обучения, так и к его результатам, указывают на необходимость формирования у студентов компетенций, связанных с умением применять современные программные комплексы для осуществления профессиональной деятельности. Следовательно, в процесс обучения необходимо включать изучение специализированного программного обеспечения. Некоторые вопросы, связанные с начальными этапами изучения специальных программ для расчета конструкций, описаны нами в [3; 4], а также более глубоко авторами [1; 2].

Выбор конкретного программного комплекса для изучения студентами осуществляется вузом на основании следующих выделенных нами критериев:

- наиболее широкое использование в проектных организациях региона;
- возможность интеграции с типовым инженерным программным обеспечением;
- простота интерфейса и большой объем решаемых задач;
- наличие бесплатной академической версии;
- соответствие материально-технической базы вуза требованиям программного комплекса.

В практике работы строительных организаций специализированные программные комплексы чаще всего применяются при разработке

конструктивных решений, причем все они работают на основе метода конечных элементов, реализованного разными способами. Применение специальных программ для выполнения чертежей и разработки сметной документации мы в данной работе рассматривать не будем. Отметим, что выполнение расчетов по технологическим картам и организации строительного производства до сих пор в достаточной мере не автоматизировано.

В соответствии с этими критериями для изучения нами выбраны программные комплексы ЛИРА САПР [7] и Structure CAD Office [5].

Комплекс BASE [8] мало распространен в регионе, и от его изучения мы отказались. Более перспективным было бы изучение Autodesk Robot Structural Analysis Professional [6], так как он очень хорошо интегрирован с другими продуктами Autodesk и в перспективе позволяет выйти на работу с решениями этого же производителя в области BIM-технологий, но в настоящее время в регионе данный продукт не востребован. Самым сложным и универсальным является программный комплекс ANSYS, дополненный модулем CivilFEM, однако он сложен для освоения и ориентирован на сложные решения, которые необходимы довольно редко.

Изучение выбранных для освоения студентами расчетных программных комплексов выполняется в несколько этапов, связанных с изучением соответствующих дисциплин учебного плана:

- освоение интерфейса;
- расчет элементов стандартных конструкций;
- расчет каркасов зданий;
- самостоятельная постановка задач и их выполнение.

Заметим, что эти этапы довольно тесно связаны с выделяемыми многими исследователями этапами развития профессиональных компетенций:

- самоанализ и осознание необходимости;
- планирование саморазвития;
- самопроявление, анализ, самокорректировка.

Так как полное изучение программного комплекса является длительным процессом, который невозможно реализовать в рамках одной или даже двух дисциплин, то на первом этапе освоения, уже на 1 и 2 курсах, студенты реализуют в Structure CAD Office и ЛИРА САПР задания по теоретической и строительной механике, попутно осваивая интерфейс и проверяя свои решения, выполненные традиционными методами.

Второй этап изучения возможностей программных комплексов связан с расчетом элементов каркаса зданий из металлических и железобетонных конструкций в процессе изучения соответствующих дисциплин. На данном этапе студенты подбирают сечения и элементы

армирования, сравнивают результаты с «ручными» расчетами колонн, балок, ригелей, плит и других элементов.

На третьем этапе в рамках специально отведенных дисциплин студенты выполняют расчет каркасов гражданских или промышленных зданий из разных материалов, подбирают армирование монолитных перекрытий и фундаментных плит, проектируют большепролетные конструкции и др.

Четвертый этап освоения программных комплексов реализуется в процессе прохождения производственной практики и подготовки выпускной квалификационной работы и включает в себя самостоятельную работу студента над проектами.

Заметим, что первые два этапа реализуются в основном под руководством преподавателей вуза, третий и четвертый – под руководством привлекаемых в качестве преподавателей и консультантов опытных сотрудников проектных организаций.

Апробация описанных выше этапов изучения программных комплексов для расчета конструкций показала свою эффективность, однако оптимальной мы ее не считаем. В перспективе следует переходить на реализацию проектов на основе технологии BIM [11], что может потребовать замены реализуемых программных комплексов на Autodesk Robot Structural Analysis Professional.

В заключение обратим внимание на высокие требования рассмотренных программных комплексов к компьютерной технике, особенно в процессе реализации третьего и четвертого этапов изучения. Одним из путей решения этой проблемы мы видим организацию при ВУЗе центров по изучению соответствующих программ на основе договора с разработчиком, и приобретение ПО и техники как минимум со значительными скидками.

Литература

1. Голдобина Л.А., Хозяинов Д.М. Использование расчетного комплекса Autodesk Robot Structural Analysis Professional в учебном процессе на примере моделирования пространственного металлического каркаса // Проблемы и перспективы развития образования в России: ООО «Центр развития научного сотрудничества». – 2016. – № 45. – С. 49-58.

2. Данилова О.В., Зинатуллина Н.Д., Тимербаева Н.Д. Формирование профессиональной компетентности студентов технических вузов путем междисциплинарной интеграции // Дискуссия. – Екатеринбург: Институт современных технологий управления. – 2014. – № 5 (46). – С. 110-115.

3. Дюндин А.В. Изучение дисциплины «Строительная механика» с помощью ПК «SCAD Office» // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 244–246.

4. Дюндин А.В. Использование программного комплекса «SCAD Office» в учебном процессе // Системы компьютерной математики и их приложения. –

Смоленск: СмолГУ, 2017. – Вып. 18. – С. 241–243.

5. Интегрированная система прочностного анализа и проектирования конструкций Structure CAD Office. – URL: <https://scadsoft.com/>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

6. Комплекс конечноэлементного расчета и проектирования Autodesk Robot Structural Analysis Professional. – URL: <https://www.autodesk.com/products/robot-structural-analysis/overview>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

7. Программа для проектирования и расчета конструкций ЛИРА САПР. – URL: <https://www.liraland.ru/lira/>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

8. Программный комплекс BASE. – URL: <http://www.basegroup.su/index.php?Page=base.html>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

9. Программный комплекс ANSYS с модулем CivilFEM. – URL: <https://www.ansys.com/>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

10. Профессиональный стандарт 16.032 Специалист в области производственно-технического и технологического обеспечения строительного производства. – URL: <https://classinform.ru/profstandarty/16.032-spetsialist-v-oblasti-proizvodstvenno-tekhnicheskogo-i-tehnologicheskogo-obespecheniia-stroitel'nogo-proizvodstva.html>, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

11. Спрыжков А.М., Приворотский Д.С., Приворотская Е.В. Междисциплинарная интеграция BIM и IPD в высшем профессиональном образовании // Известия Самарского научного центра РАН. – 2015. – Т.17. – № 1 (2). – С. 348-351.

12. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 08.03.01 Строительство/ – URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/080301_B_3_27062017.pdf, свободный (дата обращения: 13.02.2020).

A.V. Dyundin
Smolensk State University

CONTINUOUS STUDY THE PROGRAM OF STRUCTURAL CALCULATIONS IN THE EDUCATIVE PROCESS

Keywords: *Federal State Educational Standard of higher education; occupational standard; professional competencies; software application; educative process at the university.*

Abstract. *The article touches upon the issue of necessity of learning by the engineering students some special software applications for structural calculations on basis of analyzing Federal State educational standards and occupational standards, and requirements of the labour market as well. The given paper deals with the establishment of the selection criterion of precise engineering software. Moreover, the fundamentals of methodology for activity management to software package training are considered.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ КАК СРЕДСТВА ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ СТУДЕНТА

Ключевые слова: *теория вероятностей; статистика; компетентность; активные формы обучения; моделирование; системы компьютерной математики; прикладные задачи.*

В статье рассмотрены дидактические вопросы, касающиеся обучения стохастике с использованием компьютерных технологий, позволяющих оптимизировать учебный процесс. Акцентируется внимание на методах математического моделирования.

Требование повышения качества обучения студентов по стохастике, диктуемое современностью, способствует поиску новых эффективных средств, совершенствующих процесс формирования математических компетенций. Большие возможности в решении этой проблемы открывает применение систем компьютерной математики, так как прикладные задачи статистики невозможно решать без использования компьютера [1]. Умение обрабатывать статистические данные компьютерными методами является приоритетным фактором, который должен обязательно быть в центре внимания при обучении будущего специалиста, так как интенсификация производства органически связана с интенсификацией труда специалистов. Последнее предусматривает внедрение в работу новейших технических средств, автоматизацию информационного обеспечения, создание условий для принятия оптимальных решений, что освобождает специалиста от нетворческих видов работы.

Стоит напомнить о выгодах, связанных с количественным представлением явлений, о роли математического моделирования в научном познании. Математические методы дают возможность исследовать процессы, недоступные непосредственному наблюдению. Чтобы проникнуть в изучаемые явления, нужно правильно подбирать математический аппарат, обеспечивающий логически строгий метод анализа. Для того чтобы оставлять только существенные факторы, необходимо свободно ориентироваться в изучаемой проблеме. Надо помнить, что математические методы должны быть совместимы с обычными словесными рассуждениями. Вопросам математического моделирования большое внимание в последнее время стали уделять в медицине, социологии, истории, археологии.

Будущие специалисты уже на студенческой скамье вуза должны овладеть методами математического моделирования, уметь применять математические методы и компьютерные технологии в научных исследованиях. В связи с этим остро стоит проблема вузовской научной деятельности. Следует отметить, что исследования, выполняемые на стыке нескольких научных направлений, связанные с решением прикладных задач, являются наиболее плодотворными.

В настоящей статье на конкретном примере показана эффективность применения математических методов и компьютерных технологий для обработки результатов медицинских наблюдений. Остановимся на одной из таких задач, иллюстрирующей, как может быть использован предложенный студенту математический аппарат – дисперсионный анализ и соответствующее программное обеспечение для изучения проблемы, касающегося эффекта плацебо.

В ходе исследования была обработана статистическая база данных группы из 24 детей с синдромом дефицита внимания и гиперактивности (СДВГ) [2]. Каждый из участников эксперимента принимал соответствующие дозы метилфенидата: первая – 0 мг/кг, вторая – 0,15 мг/кг, третья – 0,30 мг/кг, четвертая – 0,60 мг/кг. После этого проходил тест «отложенное удовлетворение», и его результаты вносились в общую таблицу. В столбцах таблицы 1 представлено количество верных ответов (своевременных нажатий на клавишу), данных детьми в ходе эксперимента.

Таблица 1

Воздействия метилфенидата на когнитивные способности детей с умственной отсталостью и СДВГ

Первая доза	Вторая доза	Третья доза	Четвертая доза
57	48	64	62
27	42	48	49
32	39	34	30
31	23	25	34
34	36	42	38
38	34	40	36
71	61	59	77
33	36	42	51
34	41	36	45
53	57	67	42
36	32	29	43
42	48	50	57
26	48	44	36
52	39	57	58
36	36	36	35
55	48	57	60
36	35	30	33
42	39	36	49
36	32	41	33
54	48	65	59

34	35	35	35
29	28	40	37
33	27	43	45
33	40	44	29

Известно, что медицинский материал очень изменчив, так как находится под влиянием огромного числа факторов, постоянно взаимодействующих. Взаимосвязь между различными показателями и признаками распространено в медицине явление. С ним приходится сталкиваться в повседневной практической работе, так как всегда появляется необходимость сопоставлять изменения двух или нескольких показателей, признаков или явлений, чтобы сделать определенные выводы. До настоящего времени по причине существования индивидуальных различий и огромного количества других факторов нет доказательных аргументов, оправдывающих целесообразность плацебо при лечении. Однако плацебо играет существенную роль при решении проблемы лекарственного влияния испытуемого препарата на состояние людей, страдающих некоторой болезнью. Как понять свойства, присущие исследуемому препарату? Достаточно ли в такой ситуации полагаться только на интуицию и опыт или следует призвать на помощь математическую теорию?

В исследовании, проведенном студентом, плацебо выступал как инструмент при изучении воздействия на детей с синдромом дефицита внимания и гиперактивности (СДВГ) различных доз лекарственного вещества – метилфенидата. Строгих доказательств того, что метилфенидат при СДВГ является самым эффективным веществом, до сих пор нет. Поэтому любое продвижение, связанное с данным заболеванием и нахождением способов его лечения, представляет научную значимость. На основе анализа статистической базы данных, полученных в результате эксперимента, требовалось определить: значимо ли воздействие метилфенидата на когнитивные способности детей с синдромом дефицита внимания и гиперактивности. Для решения поставленной задачи был выбран один из основных методов математической статистики – дисперсионный анализ [3], позволяющий анализировать результаты наблюдений, зависящих от множества факторов, оказывающих одновременное влияние. Его задача – оценка вклада факторов в изменение результативного признака. Дисперсионный анализ как статистический метод опирается на конкретные значения результатов наблюдений. И при наличии большого экспериментального материала немислим без использования современных пакетов прикладных программ многомерного статистического анализа [4].

Исследование было проведено с помощью однофакторного анализа. Это обусловлено тем, что контролировалась только доза

препарата, которая предлагалась детям. Качественный фактор имел четыре уровня. Количество положительных ответов при проведении эксперимента также представлено единственной исследуемой переменной. Все дети находились поочередно в каждом уровне фактора.

Были сформулированы две гипотезы. Основная – лекарственный препарат (метилфенидат) вне зависимости от принимаемой дозы способен оказывать одинаковое воздействие на когнитивные способности детей. Альтернативная – лекарственный препарат (метилфенидат) в зависимости от принимаемой дозы способен оказывать различное воздействие на когнитивные способности детей. Для ответа на вопрос сформулированной выше задачи была использована программа однофакторного дисперсионного анализа пакета прикладных программ *Statistica* [5]. Представим фрагмент исследования с помощью непараметрического критерия Фридмана в связанных выборках (рис. 1).

Friedman ANOVA and Kendall Coeff. of Concordance (Spreadsheet4)				
ANOVA Chi Sqr. (N = 24, df = 3) = 11,43103 p = ,00961				
Coeff. of Concordance = ,15876 Aver. rank r = ,12219				
Variable	Average Rank	Sum of Ranks	Mean	Std.Dev.
0 мг/кг	2,083333	50,00000	39,75000	11,31467
0,15 мг/кг	2,041667	49,00000	39,66667	9,13506
0,3 мг/кг	2,916667	70,00000	44,33333	11,77199
0,6 мг/кг	2,958333	71,00000	44,70833	12,31993

Рис. 1. Проверки по критерию Фридмана

С учетом значения $p=0,00961 < 0,05$ основная гипотеза отклоняется в пользу альтернативной: лекарственный препарат (метилфенидат) в зависимости от принимаемой дозы способен оказывать различное воздействие на когнитивные способности детей.

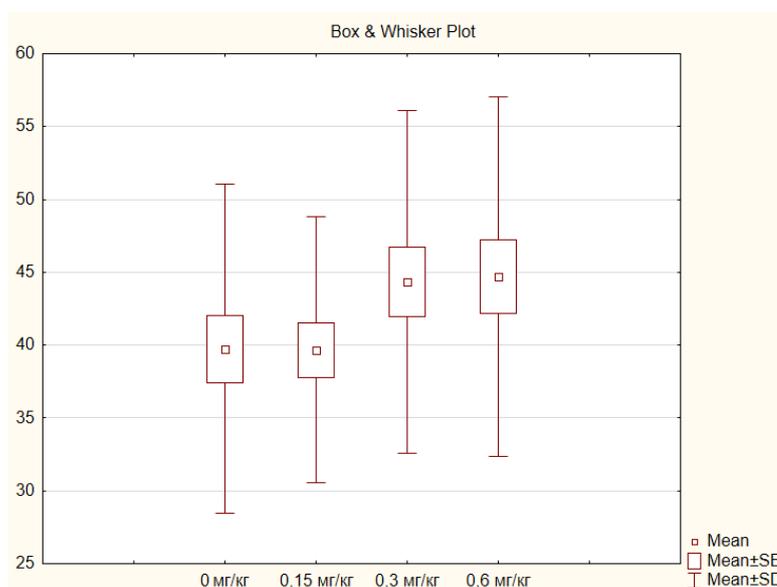


Рис. 2. Диаграмма переменной

Действительно, исходя из статистических данных таблицы 1, заключаем: при реализации доз метилфенидата первой – 0 мг/кг (пустышка) и второй – 0,15 мг/кг не наблюдается существенного воздействия, а при третьей и четвертой дозах (0,3 мг/кг и 0,6 мг/кг) изменения просматриваются – среднее значение результативного признака увеличилось.

Этот факт наглядно можно представить, используя пакет *Statistica*. Не представляет труда согласиться с результатами эксперимента, так как, глядя на график (рис. 2), видим: средние значения результативного признака соответственно при дозах 0,3 мг/кг и 0,6 мг/кг значительно отличаются от значений, полученных при применении первых двух доз.

В выпускной квалификационной работе М.А. Денисенко «Модели дисперсионного анализа» (Смоленск: СмолГУ, 2019) сформулирован вывод о проделанном исследовании, который звучит так: «Эффект плацебо в данном эксперименте сыграл вспомогательную роль, не неся при этом никаких побочных эффектов. В результате удалось установить положительное воздействие метилфенидата на когнитивные способности детей. Что еще раз подтверждает важную роль использования плацебо в клинических исследованиях».

Таким образом, математическое моделирование с использованием компьютерных технологий ориентирует студентов на исследовательскую деятельность, способствует повышению качества подготовки профессионально компетентных специалистов с творческим и гибким мышлением.

Литература

1. Евдокимова Г.С., Кристалинский Р.Е. Использование систем компьютерной математики, как средства формирования профессиональной компетентности студента // Известия Смоленского государственного университета. –2013. – № 4. –С. 416–424.
2. Pearson D.A., Santos C.W., Jerger S.W., Casat C.D., Roache J., Loveland K.A., Lane D.M., Lachar D., Faria L.P. Treatment effects of methylphenidate on cognitive functioning in children with mental retardation and ADHD // Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry. –2003. –43. – P. 677- 685.
3. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
4. Евдокимова Г.С., Усачев В.И. Системы компьютерной математики, используемые при обучении будущего учителя // Известия Смоленского государственного университета. – 2015. –№ 4(32). – С. 411–420.
5. Халафян А.А. Statistica 6. Статистический анализ данных. – М., Изд-во Бинном, 2007. – 505 с.

G.S. Evdokimova
Smolensk State University

ON THE EVALUATION OF THE AVERAGE NUMBER OF LOSSES FOR A SINGLE-CHANNEL QUEUING SYSTEM

Keywords: *system failures; order received; periodic intensity; averaging over the period of the flow services; the effectiveness of the system.*

Abstract. *It is proved that when finding the characteristics of Queuing systems with variable intensities use "averaging" over the period of intensity of service, it will lead to a reassessment of the effectiveness of the real system and the possibility to make a mistake in assessing the quality of its work.*

С.В. Козлов, А.А. Шкуратова
Смоленский государственный университет

УДК 371.26

ОСОБЕННОСТИ МОНИТОРИНГА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ключевые слова: *мониторинг; информационно-коммуникационные технологии; образовательное пространство; образовательный процесс; электронный журнал; дистанционное обучение.*

В статье обсуждаются вопросы применения мониторинга на разных уровнях образовательного пространства. Особое внимание уделено организации внутришкольного мониторинга. Авторами выделены и охарактеризованы его виды. Рассмотрены такие инструменты его реализации, как электронный журнал, системы дистанционного обучения. Актуальность статьи связана с необходимостью объективной оценки различных процессов в системе современного образования.

Последнее десятилетие ознаменовалось для системы образования России временем больших перемен и радикальных реформ. Огромное внимание сконцентрировалось как на развитии и становлении отчасти новой образовательной среды, так и на изменениях, протекающих в

учебном процессе школы под влиянием глобального реформирования современного российского образования. Ключевыми функциями высших органов управления системой образования стали функции контроля и надзора. Поэтому как никогда актуальным оказался вопрос создания информационно-аналитического аппарата, реализация которого происходит средствами мониторинга образовательного пространства. При этом следует заметить, что получение объективных показателей в режиме реального времени невозможно без использования средств новых информационных технологий.

Под мониторингом в науке принято понимать целенаправленно организованный процесс систематического наблюдения и анализа состояния объектов, явлений и процессов, результатом которого является их оценка, уровень реализации в контексте изучения, прогноз дальнейшего развития [1]. Целью мониторинга в образовательной сфере является объективная оценка качества оказываемых образовательных услуг, результативности и эффективности учебно-воспитательного процесса, материального обеспечения образовательного учреждения и многое другое. Стоит отметить также, что мониторинг образовательного процесса – это комплексная величина, включающая в себя множество отдельных взаимосвязанных друг с другом процедур, реализация которых опирается на выбор эффективных в определенном контексте исследования форм, способов и методов анализа и диагностики.

В структуре мониторинга системы образования можно выделить несколько уровней:

- *мониторинг развития системы образования России в целом* – непрерывная оценка деятельности высших органов управления в данной сфере, исследование динамики системы образования в целом и ее отдельных единиц, структур и подразделений;
- *мониторинг высших учебных заведений* – отслеживание качества работы и результативности работы высшего учебного заведения;
- *мониторинг функционирования средне-специальных учебных заведений* – исследование эффективности процесса обучения в средне-специальных учебных заведениях;
- *мониторинг образовательного процесса школы* – изучение динамики развития, качества образования и уровня подготовки учащихся общеобразовательных учебных учреждений.

Рассмотрим подробнее процесс внутришкольного мониторинга. В настоящее время можно выделить различные виды мониторинга в информационно-образовательной системе школы. Выбор методов и средств такого мониторинга зависит от его вида, применяемого в конкретном случае. Так, педагогический мониторинг осуществляется администрацией школы и преподавателями. Он заключается в непрерывном контроле и наблюдении за содержанием обучения,

формами и методами обучения, эффективностью учебно-воспитательного процесса, работой педагогического коллектива, качеством документации, учебных достижений учащихся. Социологический мониторинг осуществляется социальными педагогами. Его основной задачей является постоянное исследование социального пространства образовательного учреждения, то есть сбор и обработка информации о состоянии протекания социальных процессов и социальной ситуации в учреждении. Психологический мониторинг осуществляется психологами. Он состоит в изучении психологического климата в педагогическом коллективе школы, психологического здоровья учащихся, развития их индивидуальных способностей. Медицинский мониторинг осуществляется медицинским персоналом. Его главной целью является контроль и исследование динамики здоровья учащихся, педагогов и администрации учреждения. Экономический мониторинг закреплен за администрацией школы, и директором в частности. Он заключается в отслеживании качества материального обеспечения образовательного пространства. В то же время в условиях современного информационно-образовательного пространства данные ни одного вида мониторинга не будут своевременными без комплексного применения инструментальных средств информационно-коммуникационных технологий.

Среди указанных видов мониторинга более сложным и трудоемким в реализации является педагогический. Он включает в себя обработку огромного количества разноформатной информации: от учительской документации до дневниковых записей учеников. Вследствие этого проблема оптимизации внутришкольного мониторинга педагогического процесса является ключевой для современного руководства образовательного учреждения. Она требует внедрения в систему образовательного мониторинга новейших средств информационно-коммуникационных технологий.

Тем не менее на данный момент основными средствами педагогического мониторинга являются:

- ручная обработка школьной документации, которая осуществляется непосредственно администрацией школы и директором;
- личное посещение учебных занятий и мероприятий, на основе которых проводится анализ форм и методов работы с учащимися;
- обработка результатов контроля знаний учащихся в виде тестов, опросов, анкет и прочего, которая осуществляется педагогическими работниками школы;
- анализ четвертных, семестровых, полугодовых и годовых результатов учебной деятельности учащихся, который также заключается в ручной обработке полученных данных бумажной документации педагогами и администрацией школы.

В рамках модернизации современной системы образования вышеперечисленные ручные методы мониторинга внутришкольного учебного процесса становятся невозможными. Увеличивается количество учащихся, количество учебных программ и расширяются возможности в использовании различных форм и подходов к изучению, что впоследствии приводит к стремительному росту количества документации, разбросанной по различным хранилищам информации.

В силу этого внутришкольный мониторинг учебного процесса без использования компьютерных средств с каждым годом становится все более трудозатратным и все менее эффективным. Использование современных информационно-коммуникационных средств позволит упростить и облегчить мониторинг педагогического процесса школы [2]. В настоящее время создаются различные функциональные компьютерные системы инструментов для обработки и хранения различного рода информации об учебном процессе, применение которых основывается на всестороннем использовании возможностей информационно-коммуникационных технологий.

Например, в образовательный процесс школы активно внедряется технология электронных журналов. Как отмечают педагогические работники, система электронных журналов позволяет создать единое информационно-образовательное пространство учебного заведения, которое оптимизирует не только обработку информации школой, но и процесс взаимодействия педагогов с учащимися и их родителями [3].

Можно выделить следующие функции системы электронных журналов:

- отслеживание посещаемости учащихся;
- дисциплинарный контроль;
- контроль текущей и общей успеваемости учащихся;
- регистрация тематического планирования;
- запись домашних заданий;
- отслеживание нагрузки обучающихся в конкретный период;
- регистрация расписания уроков;
- возможность для взаимодействия школы и семьи.

В инструментарий педагогического мониторинга также возможно внедрение робототехнических технологий. В настоящее время уже созданы технологии роботов телеприсутствия (Romo, Double, Даша, R. Bot, Webot, Promobot), роботов-учителей (андроид Пушкин, Nao), роботов-нянь. Подобные технологии могли бы не только усовершенствовать образовательный процесс, но и стать хорошим подспорьем в анализе учебной деятельности, апробации новых форм обучения. Но, к сожалению, массовой разработки, а тем более использования, пока не ведется.

Во многих учебных заведениях также реализуются технологии дистанционного обучения посредством электронных средств, например системы Moodle. Данная платформа не только облегчает работу учителей, связанную с проверкой контрольных материалов, но и упрощает систему мониторинга оценивания знаний, уровня общей успеваемости и уровня усваиваемости материала [4]. Она также позволяет прикрепить основной учебный материал в виде конспектов, презентаций, видеолекций или в ином требуемом виде. Это способствует оптимизации мониторинга содержания образования, так как весь учебный материал присутствует в одном хранилище.

Наряду с дистанционными системами обучения широко используются электронные образовательные порталы [5]. Основная их функция заключается в систематизации учебных ресурсов и электронных ссылок на них. При этом в них хоть и в меньшей степени, чем в системах дистанционного обучения, как правило, реализованы отдельные функции мониторинга учебного процесса. Они базируются на применении различных форм тестирования для получения объективных данных. Также следует отметить, что разработка электронных образовательных порталов не требует специальных знаний в области программирования. Для их проектирования и создания можно использовать специализированные web-конструкторы [6]. Так, например, при разработке образовательных ресурсов широкими возможностями обладает web-конструктор Tilda. Ему присущ эргономичный интерфейс и интуитивно понятные способы работы при создании электронных образовательных порталов.

Нельзя также не упомянуть использование систем электронных таблиц (например, MS Excel) и систем баз данных (например, MS Access). Осуществление обработки информации в этих приложениях экономит немало сил и времени педагогического коллектива и администрации школы, а также позволяет создать единое хранилище необходимой информации. Еще одним инструментом внутришкольного мониторинга является создание и развитие сайта школы. На web-странице школы размещается вся необходимая информация об учебном заведении. На сайте ведется статистика учебных результатов, присутствует хранилище основных документов, отражающих суть и функционирование образовательного процесса школы.

Невозможно не обратить внимания и на то количество учительских и школьных форумов, которые были созданы в последнее время. Деятельность таких форумов вносит свой вклад в развитие современной системы образования, в том числе является не последним средством контроля и мониторинга. Посредством форумов осуществляется отслеживание статистических данных об актуальных проблемах образования, успехах или провалах нововведений, исследуются реакция

и психологический климат среди педагогических кадров, что также немаловажно в контексте развития системы образования в целом.

Таким образом, можно сделать вывод, что в настоящее время создано и продолжает создаваться огромное количество средств и условий для реализации успешного педагогического мониторинга. Современный этап модернизации системы образования России подталкивает учебные заведения к переходу от ручных методов анализа и диагностики образовательной среды к новым информационным методам исследования. Процесс информатизации образования запущен, но он не может осуществляться одновременно на всех структурных единицах системы образования, поэтому проблемы оптимизации процесса обучения, контроля и мониторинга его эффективности остаются актуальными до сих пор и требуют дальнейшего изучения.

Литература

1. Тихонова Л.П. Актуальные вопросы разработки современных средств мониторинга и контроля качества обучения // Инновации в профессиональном и профессионально-педагогическом образовании: материалы 23-й Международной научно-практической конференции. – Екатеринбург, 2018. – С. 602-605.
2. Козлов С.В. Использование вспомогательных программных модулей в автоматизированных информационных системах поддержки учебного процесса // Сборник трудов VIII Всероссийской научно-практической конференции «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии». – Оренбург, 2017. – С. 235-239.
3. Мониторинг учебной деятельности как современная форма учета знаний учащихся. – URL: <https://infourok.ru/monitoring-uchebnoy-deyatelnosti-kak-sovremennaya-forma-ucheta-znaniy-uchaschihsya-1125228.html> (дата обращения 02.11.2019)
4. Козлов С.В. Особенности обучения школьников информатике в профильной школе // «Концепт»: научно-методический электронный журнал. – 2014. – № 1. – С. 31-35. ART 14006. – URL: <http://e-koncept.ru/2014/14006.htm>.
5. Максимова Н.А. Электронный образовательный портал как средство личностного развития учащихся // Сборники конференций НИЦ Социосфера. – 2016. № 9. – С. 206-208.
6. Петрук Н.В., Козлов С.В. Особенности использования web-конструктора Tilda при разработке образовательных ресурсов // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник научных трудов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Киров, 2019. – С. 8-12.

S.V. Kozlov, A.A. Shkuratova
Smolensk State University

**FEATURES OF MONITORING THE EDUCATIONAL SPACE USING
NEW INFORMATION TECHNOLOGIES**

Keywords: *monitoring; information and communication technologies; educational space; educational process; electronic journal; distance learning.*

Abstract. *The article discusses the use of monitoring at different levels of the educational space. Particular attention is paid to the organization of intra-school monitoring. The authors identified and characterized its species. Such tools of its realization as electronic journal, distance learning systems are considered. The relevance of the article is connected with the need for an objective assessment of various processes in the system of modern education.*

Ю.С. Пешко, О.М. Киселева
Смоленский государственный университет

УДК 372.851

СОДЕРЖАНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ДЕМОНСТРАЦИОННО-КОНТРОЛИРУЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ «ТРЕУГОЛЬНИКИ»

Ключевые слова: *образовательный процесс; преподавание математики; обучающая информационная система.*

В данной статье обсуждается вопрос о применении электронных средств, способствующих повышению эффективности работы учителя, а также оказывающих помощь в освоении информации учащимся. В качестве наглядного примера рассматривается демонстрационно-контролирующая программа по математике, с помощью которой осуществляется обучение и проверка знаний по теме «Треугольники». В статье раскрываются отдельные аспекты содержания и разработки программ для автоматизации учебного процесса.

Развитие информационных технологий позволяет говорить о наличии процессов информатизации, оказывающих революционное воздействие на все сферы жизнедеятельности общества, кардинально изменяющих условия жизни и деятельности людей, их культуру, стереотип поведения, образ мыслей.

Непосредственное влияние информационные технологии оказывают на сферу образования. Применение технических средств в учебно-воспитательном процессе можно рассматривать как логичный и важный шаг в развитии современного информационного мира в целом. Подтверждением этого может служить общественный запрос на теоретическое и практическое решение целого ряда проблем, связанных с информатизацией и компьютеризацией образования [1]. Современная наука концентрирует внимание на разработке концепции и структурно-организационных моделей компьютеризации образования.

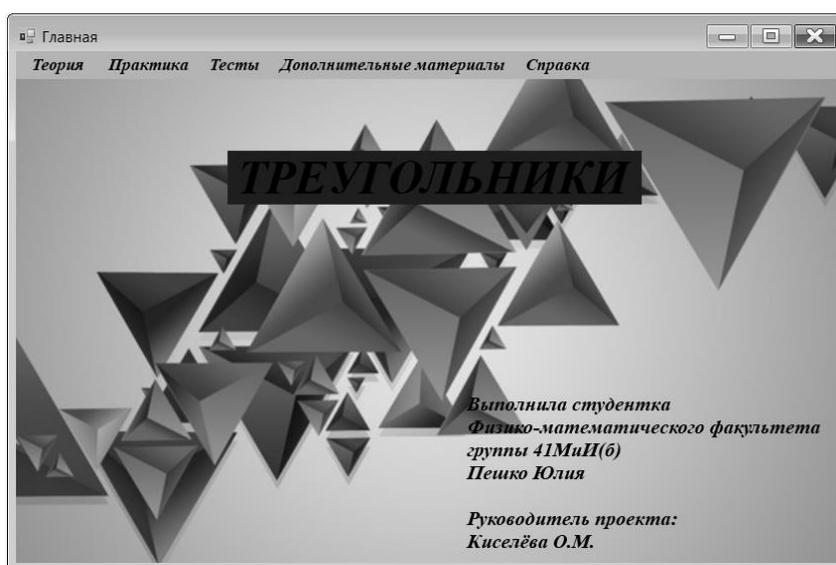


Рис. 1. Окно главного меню программы

Сегодня разрабатывается значительное количество программных продуктов для нужд образования [2]. В качестве примера можно привести авторскую программу «Треугольники», которая была разработана в среде программирования C#. Это программное пособие – демонстрационно-контролирующая программа по математике, посвященная конкретной теме, являющейся одной из центральных в школьном курсе. Данное пособие предназначено не только для учителей, но и для учеников, включая выпускников школ, готовящихся к ОГЭ по математике. Программа позволяет проверять знания учащихся по определенной теме и оценивать их уровень подготовки к уроку.

Программная оболочка содержит 5 пунктов меню: теория, практика, тесты, дополнительные материалы и справка.

При запуске на экране появляется заставка, содержащая название программы, меню, информацию об авторах (рис. 1).

Для перехода к нужному разделу необходимо выбрать пункт меню, нажав на него левой кнопкой мыши. Например, для того чтобы изучить теоретический материал по данной теме, необходимо выбрать пункт меню «Теория» (рис. 2).

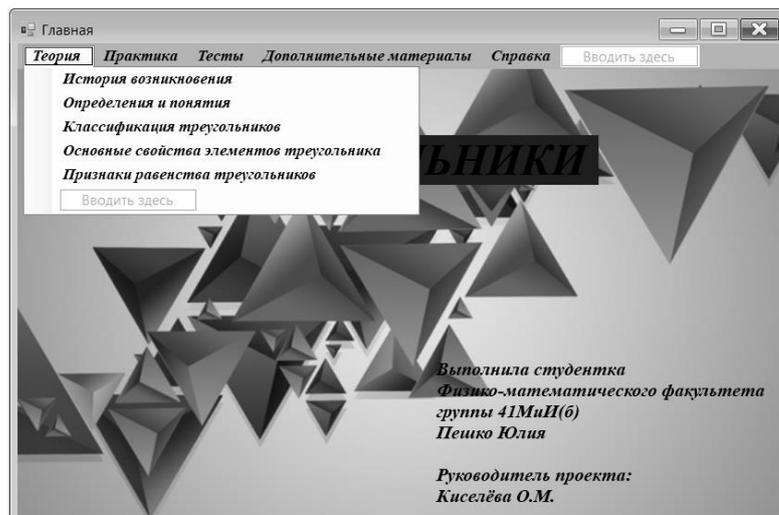


Рис. 2. Раздел, содержащий теоретический материал

Данный раздел состоит из 5 блоков: «История возникновения», «Определения и понятия», «Классификация треугольников», «Основные свойства элементов треугольников», «Признаки равенства треугольников». Изучение теоретического материала, представленного в указанных блоках, позволит овладеть основными сведениями, которые необходимы учащимся при решении тестовых и развернутых заданий. Информация в данном разделе представлена в текстовом и графическом виде.

Пункт меню «Практика» состоит из 10 задач разного уровня сложности. После внесения учащимся ответа в соответствующее поле необходимо нажать кнопку «Проверить». После нажатия программа оценит введенный ответ и предоставит результат. Если ответ был введен неправильно, программа укажет верный и выведет подробное решение данной задачи. Для перехода к следующей задаче необходимо нажать соответствующую кнопку (рис.3).

Пункт меню «Тесты» состоит из 5 тестов, которые позволят проверить знания учащихся по теме «Треугольники». Вопросы составлены так, чтобы оценить умения учащихся как в теоретической части, так и в практической. Данная форма проверки с выбором варианта ответа является более универсальной и удобной (рис. 4). После полного прохождения теста программа покажет результат, а также оценку, рассчитанную исходя из количества правильных ответов. Для более наглядного результата программа также покажет вопросы, на которые учащийся дал неверный ответ.

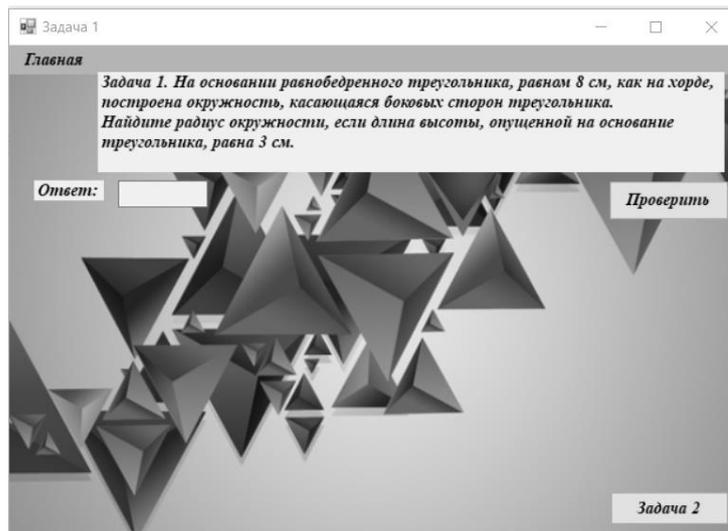


Рис. 3. Окно формы «Задача 1»

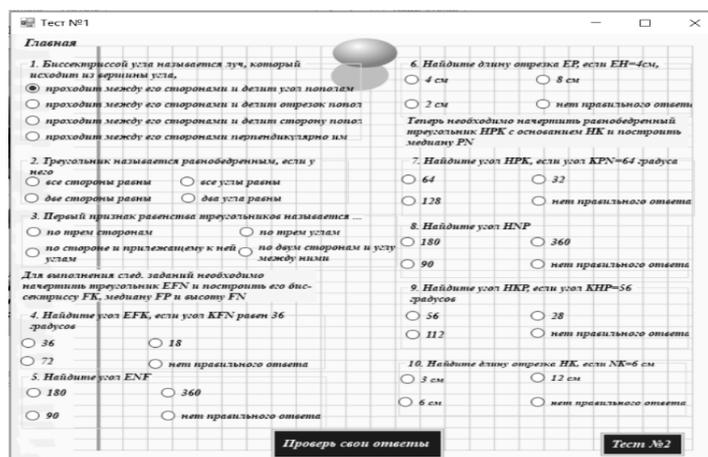


Рис. 4. Тест №1

Пункт меню «Дополнительные материалы» состоит из трёх блоков: «Конспекты уроков», «Презентации», «Методические рекомендации». Первый блок включает 4 конспекта, которые могут помочь учителю сделать урок более информативным и правильно организованным по структуре. Блок «Презентации» создан прежде всего для ученика, как опора при решении задач, а также чтобы дать возможность закрепить полученный материал.

Раздел «Справка» состоит из двух блоков: «Об авторе», «О программе». Первый блок содержит информацию о разработчике данной демонстрационно-контролирующей программы. Второй – содержит краткое описание программы в целом, а также структуру каждого раздела.

Разработанная программа «Треугольники» предназначена для учащихся 7–11 классов. Она может служить как вспомогательный материал при изучении темы «Геометрические фигуры» и использоваться при самостоятельной работе учащихся в процессе

решения текстовых задач и для самостоятельного изучения теоретического материала, а также применяться педагогом [3]. Обучающая информационная система содержит теоретический и практический материал, который может быть использован на уроке, а также конспекты уроков и методические рекомендации. Программа позволит овладеть необходимыми знаниями по данной теме и подготовить учеников к пониманию и осмыслению рассматриваемого раздела математики, а также дает возможность получить практические навыки по решению самых различных задач [4].

Популярность применения программных продуктов для поддержки работы учителя объясняется, прежде всего, удобством использования, быстротой обработки результатов и возможностью модификации содержания подобных информационных систем. Интерактивное учебное пособие может быть разработано учителем самостоятельно для различных тем учебного курса. В виде подобных информационных систем педагогом могут быть реализованы авторские методики преподавания, на которые он может опираться в будущем.

Литература

1. Лебедева Е.А., Козлов С.В. Содержание и особенности разработки учебно-методического проекта по математике «Системы линейных уравнений» в среде программирования C# // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2019. – С. 161-166.
2. Ибрагимова М.Р., Козлов С.В. Разработка образовательного приложения "Четырехугольники" средствами языка программирования C# // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи: сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2019. – С. 98-103.
3. Киселева М.П. Подготовка будущих учителей к работе в условиях цифровизации образования // Учитель и время. – 2018. – № 13. – С. 107-111
4. Сенчилов В.В., Быков А.А., Тимофеева Н.М., О.М. Киселева О.М. Программное обеспечение дистанционного обучения математике детей с ограниченными возможностями здоровья // Научное обозрение: гуманитарные исследования. – 2017. – № 7. – С. 29-34.

Y.C. Peshko, O.M. Kiseleva
Smolensk State University

CONTENT AND FEATURES OF THE DEMONSTRATION AND CONTROL PROGRAM «TRIANGLES»

Keywords: *educational process; teaching mathematics; educational information system.*

Abstract. *This article discusses the use of electronic tools that help improve the effectiveness of the teacher's work, as well as providing*

assistance in the development of information for students. As a visual example, we consider a demonstration and control program in mathematics, which is used for training and testing knowledge on the topic of "Triangles". The article reveals some aspects of the content and development of programs for automating the educational process.

Г.Е. Сенькина

Смоленский государственный университет

УДК 378, 372.8, 37.02

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ
И УЧЕБНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ
БАКАЛАВРИАТА «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»
НА ПРИМЕРЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
СМОЛЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Ключевые слова: профессиональная направленность; педагогическое образование; учебные предпочтения; физико-математическое образование; профессиональное образование.

Статья посвящена анализу результатов исследования профессиональной направленности и учебных предпочтений студентов бакалавриата направления «Педагогическое образование» на примере физико-математического факультета Смоленского государственного университета. Выявляется противоречие между государственным и социальным заказом на цифровизацию экономики и образования, внедрение онлайн-образования и наличной направленностью и учебными предпочтениями студентов. Лишь 15,4% студентов отмечают необходимость преобразований содержания и структуры образовательных программ, методов и средств обучения. Большинство студентов отличает преимущественно предметная направленность на точные науки, в то же время имеется достаточное число студентов, которые предпочитают как точные, так и гуманитарные науки, имеют выраженную направленность на дисциплины психолого-педагогического направления.

В условиях изменения и реализации новых образовательных стандартов в вузе, всеобщей цифровизации экономики и образования проблема исследования профессиональной направленности и учебных предпочтений будущих педагогов становится особенно актуальной. Приходится перестраивать образовательные программы, изменять

содержание, формы, методы и средства обучения. Насколько студенты проникнуты новыми изменениями, понимают ли они необходимость преобразований? Необходимо также анализировать, осознанно ли подошли они к выбору направления, понимают ли важность физико-математического образования для внедрения современных стратегий и концепций технологического развития страны.

Понятие профессиональной направленности студентов педагогических вузов развивалось в исследованиях А.П. Сейтешева [1], Н.В. Кузьминой [2], Т.В. Дмитриенко [3], В.И. Жернова [4] и др.

При исследовании профессионально-педагогической направленности студентов важным оказывается изучение сочетания собственно педагогической и предметной направленности. Зачастую абитуриенты приходят на физико-математический факультет с преобладающим интересом к учебным предметам в ущерб педагогическим дисциплинам. В современных условиях, характеризующихся общим падением статуса учителя, обусловленных, помимо прочего, проблемами социально-экономического развития, на их выбор могут также влиять другие, внешние факторы – наличие бюджетных мест при поступлении, близость вуза к месту проживания, относительно низкие баллы ЕГЭ, не позволяющие поступить на интересующий профиль, и другие.

Для выявления особенностей профессионально-педагогической направленности нами проведено анкетирование студентов бакалавриата направления «Педагогическое образование» на 3–5 курсах физико-математического факультета Смоленского государственного университета (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика»). К старшим курсам отсеивается значительная часть слабых, случайно поступивших студентов, усиливается специальная профессиональная составляющая учебных дисциплин, изучаются методики обучения предметам. На старших курсах для подтверждения осознанности выбора особенно важна педагогическая практика.

Результаты исследования выявили следующее. Более половины студентов выбрали направление и профиль подготовки, исходя из интереса к соответствующей профессии (56,4 %), при этом для многих респондентов было немаловажным наличие бюджетных мест и значение проходного балла (56,4 %). Надо заметить, что указанные множества студентов, хотя и пересекались, но не полностью совпадали. Около третьей части опрошенных отметили значимость статуса вуза – возможность учиться в ведущем университете региона (28,2 %). И лишь немногие указали такие факторы, как близость к месту проживания (7,7 %), наличие жилья (2,6 %).

Практически четверть студентов полностью довольны своим выбором (25,6 %), почти половина отвечали «скорее да, чем нет» – 48,7

%, 23,1 % выбрали ответ «скорее нет, чем да» и лишь 2,6 % хотели бы поменять направление или профиль. Таким образом, мы отмечаем, что около двух третей студентов не жалеют о своем выборе и, как показывает статистика трудоустроенных в 2019 году выпускников, столько же работают по профессии.

Несмотря на то, что среди них не было «целевиков» (обучение которых происходит по соглашению с работодателем), а также то, что на данный момент отсутствует механизм распределения студентов, как это было до 90-х годов прошлого столетия, выпускники факультета востребованы в образовании и значительная их доля работает в образовательных организациях региона. Вместе с тем заметим, их число ориентировочно покрывает около 10% от потребности (по количеству вакансий учителей физики, математики и информатики, указанных на официальном сайте Департамента по образованию и науке Смоленской области).

Учитывая, что до 2030 года потребность в учителях физико-математического направления будет только возрастать (пик числа первоклассников будет достигнут к 2025 году, согласно официальным статистическим данным), числа выделяемых бюджетных мест оказывается катастрофически недостаточно. Необходима также целенаправленная работа по ориентации выпускников школ на профессию учителя математики, физики и информатики.

Результаты исследования показывают, что, с одной стороны, случайных людей на данном направлении практически нет (см. диаграмму 1), с другой – почти 95% из них нравится содержание образовательной программы в целом либо отдельные предметы. Судя по ответам на следующие вопросы, это может быть связано с большим числом гуманитарных дисциплин, «лишних» предметов, большим числом заданий и др.

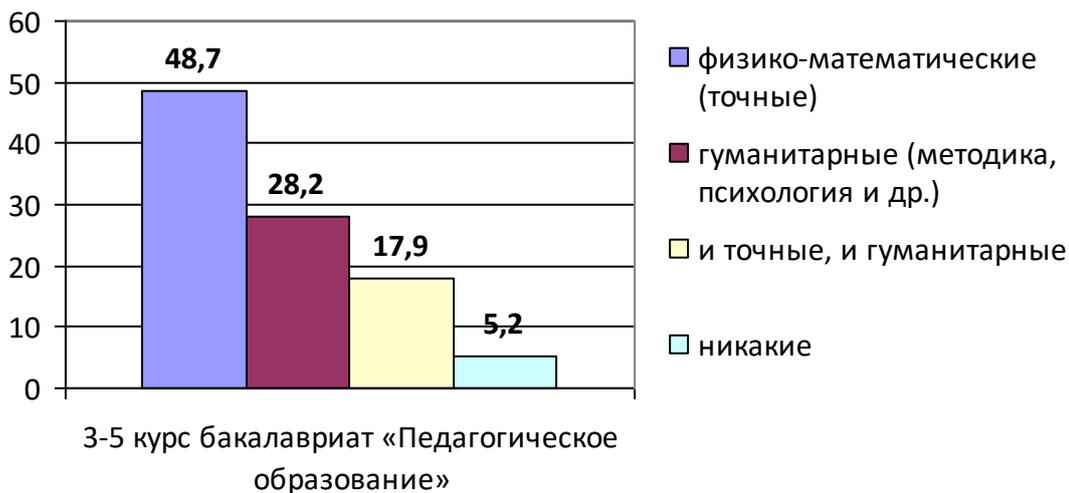
Диаграмма 1

Нравится ли вам содержание образовательной программы (%)?



Это подтверждается также ответами на вопрос о предпочтении учебных предметов (см. диаграмму 2). Практически половине студентов (48,7%) особенно нравятся физико-математические дисциплины, при этом они перечисляют достаточно сложные предметы: математический анализ, алгебраические структуры, программирование в качестве наиболее предпочитаемых.

Диаграмма 2
Какие преподаваемые дисциплины вам особенно нравятся (%)?

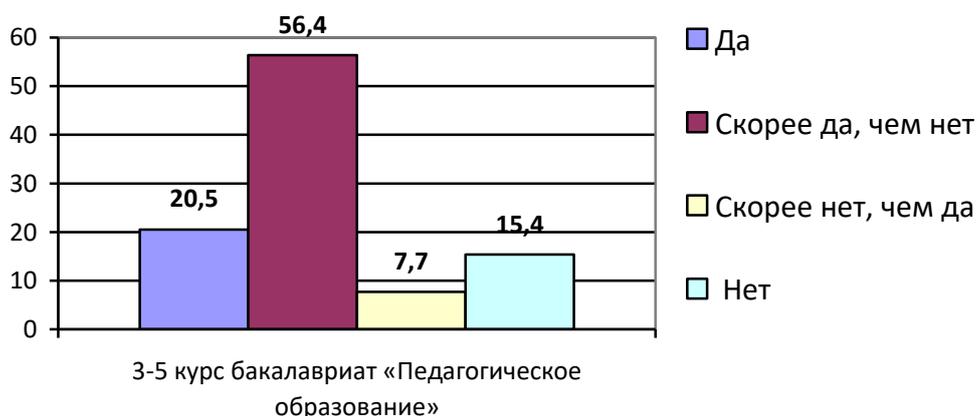


Таким образом многие студенты выбирают педагогическое направление физико-математического факультета в силу склонности и способностей к изучению точных наук, лишь 17,9% из них интересуют и точные, и гуманитарные дисциплины. 28,2% особенно нравятся такие предметы, как педагогика, психология, методики обучения математике, физике, информатике, они обладают ярко выраженной педагогической направленностью. Именно такие студенты уже с третьего курса предпочитают работать с детьми в центре робототехники и аддитивных технологий, ведут подготовку школьников города к решению олимпиадных задач на волонтерской основе. В то же время необходимо отметить, что в целом 46,1% студентов предпочитают гуманитарные предметы, что является основой для формирования у них профессионально-педагогической направленности.

На диаграмме 3 отражено положительное отношение студентов к используемым методам и средствам обучения (76,9%). В то же время 15,4% указали, что необходимо усилить практическую направленность, использовать больше современных аналитических, методических материалов, новых технологий, современного оборудования, а также стремиться к большей интерактивности. Возможно, именно эти студенты будут со временем внедрять в школах новые методики и технологии, в том числе цифровые.

Диаграмма 3

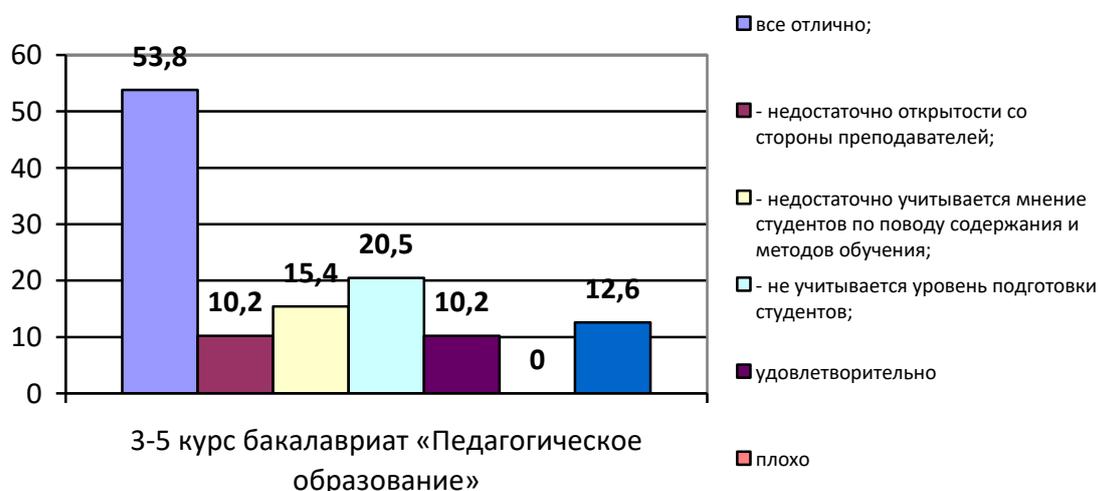
Устраивают ли вас методы и средства обучения (%)?



Ответы на вопрос «Как вы оцениваете взаимодействие с преподавателями на занятиях?» (см. диаграмму 4) примечательны тем, что большинство студентов оценивают их как отличные (53,8%) либо в большей мере довольны ими, чем недовольны (20,5%). Здесь, по-видимому, сказываются некоторый академизм и фундаментальность дисциплин физико-математического факультета, поскольку приоритетными являются содержание и логика предметов, а не занимательная форма и подача материала. Вместе с тем 20,5% считают, что недостаточно учитывается уровень подготовки студентов, а также их мнение по поводу содержания и методов обучения (15,4%), что коррелирует с 23,1% студентов, которых либо не устраивали методы и средства, либо устраивали частично (см. диаграмму 3), а также с той долей студентов, которые выбирают только гуманитарные дисциплины в качестве приоритетных (28,2%). Заметим, что голосование по этому вопросу было мягким, можно было выбрать несколько ответов.

Диаграмма 4

Как вы оцениваете взаимодействие с преподавателями на занятиях (%)?



В целом исследование позволяет сделать вывод, что на направление бакалавриата физико-математического факультета преимущественно поступают студенты, обладающие склонностью к изучению точных наук, а также с достаточно выраженной педагогической направленностью. Академизм и фундаментальность физико-математических дисциплин требуют аккуратности и осторожности в преобразованиях их содержания, методов и средств обучения. Вместе с тем, необходимо постепенно вводить новые технологии в высшее педагогическое физико-математическое образование, поскольку имеется заказ на цифровизацию экономики и образования как со стороны государства, так и общества. В противном случае «аналоговые» учителя будут учить «цифровых» детей, что может стать основой для создания неконструктивных противоречий, приводящих в падению интереса к обучению и снижению качества образования.

Литература

1. Сейтешев А.П. Профессиональная направленность личности: теория и практика воспитания. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1990. – 333 с.
2. Кузьмина Н.В. Профессионализм личности преподавателя и мастера производственного обучения. – М.: Высшая школа, 1990. – 119 с.
3. Дмитриенко Т.В. Формирование педагогической направленности у студентов университета в процессе коллективной творческой деятельности: дис. ... канд. пед. наук. – Тюмень, 1983. – 191 с.
4. Жернов В.И. Профессионально-педагогическая направленность личности студента: дис. ... д-ра пед. наук. – Магнитогорск, 2002. – 303 с.

G.E. Senkina

Smolensk State University

RESEARCH OF THE PROFESSIONAL DIRECTION AND TRAINING PREFERENCES OF STUDENTS DIRECTED TO THE BACHELOR OF "PEDAGOGICAL EDUCATION" ON THE EXAMPLE OF THE PHYSICO-MATHEMATICAL FACULTY OF THE SMOLENSK STATE UNIVERSITY

Keywords: *professional orientation; teacher education; educational preferences; physical and mathematical education; professional education.*

Abstract. *The article is devoted to the analysis of the results of a study of professional orientation and educational preferences of undergraduate students in the field of "Pedagogical Education" using the example of the Physics and Mathematics Department of Smolensk State University. A contradiction is revealed between the state and social orders for digitalization of the economy and education, the introduction of online education and the cash orientation and educational preferences of students. Only 15.4% of students note the need to transform the content and structure*

of educational programs, methods and teaching aids. Most students are distinguished mainly by the subject orientation to the exact sciences, at the same time there are a sufficient number of students who prefer both the exact and the humanities, have a pronounced focus on the disciplines of psychological and pedagogical direction.

Н.М. Тимофеева¹, Т.И. Тимофеева²

¹Смоленский государственный университет

²НПО «Рубикон-инновация»

УДК 004.9

ИНФОГРАФИКА КАК СРЕДСТВО ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Ключевые слова: *цифровизация образования; цифровые технологии; цифровая дидактика; инфографика как средство визуализации.*

Основными факторами цифровизации образования являются переход к информационному обществу и естественность цифровой среды для современного ученика, применяющего цифровые технологии с раннего возраста. Ориентируясь на образовательный запрос учащихся, необходимо перерабатывать преподносимый им материал, представлять его в сжатом, обобщенном, систематизированном, наглядном виде, то есть активно использовать в обучении технологии визуализации учебной информации, которые направлены на удобство и быстроту восприятия, освоения и запоминания информации. Инфографика как инструмент визуализации может помочь в этом. В статье рассматриваются виды инфографики, приводятся примеры сервисов для ее создания и редактирования, перечисляются достоинства этих сервисов и требования к инфографике для использования ее в образовательном процессе.

Процесс цифровизации образования вызван глобальными преобразованиями, связанными с переходом к информационному обществу, который как приоритет государственной информационной политики Российской Федерации зафиксирован в следующих нормативных документах:

- «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы», указ Президента РФ от 09.05.2017 г. № 203;

• «Современная цифровая образовательная среда в Российской Федерации», приоритетный проект в области образования, утвержден Правительством РФ от 25.10.2016 г.

Цифровизация образования подразумевает под собой формирование цифровой образовательной среды, то есть наличие информационно-коммуникационной инфраструктуры, а также активное использование в образовательном процессе цифровых ресурсов и средств обучения при организующей, консультативной роли педагога, компетентного в области цифровых технологий и цифровой дидактики (рис. 1, 2).

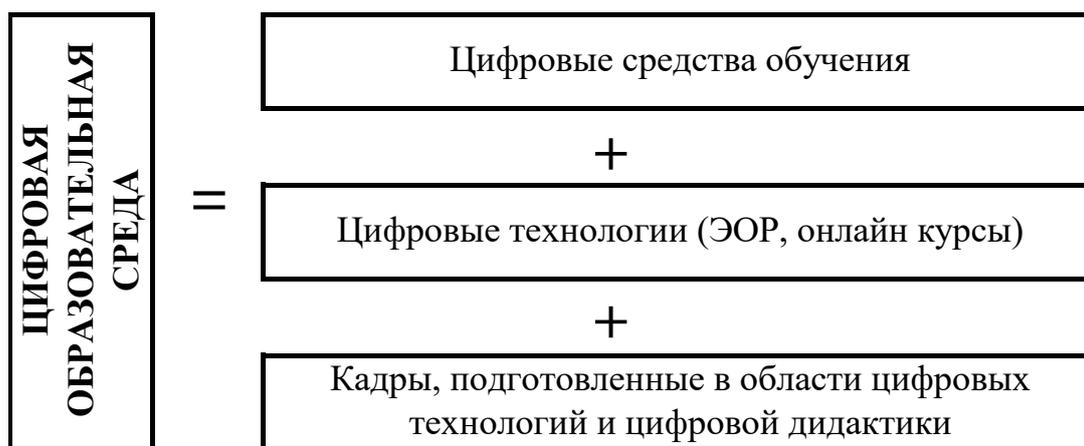


Рис. 1. Цифровая образовательная среда

Современный запрос государства и общества к образованию состоит в том, что образовательный процесс должен суметь приспособить цифровые технологии для решения педагогических задач и эффективно использовать дидактические возможности данных технологий:

- возможность задействовать сразу несколько каналов восприятия информации (мультимедийность);
- обеспечение доступа к различным источникам информации;
- обеспечение свободного перемещения по информационным массивам, сжатость, модульность информации (гипертекстовость);
- обеспечение коммуникативных процессов, оперативной обратной связи между субъектами образовательного процесса (интерактивность);
- возможность соединения учебы, работы и личностного развития, построения индивидуальных образовательных траекторий (субъектность);
- возможность управления учебной деятельностью;
- обеспечение статистического сбора и обработки результатов обучения;
- обеспечение политики безопасности, защиты предметного материала, информации о результатах обучения и др.

Вопросами реализации перечисленных возможностей для сферы образования занимается новая научная дисциплина, отрасль педагогики – цифровая дидактика [1, с. 6].

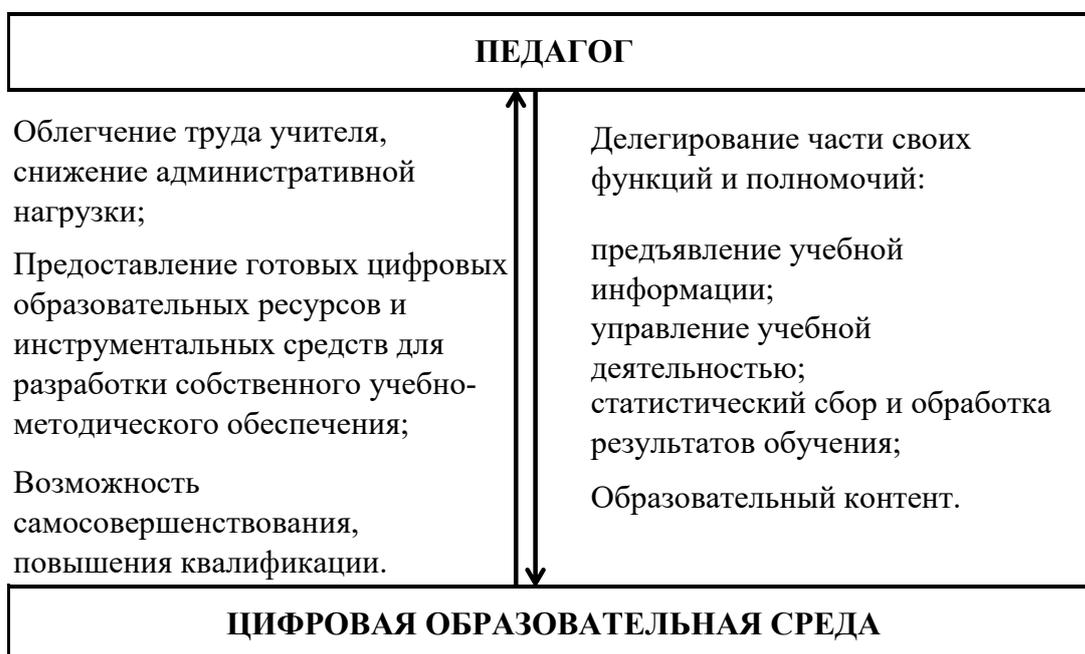


Рис. 2. Взаимодействие педагога и цифровой образовательной среды

Естественность цифровой среды для современного ученика как представителя поколения Z (поколение людей, с рождения использующих цифровые технологии) – еще один фактор, указывающий на необходимость цифровизации образовательного процесса. К положительным характеристикам представителей цифрового поколения, обусловленным широким использованием ими информационно-коммуникационных технологий для поиска информации и как средства коммуникации, относят высокую скорость переработки информации, мультизадачность, нелинейность мышления, прагматичность, требовательность в своем выборе. К отрицательным – клиповость мышления, неумение концентрироваться на главном, основной метод работы – компиляция из различных интернет-источников, сниженная потребность к живому общению, значимость сетевой социализации, отсутствие мотивации к обучению.

В целом стратегия работы с представителями цифрового поколения должна исходить из того, что их практически невозможно интегрировать в традиционный образовательный процесс, так как запрос к обучению у них – "сразу и быстро". Поэтому преподносимый поколению Z материал необходимо перерабатывать, представлять в сжатом, обобщенном, систематизированном, наглядном, привлекающем внимание виде, то есть активно использовать технологии визуализации информации,

которые направлены на удобство и быстроту восприятия, освоения и запоминания информации.

Зрительные образы, структура, знаково-символическое представление, использование цвета, формы, масштаба, анимации – это то, что представители цифрового поколения привыкли усваивать с раннего возраста. Необходима когнитивная визуализация, наглядно-образное представление информации, когда в мыслительные процессы вовлекаются оба полушария головного мозга (разноцветные графические образы лучше воспринимаются правым полушарием, иерархическое представление и связи – левым) [3, с. 127]. Все это может быть реализовано при помощи такого инструмента визуализации информации, как инфографика.

Инфографика – это графический способ подачи информации, данных и знаний, целью которого является быстро и четко преподнести сложную информацию [2, с. 72]. Формой подачи материала в инфографике является изображение, график, диаграмма, таблица, схема и др. Инфографика бывает статичная (без анимационных элементов, рис. 3) и динамическая (содержит анимацию, интерактивные элементы). Основные плюсы динамической инфографики: привлечение и удержание внимания; возможность размещения большего объема информации (за счет гиперссылок и всплывающих окон). При необходимости статичная инфографика может быть представлена в печатном виде, для динамической инфографики возможно лишь электронное представление.

Информационно-коммуникационные технологии дают неограниченные возможности по созданию и использованию инфографики в обучении – сервисы создания и редактирования инфографики (например, Сассо), интеллект-карт (например, Mindmeister), интерактивных плакатов (например, ThingLink), скрайбинга и анимированных презентаций (например, PowToon) и др. К достоинствам перечисленных ресурсов можно отнести:

- возможность настраивания дизайна (использование готовых шаблонов, возможность построения изображений с нуля, вставка собственных изображений);

- возможность вложения мультимедиа (добавление в инфографику собственных изображений, звукового сопровождения, видео, голосового комментария);

- наличие бесплатного тарифа использования сервисов [4, с. 215].

Использование инфографики в учебном процессе возможно при вводе нового понятия, при отработке, закреплении и повторении учебного материала и требует его серьезной проработки. Её применение предполагает серьезную работу с материалом – продумывание идеи инфографики, установление смысловых акцентов и связей между ними,

представление информации в виде графических, символических образов. Полученное в итоге изображение должно отвечать требованиям:

- полноты, то есть полностью раскрывать изучаемый материал;
- лаконичности – информация должна быть представлена в «сжатом» виде, то есть обобщена, укрупнена, упорядочена;
- структурности – выделение главного, установление причинно-следственных связей;
- ассоциативности и образности – применяемые зрительные образы должны вызывать четкие ассоциации и легко запоминаться;
- наглядности – за счет подключения зрительной памяти, путем применения цвета, масштаба, анимации и др. [3, с. 130].



Рис. 3. Пример статичной инфографики

Литература

1. Проект дидактической концепции цифрового профессионального образования и обучения. – М.: Изд-во «Перо», 2019. – 72 с.

2. Степанова О.Н. Инфографика как инструмент визуализации // Вестник НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2016. – №2. – С. 72-78.

3. Тимофеева Н.М. Анимированные презентации как средство визуализации информации (на примере использования веб-сервиса Powtoon) // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи Сборник материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Киров, 2019. – С. 127-131.

4. Тимофеева Н.М. О структурировании и наглядном представлении информации в виде интеллект-карт средствами онлайн-сервисов // Системы компьютерной математики и их приложения. – 2019. – Вып. 20. Ч. 2. – С. 214-218.

N.M. Timofeeva¹, T.I. Timofeeva²

¹Smolensk State University

²Research and Development Company «Rubicon-Innovation»

INFOGRAPHICS AS A MEANS OF DIGITALIZATION OF EDUCATION

Keywords: *digitalization of education; digital technologies; digital didactics; infographics as a means of visualization.*

Abstract. *The main factors of digitalization of education are the transition to the information society and the naturalness of the digital environment for the modern student who uses digital technologies from an early age. Focusing on the educational request of students, it is necessary to process the material presented to the students, present it in a concise, generalized, systematized, visual form, that is, actively use educational technologies to visualize educational information that are aimed at the convenience and speed of perception, development and memorization of information. Infographics as a visualization tool can help with this. The article discusses the types of infographics, provides examples of services for its creation and editing, lists the advantages of these services and the requirements for infographics for its use in the educational process.*

Е.А. Царева

Смоленский государственный университет

УДК 531, 378.147

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ФИЗИКЕ

Ключевые слова: *физика; лабораторный практикум; лабораторно-практические занятия; автоматизированный эксперимент; моделирование*

физических процессов; оптимизация лабораторного практикума; использование информационных технологий в преподавании физики.

В статье рассмотрены различные приемы оптимизации лабораторного практикума по физике с использованием информационных технологий. Выделены направления использования информационных технологий при проведении физического эксперимента (традиционный натуральный эксперимент с использованием компьютера для обработки результатов измерений и построения графиков; эксперимент с использованием физического моделирования). Рассмотрены возможности формирования научно-исследовательской компетенции при работе в физической лаборатории.

Физика – наука экспериментальная, преподавание ее только с помощью компьютера, мела и доски неэффективно и совершенно недопустимо.

Физический практикум является одной из важнейших составляющих качественного физического образования. Именно он позволяет студентам не только усвоить фундаментальные физические понятия и законы, но и развить свои творческие способности, а также заложить основу для дальнейшего самообразования и самореализации.

Лабораторный практикум представляет собой такую форму организации учебного процесса, которая направлена на формирование практических навыков обращения с физическим оборудованием, анализа наблюдаемых явлений и интерпретации полученных результатов, умения применять полученные теоретические знания при постановке и проведении экспериментальных исследований. На занятиях практикума формируется комплекс профессиональных и личностных качеств студентов: активность, самостоятельность, аккуратность, умение аналитически мыслить, использовать полученные знания и навыки в измененных ситуациях и т.д.

Выполнение эксперимента создает благоприятные условия для разъяснения непонятных вопросов, осмысления теоретических знаний и показа их практической значимости.

Переход на новые стандарты высшего образования и сокращение числа аудиторных занятий по физике потребовали разработки нового подхода к проведению физического лабораторного практикума.

Анализ возможностей курса физики показывает, что поддержка физического практикума современными информационными технологиями позволяет существенно сократить время на обработку экспериментальных данных, усилить мотивацию студентов при изучении курса физики, выявляя ее выходы в профессиональные задачи.

При этом необходимо разумное сочетание изучения реальных объектов лабораторного практикума и компьютерных технологий. Поэтому вопрос состоит в том, как наиболее эффективно сочетать их в учебном процессе [1; 2; [3].

В связи с сокращением числа аудиторных занятий по предмету и для осуществления более глубокой связи экспериментального и теоретического материала возникла необходимость подобрать для каждой лабораторной работы несколько конкретных физических задач, имеющих различный уровень сложности и связанных по содержанию с результатами выполняемых лабораторных работ и практической производственной деятельностью людей. Это позволяет при оценке выполнения работы проверить не только теоретические знания студента, его владение методикой эксперимента, но и умение применять полученные знания при решении конкретных задач. Проведение таких объединенных лабораторно-практических занятий отчасти компенсирует нехватку учебного времени, сокращает имеющийся разрыв между лабораторным практикумом и решением задач.

С учетом характера деятельности студентов на лабораторном занятии можно выделить следующие группы задач, сопровождающих подготовку, выполнение и защиту лабораторной работы:

Задачи для допуска к лабораторному практикуму.

Они позволяют проверить готовность студента к выполнению работы. Как правило это качественные задачи, на объяснение явлений и процессов, наблюдаемых в ходе работы, вывод расчетной формулы, объяснение метода измерений и обработки результатов. Эти задачи могут быть выполнены студентами самостоятельно дома при подготовке к занятию, что позволяет более эффективно использовать аудиторное время.

Задачи для контроля и самоконтроля предлагаются во время защиты лабораторной работы. Каждому студенту предоставляется индивидуальный набор задач, который позволяет проверить умение применять знания, полученные при выполнении лабораторной работы на практике. Эти задачи позволяют дифференцировать студентов по уровню подготовки, предлагая сильным более сложные задачи, а для менее подготовленных устанавливая некоторый минимальный уровень, соответствующий образовательному стандарту.

Изучение курса физики студентами физико-математического факультета начинается на первом курсе, что порождает определенные проблемы:

- из-за формального подхода к выполнению лабораторных работ в школе студенты-первокурсники имеют низкий уровень сформированности экспериментальных навыков и умений;

• студенты только начинают изучать курсы физики, информатики и математических дисциплин, а значит имеют недостаточно опыта по использованию специальных математических пакетов, изучаемых на старших курсах. Это приводит к тому, что в качестве инструмента для обработки данных, полученных в результате эксперимента, студенты чаще всего выбирают электронные таблицы Microsoft Office Excel, которые имеют встроенный пакет функций, позволяющий быстро обрабатывать результаты измерений, строить графики, оценивать погрешность полученных результатов. Большим достоинством этой программы является возможность мгновенного перерасчета результатов при изменении экспериментальных данных.

Рассмотрим вопрос оптимизации лабораторного практикума на примере конкретной лабораторной работы «Проверка закона вращательного движения», которая выполняется студентами физико-математического факультета Смоленского государственного университета. Первоначально эта лабораторная работа выполнялась как традиционный натурный эксперимент. По мере внедрения компьютерных технологий в лабораторный практикум была проведена оптимизация лабораторной работы, сократилось время обработки результатов измерений за счет использования информационных технологий, и это позволило расширить исследовательскую часть.

На этапе подготовки и допуска к лабораторной работе студенту предлагается ответить на вопросы и решить следующие качественные задачи для допуска к работе.

1. Как рассчитать теоретическое значение момента инерции маятника Обербека? Какие параметры установки необходимо для этого знать?
2. Запишите основное уравнение вращательного движения и охарактеризуйте физические величины, входящие в него.
3. Нить намотали на шкив с большим радиусом. Какие характеристики движения при этом изменятся?
4. В установке изменили массу грузов. Как при этом изменились характеристики движения?
5. Запишите соотношение, связывающее угловое ускорение маятника и линейное ускорение груза. При каком условии это соотношение справедливо?

В лабораторной работе «Проверка закона вращательного движения» используется экспериментальная установка на основе крестообразного маятника Обербека. Он представляет собой маховик, насаженный на горизонтальный вал, с четырьмя взаимно перпендикулярными стержнями. Вся эта система может вращаться вокруг горизонтальной оси z , совпадающей с осью вала. На стержнях на определенном расстоянии от оси вращения закрепляются четыре

цилиндрических груза массой m_0 . Изменяя их положение на стержнях относительно оси вращения, можно изменять момент инерции установки. Маховик представляет собой систему шкивов, имеющих разные диаметры. На шкивы наматывается нить с закрепленной на ней платформой, на которую можно помещать грузы различной массы m . Если, вращая систему и наматывая при этом нить на шкив поднять платформу с грузом на высоту h , а затем отпустить, то она начнет двигаться равноускоренно и поступательно, а крестообразный маятник – равноускоренно вращаться.

Движение маятника описывается основным законом вращательного движения, которое в проекции на ось z , совпадающей с осью вращения, имеет вид $I\varepsilon = \sum_{i=1}^N M_i$, где ε – угловое ускорение маятника; I – момент инерции маховика относительно оси вращения; $\sum_{i=1}^N M_i$ – алгебраическая сумма проекций моментов внешних сил на ось z .

Определяя с помощью электронного секундомера время прохождения платформы с грузом расстояния h , можно определить ускорение платформы, угловое ускорение маятника, момент силы натяжения нити, значение момента инерции системы как без грузов, так и при их фиксированном положении на стержнях, изучить зависимость момента инерции маятника от распределения массы относительно оси вращения, экспериментально определить значение момента силы трения.

Проверка закона вращательного движения состоит из двух этапов. На первом при неизменном распределении массы маятника относительно оси вращения определяются угловое ускорение маятника и момент силы натяжения нити для различных грузов, помещаемых на платформу. Строится график зависимости $\varepsilon(M_T)$ и проверяется прямо пропорциональная зависимость между этими величинами:

$$M_T = k\varepsilon + b.$$

На этом этапе используется крестообразный маятник без закрепленных на нем четырех цилиндров, для которого с помощью графика определяются коэффициенты k и b .

На втором этапе необходимо доказать, что угловой коэффициент k представляет собой момент инерции маховика I . Для этого на стержни маятника помещаются четыре цилиндрических груза на одинаковом расстоянии от оси маховика. Добившись равновесия маховика, проводят еще одну серию измерений, строят график зависимости $\varepsilon(M_T)$, и с его помощью определяются коэффициенты k_I и b_I .

Если коэффициенты k и k_I соответственно равны моментам инерции маховика без грузов в первой серии и с грузами во второй, то их

разность будет равна моменту инерции грузов относительно оси вращения.

Зная массу и размеры цилиндрических грузов, а также их расположение относительно оси вращения, можно теоретически определить момент инерции грузов и сравнить его с экспериментальным результатом. Тем самым доказать, что коэффициент пропорциональности в этой зависимости действительно равен моменту инерции маховика.

Из вышеизложенного видно, что лабораторная работа предполагает обработку достаточно объемного экспериментального материала. Использование электронных таблиц Microsoft Office Excel, имеющих встроенный пакет функций, позволяет существенно сократить время обработки результатов измерений, построить оба графика и оценивать погрешность полученных результатов. Сокращение времени позволяет студентам больше времени отвести на подготовку к защите лабораторной работы и на решение задач по теме «Вращательное движение твердого тела».

На этапе защиты лабораторной работы студенту предлагается ответить на вопросы и решить следующие задачи.

1. Как по графику определить момент инерции маховика?
2. Какие факты являются подтверждением того, что проверяемый закон справедлив?
3. Определите момент инерции сплошного однородного диска радиусом 40 см и массой 1 кг относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.
4. На тонкий однородный полый цилиндр массы m и радиуса R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массы m . В момент времени $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра и массой ступицы и спиц, найдите зависимость от времени: а) угловой скорости цилиндра; б) кинетической энергии всей системы.

Студенты старших курсов, знакомые с такими программами, как MathCad, на занятиях по компьютерной физике могут вернуться к этому вопросу и разработать программу для вращательного движения (маятник Обербека) в зависимости от положения грузов относительно оси вращения и параметров установки. Компьютерная модель позволит наглядно представить реальную экспериментальную установку и достоверно отражать физические законы необходимые для описания рассматриваемых явлений. В компьютерном варианте можно задавать в широком диапазоне разные параметры установки: массу стержней и грузов, длину стержней и радиус шкива, расстояние от точки оси вращения до центра масс грузов. Можно ввести дополнительные параметры, такие как плотность стержня и грузов. Это позволит сделать

исследование вращения маятника более наглядным. А на занятиях по моделированию вращательного движения каждый студент может исследовать вращения маятника со своими персональными параметрами, что дает возможность индивидуального выполнения виртуальной лабораторной работы каждым студентом. По окончании работы можно провести сравнение полученных всей группой результатов и показать влияние различных параметров установок на результаты эксперимента. Это вносит в выполнение работы элементы научного исследования. Сравнение результатов лабораторной работы в натурном и виртуальном виде позволит студентам лучше понять физические закономерности, которые использовались для описания рассматриваемых явлений.

Использование компьютерных технологий на лабораторно-практических занятиях по физике дает возможность студентам не только получить фундаментальные знания по дисциплине, но также продемонстрировать возможность применения знаний, полученных на занятиях по информатике и математике, в физической лаборатории. Это поможет развить интерес к преподаваемым предметам и, как следствие, мотивацию к изучению дисциплин и получению необходимых знаний и умений.

Литература

1. Царева Е.А. Использование информационных технологий для обработки результатов эксперимента // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. – С.260-262.
2. Царева Е.А. Использование программы Microsoft Office Excel для обработки результатов лабораторных работ по физике // Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2015. – С.267-269.
3. Царева Е.А.Использование информационных технологий при проведении лабораторного практикума по физике // Развитие научно-технического творчества детей и молодежи. Сб. материалов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – Киров: Изд-во «Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании», 2019. – С.131-135

Е.А. Tsareva

Smolensk State University

OPTIMIZATION OF A LABORATORY PRACTICE IN PHYSICS

Keywords: *physics; laboratory workshop; laboratory and practical classes; automated experiment; modeling of physical processes; optimization of laboratory practice; the use of information technology in the teaching of physics.*

Abstract. *The article discusses various techniques for optimizing a laboratory workshop in physics using information technology. Directions of*

using information technologies in conducting a physical experiment (a traditional full-scale experiment using a computer to process measurement results and graphs; an experiment using physical modeling) are highlighted. The possibilities of the formation of scientific research competence when working in a physical laboratory are considered.

Н.А. Шерстнёва

Смоленский государственный университет

УДК 519.677

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ WOLFRAM MATHEMATICA

Ключевые слова: преподавание математического анализа; системы компьютерной математики.

В статье освещён опыт работы автора по преподаванию математического анализа с использованием в образовательном процессе системы компьютерной математики Wolfram Mathematica; проиллюстрированы возможности данного математического пакета при изучении некоторых тем математического анализа.

Образовательный процесс в России на протяжении последних десятилетий периодически подвергается реформированию и трансформации. Так, начиная с 1992 года в нашей стране стали внедрять образовательные стандарты, регламентирующие как процесс основного и среднего образования, так и системообразующую высшую школу. Данный документ привёл к разработке новых учебных планов и инициировал появление в них новых видов образовательной деятельности обучающихся. В частности, в связи с переходом Смоленского государственного университета на стандарты 3+ в 2016 году в практику преподавания математического анализа на таких направлениях подготовки, как «Прикладная математика и информатика», «Педагогическое образование» (профили «Математика и информатика», «Физика и информатика») и «Промышленное гражданское строительство», был внедрён новый вид учебной работы – лабораторные занятия. Они дополнили существующие уже лекционные и практические занятия по курсу и содействовали внедрению в образовательный процесс в высшей школе элементов дистанционного обучения, что соответствует требованиям времени.

Как показывает опыт работы, новая форма обучения оказалась весьма продуктивной, она расширила возможности бакалавров различных направлений подготовки по решению математических задач и способствовала улучшению их предметной подготовки. Достоинствами лабораторных работ по курсу математического анализа, выполненных в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica, являются, на наш взгляд, следующие: 1) сокращение времени и трудоёмкости решения задач математического анализа; 2) визуализация математических моделей; 3) открытие новых возможностей для решения прикладных и профессиональных задач; 4) формирование таких общекультурных и профессиональных компетенций, как: способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой; способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии; способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат; 5) реализация в образовательном процессе принципа практической направленности; 6) осуществление межпредметной интеграции.

Лабораторные работы по курсу математического анализа решают разные задачи в зависимости от направления подготовки студентов. Для бакалавров по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» они: 1) дают возможность увидеть решение математической проблемы с двух сторон: с помощью традиционных математических алгоритмов и с точки зрения программ вычислительной техники, что облегчает в будущем написание студентами собственных программ по решению математических задач; 2) усиливают и подкрепляют теоретическую и практическую подготовку бакалавров; 3) повышают интерес к предмету, так как многие обучающиеся этого направления нацелены в основном на работу в компьютерных средах. Студентам направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» полученные в процессе выполнения лабораторных работ навыки позволяют: 1) в будущем планировать собственные уроки с опорой на системы компьютерной математики; 2) при написании выпускной квалификационной работы по математике включать в неё задания, решённые средствами математических пакетов, что украшает работу и повышает процент её оригинальности. Наконец, бакалавры, обучающиеся на направлении подготовки 08.03.01 «Строительство» получают возможность легко и просто решать разнообразные задачи математического анализа, которые при традиционном подходе вызывают у них значительные трудности, что опять-таки повышает интерес к курсу и открывает возможности для успешного решения профессиональных задач.

Если говорить о спектре математических задач, решаемых средствами СКМ WolframMathematica, то он тоже достаточно широк: 1) преобразование алгебраических выражений; 2) решение алгебраических и дифференциальных уравнений, неравенств и их систем; 3) вычисление пределов числовых последовательностей и функций одной и нескольких переменных; 4) задачи дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных (нахождение производных и частных производных; исследование функции на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, точки перегиба, асимптоты графика функции; построение графиков; вычисление разнообразных интегралов; нахождение площадей фигур, объёмов тел, длин дуг и т.п.); 5) проблематика числовых и функциональных рядов.

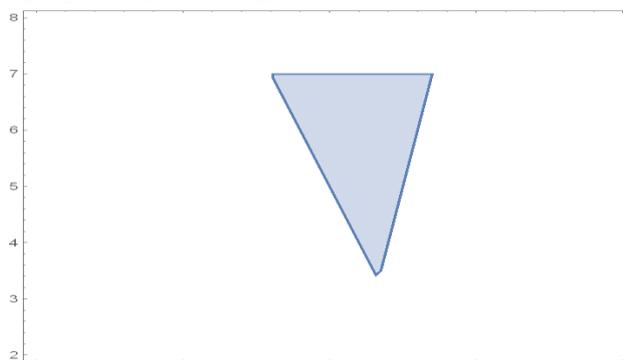
Приведём несколько примеров из нашей лабораторной практики.

Пример 1. Изобразить множество решений системы неравенств $\begin{cases} y < 7, \\ y - 2x > 0, \\ x + y > 5 \end{cases}$, и найти все целочисленные решения этой системы.

Решение

```
RegionPlot[y < 7 && y - 2 * x > 0 && x + y > 5, {x, -10, 10}, {y, 2, 8}]
```

визуализация геометрической области на плоскости



```
Reduce[y < 7 && y - 2 * x > 0 && x + y > 5, {x, y}, Integers]
```

привести

множество

```
(x == 0 && y == 6) || (x == 1 && y == 5) || (x == 1 && y == 6) || (x == 2 && y == 5) || (x == 2 && y == 6)
```

Пример 2. Найти и изобразить точки пересечения окружности и прямой.

Решение

```
Solve[{x, y} ∈ InfiniteLine[{{0, 0}, {2, 1}}] && {x, y} ∈ Circle[], {x, y}]
```

решить уравнения

круг

```
{{x → - 2 / √5, y → - 1 / √5}, {x → 2 / √5, y → 1 / √5}}
```

```
Graphics[{{Blue, InfiniteLine[{{0, 0}, {2, 1}}]}, Circle[]},
```

графика

синий

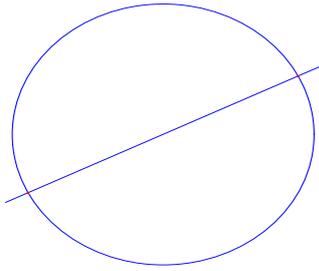
прямая

круг

```
{Red, Point[{x, y]} /. %}}
```

красная

точка



Пример 3. Найти площадь фигуры и длину дуги кривой, ограниченной линиями $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

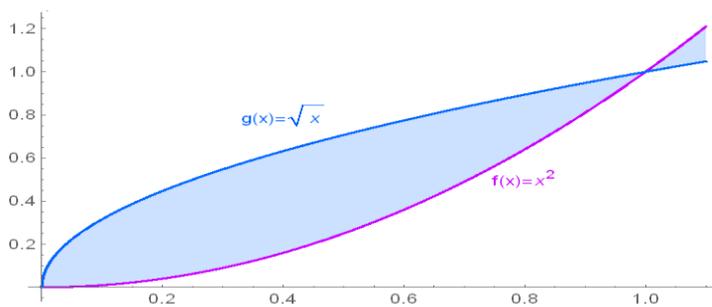
Решение

`f[x_] := x2;`

`g[x_] := sqrt[x];`

`Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 1.1}, PlotStyle -> {Hue[0.8], Hue[0.6]},`
[график функции] [стиль графика] [тон] [тон]

`Epilog -> {Hue[0.8], Text["f(x)=x2", {0.8, 0.5}], Hue[0.6], Text["g(x)=sqrt[x]", {0.4, 0.8}]}, Filling -> {1}]`
[эпилог] [тон] [текст] [тон] [текст] [заливка]



`Solve[f[x] == g[x], x]`

[решить уравнения]

`{{x -> 0}, {x -> 1}}`

$$\int_0^1 (g[x] - f[x]) dx$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'[x]^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + g'[x]^2} dx$$

$$\frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \text{ArcSinh}[2]) + \frac{1}{8} (4\sqrt{5} + \text{Log}[9 + 4\sqrt{5}])$$

`N[%]`

[численное приближение]

2.95789

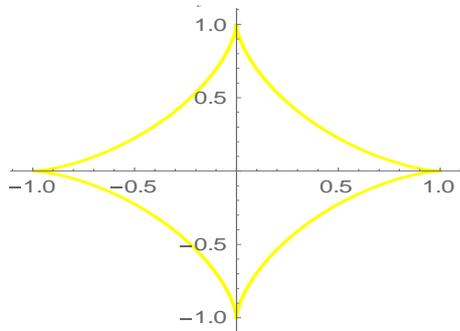
Пример 4. Вычислить объёма тела, образованного вращением астроида вокруг оси Oх.

Решение

```
x[t_] := Cos[t]^3;
y[t_] := Sin[t]^3;
```

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2*π}, PlotStyle -> Yellow]
```

[график параметрически заданной области на плоскости | стиль графика | жёлтый]



```
Solve[x[t] == 0 && 0 ≤ t ≤ π/2]
```

[решить уравнения]

```
{{t -> π/2}, {t -> π/2}, {t -> π/2}}
```

```
Solve[x[t] == 1 && 0 ≤ t ≤ π/2]
```

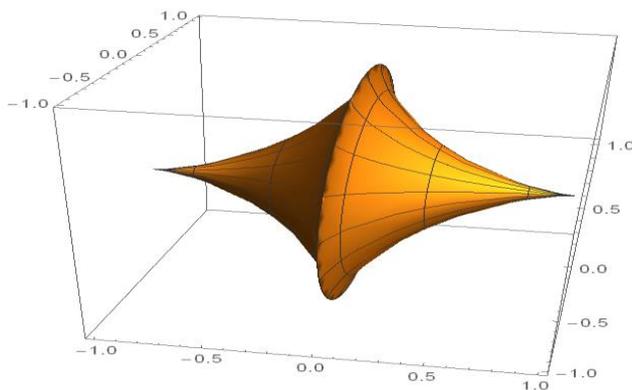
[решить уравнения]

```
{{t -> 0}, {t -> 0}}
```

```
RevolutionPlot3D[{x[t], y[t]}, {t, 0, π*2}, RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```

[график поверхности вращения]

[ось вращения]



$$2 * \pi * \int_{\pi/2}^{\theta} y[t]^2 * x'[t] dt$$

$$\frac{32 \pi}{105}$$

N.A. Sherstneva
Smolensk State University

SOLUTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS BY WOLFRAM MATHEMATICA COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM

Keywords: *teaching mathematical analysis; computer math system.*

Abstract. *The article highlights the author's experience in teaching mathematical analysis using the Wolfram Mathematica computer mathematics system in the educational process; the capabilities of this mathematical package are illustrated when studying some topics of mathematical analysis.*

А.М. Шилягина

Смоленский государственный университет

УДК 37.02

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДИДАКТИЧЕСКОГО ИНФОРМАЦИОННОГО КОМПЛЕКСА

Ключевые слова: этапы педагогического проектирования; дидактический информационный комплекс; иностранный язык; учебное пособие; электронное учебное пособие; компьютер с программным обеспечением; мультимедийный лингафонный комплект Rinel-Lingo Audio-Video.

В статье описывается многоступенчатый процесс создания дидактического информационного комплекса по английскому языку.

Началом этого процесса стало написание учебного пособия. Следующим шагом явилось создание электронного учебного пособия. Затем на базе электронного учебного пособия при помощи мультимедийного лингафонного комплекта Rinel-Lingo Audio-Video был спроектирован дидактический информационный комплекс по английскому языку.

В современном информационном обществе владение иностранными языками приобретает особое значение. В связи с этим, перед учителями школ и преподавателями высших учебных заведений встает вопрос создания инновационных средств обучения, которые дадут возможность внедрять в учебный процесс современные формы и методы преподавания.

Все этапы практической реализации и апробации дидактического информационного комплекса проводились на примере одной дисциплины – «английский язык». Однако, полученные результаты возможно перенести на другие учебные предметы.

В силу своей особенности (необходимость создания искусственной языковой среды) изучение иностранного языка, в отличие от других дисциплин, предполагает наиболее широкое использование различных

инновационных средств обучения, поскольку невозможно преподавать иностранный язык, привлекая только традиционные средства обучения. Проектирование и применение учителем дидактических информационных комплексов предусматривает самое широкое использование информационных и мультимедиа-технологий, являющихся связующим звеном между остальными учебными предметами. В то же время все рассмотренные ранее методы и принципы создания дидактического информационного комплекса можно использовать при проектировании дидактических информационных комплексов по любой другой учебной дисциплине (русский язык, литература, математика, информатика, физика и т.д.).

Итак, рассмотрим процесс проектирования дидактического информационного комплекса по английскому языку. За основу нами были взяты этапы, предложенные Н.Н. Суртаевой [1]. Учитывая специфику исследования, мы заменили название некоторых этапов. Рефлексивный этап, в нашем случае назван практическим, а экспериментальный – апробационным.

1. Теоретический этап.
2. Практический этап.
3. Апробационный этап.
4. Корректирующий этап.
5. Завершающий этап.

Прежде чем приступить к реализации вышеобозначенных этапов проектирования дидактического информационного комплекса, мы прошли предварительный этап, который заключался в подготовке, написании и издании учебного пособия (бумажная версия). Оно легло в основу создания дидактического информационного комплекса по английскому языку [2].

В результате многолетней работы в вузе было собрано большое количество методического материала. Весь собранный нами практический материал требовал систематизации и упорядочения. Таким образом возникла идея написания учебного пособия, охватывающего не всю дисциплину, а лишь несколько наиболее важных разделов учебной программы. Задумывалось оно как пособие для развития устной коммуникативной компетенции и навыков чтения текстов общественно-культурного и страноведческого содержания.

Основная задача учебного пособия – ввести наиболее частотную тематическую лексику по определенной разговорной теме, отработать и закрепить ее при помощи разнообразных заданий. Для закрепления лексического материала предлагается большое количество различных упражнений. Пособие построено по тематическому принципу и состоит из двух разделов.

Первый раздел включает девять тематических уроков (Units). Наряду с традиционными разговорными темами, как «Family. Relations», «House. Flat», «Weather», «A Foreign Language», «Time. Days. Months», «Countries. Cities. Places», «Meals», «Working Day», в пособии представлена тема «Computer Operating».

Структура разделов однотипна. Сначала вводятся необходимая лексика и разговорные фразы, также предлагается выполнить ряд тренировочных упражнений, предназначенных для усвоения материала на уровне восприятия и репродукции (Vocabulary Exercises).

Далее следуют небольшой текст и диалоги, основанные на ранее изученной лексике. Учащимся предлагаются разные формы работы с диалогами: чтение по ролям, составление по предложенной модели, составление рассказа на базе диалога и т.д. (Read and Speak).

В качестве завершающего этапа работы над каждым разделом учащимся даются задания, предоставляющие возможность проверить их подготовленность к свободной беседе по заданной теме. Некоторые задания имеют коммуникативную направленность, что позволяет вовлечь учащихся в активную речевую деятельность в пределах изучаемой темы (Test Yourself).

Ряд заданий предполагает использование электронного словаря АВВУУ Lingo, который предоставляет возможность проверить транскрипцию, отрабатывать произношение, находить синонимы и антонимы, подбирать пословицы, содержащие заданное слово и т.д.

Ядром любого проектируемого дидактического информационного комплекса является компьютер с программным обеспечением. В нашем случае мы выбрали лингафонный комплект Rinel-Lingo Audio-Video [3]. Заметим, что мультимедийный лингафонный комплект Rinel-Lingo Audio-Video является не единственным программным обеспечением, при помощи которого можно проектировать дидактические информационные комплексы. На сегодняшний день существует большое количество программных продуктов, которыми может воспользоваться любой учитель-предметник при создании дидактических комплексов по различным учебным дисциплинам. Например, это системы компьютерной математики MatLab, MatCaD, пакеты прикладных программ «Живая математика», «Живая геометрия» и т.д.

Мультимедийный лингафонный комплект Rinel-Lingo Audio-Video – это программное обеспечение, предназначенное для использования готового и создания нового учебного материала в виде мультимедийных лингафонных курсов (Lingo-книги). Дополнительно к мультимедийному лингафонному комплексу Rinel-Lingo может быть установлена интерактивная доска, мультимедиа-проектор, источники аудио-видео – CD, DVD, VHS и т.д., т.е. те инновационные средства обучения, которые имеются в распоряжении учебного заведения.

Оснащение компьютерного класса мультимедийным комплектом Rinel-Lingo дало нам возможность спроектировать дидактический информационный комплекс по английскому языку. Первым шагом стало создание электронного пособия (аналога печатному изданию), но с более широкими возможностями.

Lingo-книга представляет собой последовательный набор страниц, которые выводятся на экран монитора, и таким образом обеспечивается возможность их просматривать, прослушивать, а также давать ответы в письменном и звуковом виде с помощью программы Rinel-Lingo Viewer. В программу включён виртуальный магнитофон, с помощью которого можно записывать и прослушивать звук.

Каждый новый тематический урок начинается с введения новых лексических единиц (Useful words and expressions). На страницу электронного пособия помещается список слов и выражений с переводом, в левом верхнем углу располагается миниатюрный проигрыватель. Нажав на кнопку «Play», учащиеся могут прослушать звучание слов и выражений на иностранном языке. Далее следуют упражнения на первичное закрепление лексики. После них – упражнения на отработку произношения. Учащиеся записывают свой голос с помощью микрофонов, а затем прослушивают сделанную запись. Записывать свое произношение можно столько раз, сколько необходимо. Учитель имеет возможность прослушать запись, сделанную учащимся, прокомментировать и исправить его ошибки.

Раздел VocabularyExercises состоит из упражнений, предназначенных для усвоения материала на уровне восприятия и репродукции. В него включены задания на нахождение соответствий между фразами на английском и русском языках, также предлагается выполнить ряд подстановочных и переводных упражнений. Кроме того, в данном разделе используются также переводные упражнения, в основном с английского языка на русский, направленные на первичное закрепление лексики по заданной теме, а также развитие навыков говорения.

В разделе ReadandSpeak представлены тексты и диалоги, содержащие ранее изученную лексику. Тексты и диалоги построены на лексическом материале пособия. Задания этого раздела имеют коммуникативную направленность, что позволяет вовлечь студентов в активную речевую деятельность в рамках пройденной темы.

Проектирование дидактического информационного комплекса – это сложный многоступенчатый процесс, требующий больших затрат времени и усилий. При создании авторского комплекса по любой учебной дисциплине необходимо понимать, что педагогическое проектирование – это и наука, и творчество одновременно. Будучи наукой, оно требует от педагога соблюдения определенных принципов,

форм и приемов. Будучи творчеством – креативности и профессионального мастерства.

Литература

1. Суртаева Н.Н. Проектирование педагогических технологий в профессиональной подготовке учителя (на примере естественнонаучных дисциплин): дис. ... д-ра пед. наук. – М., 1995. – 341 с.
2. Шилиягина А.М. Английский язык. Сборник упражнений и текстов для развития навыков устной речи. – Смоленск: СГПУ, 2004. – 104 с.
3. Мультимедиа-лингафонный комплект Rinel-Lingo. Руководство пользователя. – Ростов-на-Дону, 2005.

A.M. Shilyagina

Smolensk State University

PRACTICAL IMPLEMENTATION OF A DESIGN SYSTEM OF A DIDACTIC INFORMATION COMPLEX

Keywords: *stages of pedagogical design; didactic information complex; foreign language; tutorial; e-learning aid; computer with software; multimedia language pack Rinel-Lingo Audio-Video.*

Abstract. *The article describes the multi-stage process of creating a didactic information complex in English.*

The beginning of this process was the writing of a textbook. The next step was the creation of an electronic textbook. Then, on the basis of an electronic textbook, with the help of a multimedia language pack Rinel-Lingo Audio-Video, a didactic information complex in English was designed.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Аветисов Юрий Гарриевич – ведущий инженер-программист бюро разработки и сопровождения программного обеспечения ООО «Парус». E-mail: yury.avetisov@gmail.com.

Агасиев Талех Азер оглы – аспирант кафедры систем автоматизированного проектирования МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: taaalex@mail.ru.

Акуленок Марина Викторовна – доцент института СПИНТех Московского института электронной техники. E-mail: amv@s2q.ru.

Алмохамед Муатаз – аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета и сотрудник Университета Алеппо (Syria). E-mail: mssrmtz@gmail.com.

Андрианов Андрей Михайлович – кандидат технических наук, доцент института СПИНТех, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» (МИЭТ). E-mail: andymailru@mail.ru.

Андрун Абед – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: abed.androon@yandex.ru.

Банару Галина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Банару Михаил Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

Беднаж Вера Аркадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского. E-mail: vera.bednazh@mail.ru

Беляков Павел Валерьевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета.

Бирюкова Татьяна Константиновна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: yukonta@mail.ru.

Благодатский Григорий Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы» Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: blagodatsky@gmail.com.

Богданова Надежда Николаевна – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

Бондарь Александр Александрович – аспирант Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: alex.kvitkovsky@yandex.ru.

Борисов Вадим Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная техника» филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске. E-mail: vbor67@mail.ru.

Бояринов Дмитрий Анатольевич – кандидат педагогических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий Смоленского государственного университета. E-mail: dmboyarinov@mail.ru.

Вишняков Рустам Рустамович – аспирант кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: Vishn9-r@yandex.ru.

Гагарина Лариса Геннадьевна – доктор технических наук, профессор, директор института СПИНТех, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» (МИЭТ). E-mail: gagar@bk.ru.

Гершкович Максим Михайлович – старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: makmg@mail.ru.

Гомонов Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@smolgu.ru.

Гончаров Евгений Игоревич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru.

Городилов Алексей Владиславович – кандидат технических наук, ИП Каверина А.В. «Русская мода». E-mail: averina@mail.ru.

Грибер Юлия Александровна – доктор культурологии, профессор кафедры социологии, философии и работы с молодежью Смоленского государственного университета. E-mail: griber@gmail.com.

Григорьева Галина Михайловна – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: grigoryevagal@gmail.com.

Григорян Лусине Арменовна – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: freedom0106@yandex.ru.

Диев Олег Евгеньевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: defar6006@gmail.com.

Довгерд Глеб Александрович – магистрант института бортовой электроники и технической кибернетики Московского авиационного института. E-mail: christmas1409@yandex.ru.

Доронина Анна Александровна – магистрант института СПИНТех, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» (МИЭТ). E-mail: doronina.anna.a@mail.ru.

Дроздов Иван Борисович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zoider@pm.me.

Дюндин Андрей Викторович – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru.

Евдокимова Галина Семеновна – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: kaf-matem@smolgu.ru.

Емельченков Евгений Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информатики Смоленского государственного университета. E-mail: уру1101@gmail.com.

Жуков Денис Владимирович – начальник отдела в ОИП Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: dzhukov@ipiran.ru.

Захаренков Артем Олегович – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: mr.zaharenkov@yandex.ru.

Захаров Виктор Николаевич – доктор технических наук, доцент, ученый секретарь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: vzakharov@ipiran.ru.

Захаров Роман Александрович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: rom.zakharov2018@yandex.ru.

Зуев Андрей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: zueandrej@yandex.ru.

Ильин Павел Леонидович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: zub.dayu@mail.ru.

Карачев Евгений Васильевич – студент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: evgeshkarach@gmail.com.

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Южно-Уральского государственного университета, karachik@susu.ru.

Карпенко Анатолий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой систем автоматизированного проектирования МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: arkarpenk@mail.ru.

Киреев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского технологического университета МИСиС. E-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru.

Кирикова Анастасия Викторовна – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: anastasiakiricova52@gmail.com.

Кирьяцкий Евгений Эдуардович – кандидат физико-математических наук, доцент Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: jk@vgtu.lt.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: eduard.kiriyatzkii@mail.ru.

Киселева Ольга Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: Foxu03@yandex.ru.

Классен Роман Константинович – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных систем Казанского национального исследовательского технического университета имени А. Н. Туполева – КАИ. E-mail: klassen.rk@gmail.com.

Козлов Сергей Валерьевич – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: svkozlov1981@yandex.ru.

Козловская Наталья Юрьевна – специалист кафедры языковой подготовки белорусских и иностранных граждан Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by.

Конашенкова Татьяна Дмитриевна – ведущий программист Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: tkonazshenkova@ipiran.ru.

Кононова Александра Игоревна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и программного обеспечения вычислительных систем Московского института электронной техники (МИЭТ). E-mail: illinc@bk.ru.

Константинов Геннадий Владимирович – кандидат военных наук, начальник отдела научно-исследовательского центра Военной академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации. E-mail: conon777@yandex.ru.

Копысов Андрей Николаевич – заведующий кафедрой радиотехники Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: kan_kan@istu.ru

Корепанов Эдуард Рудольфович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: ekorpanov@ipiran.ru.

Коряшкина Александра Сергеевна – магистрант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского».

Костин Андрей Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ». E-mail: abkostin@yandex.ru.

Кравченко Кирилл Андреевич – студент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова. E-mail: wblacksto@gmail.ru.

Кристалинский Владимир Романович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru.

Курицын Сергей Юрьевич – старший преподаватель кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: KuritsynSergey@me.com.

Макаров Александр Ильич – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: al.makarov8@gmail.com.

Маминов Артем Дмитриевич – математик Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, магистрант МИЭМ НИУ ВШЭ. E-mail: artem_maminov@mail.ru.

Мастерков Юрий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и

приложений Владимирского государственного университета имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. E-mail: jura.masterkov@yandex.ru.

Махина Наталья Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского». E-mail: mahinanm@yandex.ru.

Мишинов Артем Игоревич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: 615153@mail.ru.

Мишина Наталья Сергеевна – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: nat3985362039@yandex.ru.

Мунерман Виктор Иосифович – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: vimoona@gmail.com.

Мунерман Даниил Викторович – стажер-исследователь, Смоленский государственный университет. E-mail: danvmoon@gmail.com.

Нагорная Татьяна Романовна – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com.

Нанкевич Алёна Анваровна – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: alyonka25lp@gmail.com.

Николаев Константин Сергеевич – магистрант программной инженерии искусственного интеллекта Московского института электронной техники. E-mail: knpreacher@gmail.com.

Овчинников Валерий Александрович – аспирант кафедры САПР МГТУ имени Н.Э. Баумана. E-mail: ovchinnikov.vadim.a@gmail.com.

Ольшанский Алексей Михайлович – кандидат технических наук, начальник сектора перспективных разработок проектно-конструкторского технического бюро Акционерного общества НИИ информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте. E-mail: lexolshans@gmail.com.

Охлупина Ольга Валентиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Брянского государственного инженерно-технологического университета. E-mail: helga131081@yandex.ru.

Павлюков Алексей Игоревич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: pavluickov@yandex.ru.

Парамонов Алексей Анатольевич – доктор технических наук, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов

Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: paramonov@mirea.ru.

Парфенова Елена Ивановна – магистрант института СПИНТех НИУ МИЭТ. E-mail: theirbis345@gmail.com.

Пешко Юлия Сергеевна – студентка физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: peshkojulia@gmail.com.

Попков Александр Евгеньевич – ассистент кафедры физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: a.e.porkov@yandex.ru.

Посыпкин Михаил Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: mposypkin@gmail.com.

Расулов Карим Магомедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahriman@yandex.ru.

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: rovba.ea@gmail.com.

Садекова Екатерина Халиловна – старший преподаватель кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ». E-mail: EKSadekova@mephi.ru.

Самойлова Татьяна Аркадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: tatsamoilova24@gmail.com.

Сенчилов Владислав Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: senchilov.vv@gmail.com.

Сенькина Гульжан Ержановна – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий, декан физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

Серая Галина Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского.

Синицын Игорь Николаевич – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, руководитель направления НИР Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: sinitsin@dol.ru.

Струнин Игорь Михайлович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: struninigor@mail.ru.

Суханова Анна Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета E-mail: Ann-Sukhanova@yandex.ru.

Тимофеева Наталья Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

Тимофеева Татьяна Игоревна – программист, НПО "Рубикон-инновация", г. Смоленск. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru.

Тихонов Иван Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. E-mail: ivtikh@mail.ru.

Тихонов Мартин Робертович – старший преподаватель института СПИНТех Московского института электронной техники. E-mail: kurotenshi91@yandex.ru.

Тихонова Ольга Вадимовна – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Российского технологического университета МИРЭА. E-mail: o_tikhonova@inbox.ru.

Усачев Валерий Игнатьевич – доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: usavi@yandex.ru.

Федотов Роман Александрович – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: romanfedotov6@yandex.ru.

Фомин Роман Андреевич – магистрант института СПИНТех, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» (МИЭТ). E-mail: roman.a.fomin@mail.ru.

Ходченков Валерий Юрьевич – студент физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tansdf@mail.ru.

Храпов Николай Павлович – и.о. научного сотрудника ИППИ РАН, аспирант Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: nkhrapov@gmail.com.

Царева Елена Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: elean@inbox.ru

Чукляев Илья Игоревич – доктор технических наук, профессор кафедры Военной академии войсковой противовоздушной обороны

Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А.М. Василевского. E-mail: smolrsu@mail.ru.

Чухляев Дмитрий Алексеевич – магистрант института СПИНТех, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники» (МИЭТ). E-mail: chukhlyaev.dmitry@mail.ru.

Шалагин Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных систем Казанского национального исследовательского технического университета имени А.Н.Туполева – КАИ. E-mail: sshalagin@mail.ru.

Шерстнева Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com.

Шерстюков Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИЯУ «МИФИ». E-mail: shervb73@gmail.com.

Шикула Ольга Сергеевна – старший преподаватель института СПИНТех Московского института электронной техники. E-mail: oshik78@mail.ru.

Шилягина Алла Михайловна – преподаватель кафедры иностранного языка Смоленского государственного университета. E-mail: ypy1101@gmail.com.

Шкуратова Александра Анатольевна – студентка физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: alexbelaya@mail.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1. Системы компьютерной математики	3
<i>Андрун А., Парамонов А.А., Тихонова О.В.</i> Компьютерные методы формирования сигналов для современных способов передачи информации	3
<i>Бондарь А.А.</i> Исследование алгоритма декодирования стираний с выбором	11
<i>Вишняков Р.Р.</i> Комбинированная многопараметрическая оптимизация в составе программного комплекса RF Systems Designer	19
<i>Григорян Л.А., Евдокимова Г.С.</i> Оценка уравнения регрессионной зависимости размера заработной платы от уровня образования	28
<i>Евдокимова Г.С., Мишина Н.С.</i> Применение нейронных сетей для прогноза численности безработных в ЦФО РФ	33
<i>Захаренков А.О., Евдокимова Г.С.</i> Сравнительный анализ языков ruby, r и python в вопросах анализа данных на примере задачи кластеризации	38
<i>Кравченко К.А., Благодатский Г.А., Копысов А.Н.</i> Разработка схемы и автоматизация консолидации баз данных с тройным идентификационным ключом для алгоритма эффективного управления системой когнитивного радио	44
<i>Кристалинский В.Р., Константинов Г.В.</i> О моделировании методов наведения зенитных управляемых ракет с помощью системы Wolfram Mathematica	52
<i>Суханова А.Г.</i> Многокритериальная оптимизация инвестиционного портфеля в системе Mathcad	58
<i>Тихонова О.В.</i> Об универсальности математических подходов в различных дисциплинах	63
<i>Усачев В.И., Григорян Л.А.</i> Проведение мета-анализа в пакете Stata	70
СЕКЦИЯ 2. Параллельные вычисления и многоядерные процессоры	75
<i>Аветисов Ю.Г.</i> Алгоритм оптимизации предварительного раскроя раската на сортовом прокатном стане	75
<i>Агасиев Т.А., Карпенко А.П.</i> Настройка алгоритмов решения серийных задач параметрической оптимизации	80
<i>Борисов В.В.</i> Опыт создания композиционных интеллектуальных моделей	88
<i>Гагарина Л.Г., Мастерков Ю.В., Доронина А.А., Фомин Р.А., Чухляев Д.А.</i> Исследование управляемости билинейных систем с неограниченным управлением	94
<i>Гончаров Е.И., Ильин П.Л.</i> Сравнение реализаций блочного алгоритма умножения многомерных матриц	102
<i>Городилов А.В., Кононова А.И.</i> Исследование развития раздачи торрента как	109

путь к эффективному управлению

<i>Диев О.Е.</i> Реализация симметричного горизонтального распределения в технологии базы данных и грид	116
<i>Довгерд Г.А., Ольшанский А.М.</i> К вопросу об управлении поведением ИНС Т. Кохонена	121
<i>Дроздов И.Б.</i> Выбор схемы балансировки нагрузки процессоров для алгоритма трассировки лучей	126
<i>Захаров В.Н.</i> Последние совместные программы соцстран в области информатики и вычислительной техники (новые алгоритмы и архитектуры обработки информации)	132
<i>Карпенко А.П., Овчинников В.А.</i> Синтез атакующего шума для глубоких нейросетевых классификаторов изображений	139
<i>Кирикова А.В., Миронов А.И., Мунерман В.И.</i> Метод композиции хеш-функций для оптимизации поиска изображений	147
<i>Классен Р.К.</i> Улучшение оценок для консервативной СУБД класса BIGDATA с регулярным планом обработки запросов	154
<i>Макаров А.И.</i> Проблема коэффициента информационной энтропии для нормального закона распределения	162
<i>Маминов А.Д., Посыпкин М.А.</i> Разработка библиотеки интервальной арифметики на языке Python	166
<i>Мунерман В.И., Мунерман Д.В.</i> Оптимизация процессов и операций массовой обработки данных	172
<i>Нанкевич А.А.</i> Лингвистическое моделирование для систем машинного перевода на примере научно-технических текстов	178
<i>Николаев К.С.</i> Применение современных параллельных технологий к решению задачи умножения многомерных матриц методом рекурсивного спуска	183
<i>Павлюков А.И.</i> Шейдерная геометрия, процесс получения колеблющейся травы	188
<i>Парфенова Е.И.</i> О функции, используемой в разработке редактора меню терминалов	193
<i>Самойлова Т.А., Грибер Ю.А.</i> Методология кластеризации в результатах экспериментального исследования цветовых ассоциаций разных культур	198
<i>Сенчилов В.В., Григорьева Г.М., Ходченков В.Ю.</i> О результатах пробного тестирования системы комплексного интеллектуального анализа медицинских данных	206
<i>Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.</i> Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений	213
<i>Струнин И.М.</i> Один метод повышения производительности вычислений в веб-браузере	221

<i>Храпов Н.П.</i> Применение имитационного моделирования для повышения эффективности выполнения эволюционного алгоритма на грид-системах из персональных компьютеров	225
<i>Чукляев И.И.</i> Интеллектуальная защита сложных организационно-технических систем	230
<i>Шалагин С.В.</i> Реализация параллельной сортировки массива чисел методом Хоара в архитектуре ПЛИС/FPGA	237
СЕКЦИЯ 3. Математика и её приложения	243
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> О минимальности гиперповерхностей Кириченко–Ускорева келеровых многообразий	243
<i>Беднаж В.А., Коряушкина А.С., Серая Г.В.</i> Описание корневых множеств аналитических в полуплоскости функций с заданной мажорантой в бесконечно удаленной точке	248
<i>Беляков П.В., Емельченков Е.П.</i> Анализ способов оптимизации запаса на складе для применения в технологии CALS	254
<i>Бирюкова Т.К., Гершкович М.М., Киреев В.И.</i> Применение интегродифференциальных параболических сплайнов в качестве функции активации в нейронных сетях на примере однослойного перцептрона	259
<i>Емельченков Е.П.</i> Инцидентностные структуры с дополнительными объектами	269
<i>Захаров Р.А.</i> О применении гауссовских процессов при классификации изображений	274
<i>Зуев А.М.</i> Функция суммы цифр натурального числа, заданная на арифметических прогрессиях	279
<i>Карачев Е.В., Благодатский Г.А.</i> Методы и инструменты исследования иерархической структуры показателей интеграции интернет-сообществ	283
<i>Карачик В.В.</i> О достаточных условиях разрешимости одного класса задач типа Неймана для полигармонического уравнения	291
<i>Кирьяцкий Э., Кирьяцкий Е.</i> Об одном классе многолистных функций	296
<i>Кирьяцкий Э., Кирьяцкий Е.</i> О некоторых экстремальных свойствах средних расстояний в евклидовом пространстве	300
<i>Курицын С.Ю., Расулов К.М.</i> О решении обобщенной задачи типа Римана для метааналитических функций первого типа	306
<i>Махина Н.М.</i> Ограниченность некоторых интегральных операторов в областях с кусочно-гладкими границами	312
<i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> О краевой задаче Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях	315
<i>Охлупина О.В.</i> Описание некоторых классов целых функций, имеющих	

экспоненциальный вес	320
<i>Попков А.Е., Расулов К.М.</i> О решении задачи Дирихле для квазигармонических функций в областях с аналитическими границами	325
<i>Ровба Е.А., Козловская Н.Ю.</i> Тригонометрический рациональный ряд для функции $ \sin x $	334
<i>Садекова Е.Х., Костин А.Б., Шерстюков В.Б.</i> О константах Фавара	339
<i>Тихонов И.В., Алмохамед Муатаз</i> Обобщенные экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений	345
СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании	354
<i>Акуленок М.В., Тихонов М.Р., Шикула О.С.</i> Разработка и применение адаптивного электронного тестирования в учебном процессе	354
<i>Андрианов А.М.</i> Об актуальности применения проектного обучения на примере проектного командного обучения (ПКО)	360
<i>Богданова Н.Н., Федотов Р.А.</i> Решение задач с параметрами с помощью СКМ Wolfram Mathematica	367
<i>Бояринов Д.А.</i> Индивидуальные образовательные траектории и образовательные карты	371
<i>Гомонов С.А.</i> О некоторых приемах генерирования итерационных последовательностей, приближающих алгебраические иррациональности поля \mathbb{R}	375
<i>Дюндин А.В.</i> Непрерывное изучение программ расчета конструкций в процессе обучения	383
<i>Евдокимова Г.С.</i> Использование компьютерных технологий как средства формирования математической компетентности студента	388
<i>Козлов С.В., Шкуратова А.А.</i> Особенности мониторинга образовательного пространства с использованием новых информационных технологий	393
<i>Пешко Ю.С., Киселева О.М.</i> Содержание и особенности демонстрационно-контролирующей программы «треугольники»	399
<i>Сенькина Г.Е.</i> Исследование профессиональной направленности и учебных предпочтений студентов направления бакалавриата «Педагогическое образование» на примере физико-математического факультета Смоленского государственного университета	404
<i>Тимофеева Н.М., Тимофеева Т.И.</i> Инфографика как средство цифровизации образования	410
<i>Царева Е.А.</i> Оптимизация лабораторного практикума по физике	415
<i>Шерстнёва Н.А.</i> Решение математических задач средствами системы	

компьютерной математики Wolfram Mathematica	422
<i>Шлягина А.М.</i> Практическая реализация системы проектирования дидактического информационного комплекса	427
Сведения об авторах	432

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 21

Издательство Смоленского государственного
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

Подписано к печати 21.04.2020. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. п. л. 28,15. Уч.-изд. л. 28,15. Тираж 120 экз.
Заказ №

Отпечатано с оригинал-макета авторов