

Министерство науки и высшего образования РФ  
Смоленский государственный университет

---

# **Системы компьютерной математики и их приложения**

*Материалы XX Международной научной конференции*

Выпуск 20  
Часть 2

Смоленск  
Издательство СмолГУ  
2019

УДК 621.396.218  
ББК 32.97  
С 409

*Печатается по решению  
редакционно-издательского  
совета СмолГУ*

**Редакционная коллегия:** *К.М. Расулов*, д-р физ.-мат. наук, проф. (ответственный редактор); *Н.Г. Анищенкова*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *С.А. Гомонов*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *Г.С. Евдокимова*, д-р пед. наук, проф.; *Е.П. Емельченков*, канд. физ.-мат. наук, доц.; *В.И. Мунерман*, канд. техн. наук, доц.; *Г.Е. Сенькина*, д-р пед. наук, проф.; *Н.М. Тимофеева*, канд. пед. наук, доц.; *И.В. Тихонов*, д-р физ.-мат. наук, проф.

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XX Международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. – Вып. 20. Ч. 2. – 228 с.  
ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XX Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 17–19 мая 2019 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218  
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,  
*продолжающееся издание*

© Авторы, 2019  
© Издательство СмолГУ, 2019

## СЕКЦИЯ 3

### Математика и её приложения

М.Б. Банару, Г.А. Банару

Смоленский государственный университет

УДК 514.76

#### КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(к юбилею Л.В. СТЕПАНОВОЙ)

Ключевые слова: *почти эрмитова структура, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность, структурные уравнения Картана.*

*Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на ориентируемой гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия, уточняются для случаев, когда многообразие является эрмитовым, а гиперповерхность – вполне омбилической или вполне геодезической.*

1. Уже давно известно, что между почти контактными метрическими и почти эрмитовыми (almost Hermitian, АН-) структурами существует теснейшая связь. В начале 60-х годов XX века японские геометры С. Сасаки и Й. Хатакеяма доказали [1; 2], что на прямом произведении почти контактного метрического многообразия и вещественной прямой внутренним образом индуцируется почти комплексная структура. Спустя некоторое время другой японский математик Й. Таширо заметил [3], что эта почти комплексная структура вкупе с метрикой прямого произведения задает на этом многообразии почти эрмитову структуру. Многообразие с такой структурой обычно называют линейным расширением данного почти контактного метрического многообразия [4].

Еще одним интереснейшим направлением изучения взаимосвязи двух важнейших дифференциально-геометрических структур – почти эрмитовой и почти контактной метрической – является исследование структур, индуцируемых на гиперповерхностях АН-многообразий. Значительными работами в этой области отметились многие известные геометры: В.Ф. Кириченко (Россия), М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, К. Яно (Япония), Д. Блэр, С. Голдберг (США). Особо

выделим диссертацию Л.В. Степановой [5], в которой были получены глубокие результаты по этой тематике. Основным результатом Л.В. Степановой в области контактной геометрии гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий, несомненно, являются структурные уравнения Картана для почти контактной метрической структуры, которая индуцируется на ориентируемой гиперповерхности произвольного АН-многообразия. Этот результат позволил Л.В. Степановой, а затем и другим авторам получить множество сведений о различных видах почти контактных метрических структур (косимплектической, слабо косимплектической, почти косимплектической, сасакиевой, квазисасакиевой, кенмоцевой и др.) на гиперповерхностях АН-многообразий, принадлежащих различным классам Грея-Хервеллы. Существенные результаты, полученные в этой области до 2012 года различными специалистами, в основном отражены в обзоре М.Б. Банару и В.Ф. Кириченко [6], а из более поздних работ выделим две статьи [7; 8], к которым Л.В. Степанова имеет непосредственное отношение.

В настоящей работе структурные уравнения, полученные Л.В. Степановой, детализируются для нескольких важных случаев, а именно для случаев вполне геодезической и вполне омбилической гиперповерхностей эрмитова многообразия (то есть АН-многообразия с интегрируемой почти комплексной структурой).

2. Напомним, что четверка тензорных полей  $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$  на нечетномерном многообразии  $N$  называется почти контактной метрической структурой на этом многообразии, если для нее выполняются такие условия [4]:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N). \end{aligned}$$

Здесь  $\xi$  – структурный вектор,  $\Phi$  – поле тензора типа (1,1),  $\eta$  – структурная форма,  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика,  $\mathfrak{N}(N)$  – модуль  $C^\infty$ -гладких векторных полей на многообразии  $N$ .

Также напомним [4], что пару  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  называют почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии  $M^{2n}$ , если  $J$  – почти комплексная структура, а  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  – риманова метрика на этом многообразии. При этом для  $J$  и  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  должно выполняться такое равенство

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Тут  $\mathfrak{N}(M^{2n})$  – модуль  $C^\infty$ -гладких векторных полей на многообразии  $M^{2n}$ . Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитова структура, называется почти эрмитовым многообразием. В том случае, когда почти

комплексная структура на многообразии является интегрируемой, то есть  $J$  является оператором Нейенхейса [4], почти эрмитово многообразии называют эрмитовым.

Рассмотрим произвольное почти эрмитово многообразие  $(M^{2n}, \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\})$ . Зафиксируем на нем точку  $p$ . Пусть  $T_p(M^{2n})$  – пространство, касательное к данному многообразию  $M^{2n}$  в точке  $p$ ,  $\{J_p, g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  – почти эрмитова структура, порожденная первоначальной структурой  $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ . Конструкция адаптированных почти эрмитовой структуре реперов (их чаще всего называют А-реперами) в естественной комплексификации касательного пространства такова:

$$(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}).$$

Здесь  $\varepsilon_a$  – собственные векторы оператора почти комплексной структуры, которые соответствуют собственному значению оператора  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\varepsilon_{\hat{a}}$  – собственные векторы, которые соответствуют собственному значению  $-i$ . В данном случае индекс  $a$  принимает значения от 1 до  $n$ ;  $\hat{a} = a + n$ .

**3.** Как мы уже упоминали выше, Л.В. Степановой около 25 лет назад была доказана [5] следующая фундаментальная

**Теорема.** *Первая группа структурных уравнений Кармана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \\ &+ (\sqrt{2} B^{an}{}_b + i\sigma_b^a) \omega^b \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}^{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{ab}{}_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{abn} + i\sigma^{ab}) \omega_b \wedge \omega ; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \\ &+ (\sqrt{2} B_{an}{}^b - i\sigma_a^b) \omega_b \wedge \omega + (-\sqrt{2} \tilde{B}_{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{abn} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ab}{}^n - i\sigma_{ab}) \omega^b \wedge \omega ; \\ d\omega &= \sqrt{2} B_{nab} \omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{2} B^{nab} \omega_a \wedge \omega_b + \\ &+ (\sqrt{2} B^{na}{}_b - \sqrt{2} B_{nb}{}^a - 2i\sigma_b^a) \omega^b \wedge \omega_a + \\ &+ (\tilde{B}_{nbn} + B_{nb}{}^n + i\sigma_{nb}) \omega \wedge \omega^b + (\tilde{B}^{nbn} + B^{nb}{}_n - i\sigma_n^b) \omega \wedge \omega_b , \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J_{b,c}^a, \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}.$$

Отметим, что через  $\{J_{k,m}^j\}$  обозначены компоненты  $\nabla J$ , а системы функций  $\{B^{abc}\}$ ,  $\{B_{abc}\}$  и  $\{B^{ab}{}_c\}$ ,  $\{B_{ab}{}^c\}$  представляют собой компоненты тензоров Кириченко АН-структуры на многообразии  $M^{2n}$ . Также отметим, что  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n$ ;  $\hat{a} = a + n$ ;  $\sigma$  – вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности  $N^{2n-1}$  в АН-

многообразии  $M^{2n}$ ;  $\{\omega^\alpha\}, \{\omega_\alpha\}$  – компоненты форм смещения ( $\omega^n = \omega$ );  $\omega_\alpha = \omega^{\bar{\alpha}}$ .

Поскольку для эрмитова многообразия все компоненты структурных тензоров Кириченко  $\{B^{abc}\}$  и  $\{B_{abc}\}$  обращаются в нуль [9; 10], то справедливо

**Предложение 1.** *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности эрмитова многообразия имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \left(\sqrt{2}B^{cn}{}_\beta + i\sigma_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \left(\sqrt{2}B_{cn}{}^\beta - i\sigma_\alpha^\beta\right)\omega_\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega; \end{aligned} \quad (2)$$

$$d\omega = \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\sigma_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(B_{n\beta}{}^n + i\sigma_{n\beta}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(B^{n\beta}{}_n - i\sigma_n^\beta\right)\omega \wedge \omega_\beta.$$

Выделим ещё два важных частных случая. Пусть гиперповерхность эрмитова многообразия является вполне омбилической, то есть ее вторая квадратичная форма пропорциональна метрике:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad \lambda - const.$$

Используя вид матрицы контравариантного метрического тензора [5]

$$(g^{ps}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем

**Предложение 2.** *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой вполне омбилической гиперповерхности эрмитова многообразия имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \left(\sqrt{2}B^{cn}{}_\beta + i\lambda\delta_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n \omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \left(\sqrt{2}B_{cn}{}^\beta - i\lambda\delta_\alpha^\beta\right)\omega_\beta \wedge \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n \omega^\beta \wedge \omega; \end{aligned} \quad (3)$$

$$d\omega = \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\lambda\delta_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + B_{n\beta}{}^n \omega \wedge \omega^\beta + B^{n\beta}{}_n \omega \wedge \omega_\beta.$$

Наконец, пусть гиперповерхность эрмитова многообразия является вполне геодезической, то есть ее вторая квадратичная форма в каждой точке этой гиперповерхности обращается в нуль. В этом случае получаем следующее.

**Предложение 3.** *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой вполне*

геодезической гиперповерхности эрмитова многообразия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 d\omega^\alpha &= \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \sqrt{2}B^{an}{}_\beta \omega^\beta \wedge \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n \omega_\beta \wedge \omega; \\
 d\omega_\alpha &= -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B_{cn}{}^\beta \omega_\beta \wedge \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n \omega^\beta \wedge \omega; \\
 d\omega &= \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + B_{n\beta}{}^n \omega \wedge \omega^\beta + B^{n\beta}{}_n \omega \wedge \omega_\beta.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Понятно, что структурные уравнения (2–4) открывают путь к детальному исследованию не только почти контактных метрических гиперповерхностей эрмитовых многообразий, но и гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий классов  $W_3$  и  $W_4$  (в классификации Грея -Хервеллы), которые наряду с келеровыми многообразиями входят в класс эрмитовых многообразий.

Авторы выражают искреннюю признательность А.Р. Рустанову за его замечания, которые были учтены при подготовке данной работы.

### Литература

1. Sasaki S., Hatakeyama Y. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures // Tôhoku Math. J. 1961. Vol.13, № 2. P. 281-294.
2. Sasaki S., Hatakeyama Y. On differentiable manifolds with contact metric structures // J. Math. Soc. Japan. 1962. Vol.14. P. 249-271.
3. Tashiro Y. On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds. I // Tôhoku Math. J. 1963. Vol.15, № 1. P.62-78.
4. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458с.
5. Степанова Л.В. Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МПГУ им. В.И. Ленина, 1995.
6. Banaru M.B., Kirichenko V.F. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci., New York. 2015. Vol. 207, No 4. P. 513-537.
7. Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б. О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. №1. С. 86-89.
8. Степанова Л.В., Банару М.Б., Банару Г.А. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т.15. С. 815-822.
9. Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci., New York. 2015. Vol.207, № 3. P. 354-388.
10. Banaru M.A note on six-dimensional G1-submanifolds of the octave algebra // Taiwanese J. Math. 2002. Vol.6. № 3. P. 383-388.

**M.B. Banaru, G.A. Banaru**  
**Smolensk State University**

## CONTACT GEOMETRY OF HYPERSURFACES OF HERMITIAN MANIFOLDS

**Keywords:** *almost Hermitian structure, almost contact metric structure, hypersurface, Cartan structural equations.*

**Abstract.** *The Cartan structural equation of the almost contact metric structure induced on an oriented hypersurface in an almost Hermitian manifold are revised for the case when the manifold is Hermitian and the hypersurface is totally umbilical or totally geodesic.*

Т.К. БИРЮКОВА<sup>1</sup>, В.И. КИРЕЕВ<sup>2</sup>, М.М. ГЕРШКОВИЧ<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

<sup>2</sup> НИТУ МИСиС, г. Москва

УДК 519.6

### ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕТОДА ПОДОБИЯ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ключевые слова: *аппроксимационный оператор, теорема Коши, теорема Лагранжа, формула Коши, формула Лагранжа, среднее значение функции, теорема о среднем значении, интегральная сумма Римана, сплайн, сплайн-функция, сплайн-метод, фрактал, численное дифференцирование, численное интегрирование, квадратурная формула, интегродифференциальный, сеточная функция.*

*В статье рассматриваются возможности применения разработанного авторами метода подобия аппроксимационных операторов к классическим теоремам Коши и Лагранжа о среднем значении с получением соотношений, связывающих определенные интегралы на отрезке и значения функций на соответствующем интервале. На основе указанных соотношений выведены новые формулы приближенного вычисления определенных интегралов. Приведен механизм получения подобных кинематических уравнений.*

*Отмечено, что формулы, получающиеся друг из друга на основе принципа подобия, можно рассматривать как фракталы, а метод их построения – как фрактальный алгоритм.*

В докладе [1] на конференции СКМП-2018 был сформулирован принцип подобия аппроксимационных операторов применительно к задачам приближения сеточных функций, производных и интегралов как



обобщение разработанных авторами интегродифференциальных методов аппроксимации.

Использование этого принципа совместно с предложенным авторами интегродифференциальным методом теории приближений [2, 3] позволило получить новые классы аппроксимационных явных и неявных операторов численного дифференцирования и интегрирования, численных схем решения дифференциальных уравнений [1-3].

В данной статье в развитии [1] рассматриваются возможности применения указанного принципа подобия к классическим теоремам Коши и Лагранжа о среднем значении с получением соотношений, связывающих определенные интегралы на отрезке и значения функций на соответствующем интервале. На их основе выведены новые формулы приближенного вычисления определенных интегралов.

Следует отметить, что формулы, получающиеся друг из друга на основе принципа подобия, можно рассматривать как фракталы, а метод их построения (подробно описанный в [1]) – как фрактальный алгоритм.

Для иллюстрации приведен механизм получения подобных кинематических уравнений движения материальной точки.

Принцип подобия аппроксимационных операторов предусматривает запись операторов численного дифференцирования не через значения сеточных функций  $f_i = f(x_i)$  в узлах сетки  $x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , а через их приращения  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ . Дадим краткие пояснения.

Например, на четырехточечном шаблоне  $(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  аппроксимационный явный (или локальный) оператор для первой производной  $f'_{i-2}$  в левой крайней точке  $x_{i-2}$  шаблона записывается так:

$$\hat{f}'_{i-2} = \frac{1}{6h} (-2f_{i-2} - 3f_{i-1} + 6f_i - f_{i+1}). \quad (1)$$

Этот оператор через приращения переписывается в виде:

$$\hat{f}'_{i-2} = \frac{1}{6h} (-\Delta f_i + 5\Delta f_{i-1} + 2\Delta f_{i-2}). \quad (2)$$

Тогда, основываясь на принципе подобия [1], путем уменьшения порядка производной в левой и правой частях последнего оператора получим оператор восстановления функции по значениям определенных интегралов:

$$\hat{f}_{i-2} = \frac{1}{6h} (-I_i^{i+1} + 5I_{i-1}^i + 2I_{i-2}^{i-1}). \quad (3)$$

Здесь, по сравнению с формулой (2), вместо приращений функций  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  записаны соответствующие приращения первообразных  $I_i^{i+1} = \Delta F_i = F_{i+1} - F_i$  ( $F(x)$  – первообразная функция,  $F_i = F(x_i)$ ).

Перейдем теперь к обобщению формул, соответствующих классическим теоремам Коши и Лагранжа.

В математическом анализе для функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемых на интервале  $(a, b)$ , весьма значимыми являются теоремы о среднем значении Коши и Лагранжа. Так, для

функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , удовлетворяющих указанным условиям, теорема Коши сводится к соотношению, связывающему отношение разности значений функций с отношением значений их производных:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4)$$

Здесь точка  $x = c$  принадлежит интервалу  $(a, b)$ .

Следствием формулы (4) является классическая формула Лагранжа о конечном приращении, которая для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемой на интервале  $(a, b)$ , имеет вид:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b. \quad (5)$$

Если формулу (4) записать для первообразных  $F(x)$  и  $G(x)$ , соответствующих функциям  $f(x)$  и  $g(x)$ , то получится формула, подобная формуле (4):

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{I_a^b(f)}{I_a^b(g)} = \frac{f(c)}{g(c)}, \quad (6)$$

где  $I_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx$ ,  $I_a^b(g) = \int_a^b g(x)dx$ .

Формула (6) связывает отношение определенных интегралов с отношением средних значений функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на интервале  $(a, b)$ , и поэтому для выполнения соотношения (6) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  должны быть непрерывными на отрезке  $[a, b]$ , но могут не быть дифференцируемыми на интервале  $(a, b)$ , то есть используется более слабое условие, чем в теореме Коши.

Если в качестве  $g(x)$  взять константу  $g(x) = 1$ , то интеграл  $I_a^b(g) = \int_a^b dx = b - a$  и формула (6) принимает вид:  $I_a^b(f) = f(c)(b - a)$ . (Подчеркнем, что данная формула является подобной формуле Лагранжа, записанной для первообразной).

Для приближенного вычисления интеграла перепишем последнее соотношение применительно к отрезку  $[x_i, x_{i+1}]$  и будем считать  $c = x_{i+0.5}$  (здесь  $x_{i+0.5}$  – середина отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ :  $x_{i+0.5} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ). Тогда получим классическую квадратурную формулу прямоугольников:  $I_i^{i+1} = f_{i+0.5} \cdot h_{i+1}$  (где  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ ,  $f_{i+0.5} = f(x_{i+0.5})$ ), имеющую третий порядок аппроксимации относительно шага  $h_{i+1}$ .

Формуле Лагранжа (5), соответствующей теореме о конечном приращении, также могут быть сопоставлены подобные (фрактальные) формулы, применяемые в физике.

Переписывая формулу (5) для отрезка  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , получаем выражение:

$$\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x, \quad x_0 < c < x_0 + \Delta x. \quad (7)$$

Построим для этой формулы подобные ей физические формулы (из области кинематики). Вместо переменной  $x$  возьмем время  $t$  и в

качестве функции  $f$  – путь  $s(t)$  (рассматривается равномерное прямолинейное движение). Тогда приращению  $\Delta x$  будет соответствовать интервал времени  $\Delta t$ , а производной  $f'(x)$  – скорость  $V(t) = \text{const}$ . Тогда при выполнении условий теоремы Лагранжа вместо соотношения (7) получится соотношение

$$\Delta s = V \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Из (8) для промежутка времени  $\Delta t = t - t_0$  следует формула:  $s = s_0 + V(t - t_0)$ , описывающая равномерное прямолинейное движение.

Применяя к формуле (8) принцип подобия еще раз, т.е. увеличивая порядок производной в этом соотношении на единицу, получим формулу для приращения скорости:  $\Delta V = V' \cdot \Delta t$  или для  $\Delta t = t - t_0$ :  $V = V_0 + a(t - t_0)$ , где  $a = V'$  – ускорение. Таким образом, получена формула скорости тела при равноускоренном прямолинейном движении.

Процесс построения данной группы физических формул может быть продолжен. В следующем по порядку соотношении получится формула для приращения ускорения тела. Подчеркнем, что в соответствии с принципом подобия [1] группа подобия может строиться не только в направлении повышения порядка производной, но и в направлении понижения. Например, если в формуле (7) понизить порядок производной на единицу и точку  $x = c$  совместить с серединой отрезка  $[x, x + \Delta x]$  (для приближенных вычислений), величину  $\Delta x$  обозначить  $h_{i+1}$ , то получается указанная выше формула прямоугольников:  $I_i^{i+1} = f_{i+0.5} \cdot h_{i+1}$ .

Если группу подобия выстраивать по этой квадратурной формуле, взяв ее в качестве базовой, то при последовательном повышении порядка производной из нее получится как теорема Лагранжа, так и приведенные выше формулы физики. Таким образом, предложенный авторами принцип подобия аппроксимационных операторов имеет фрактальный характер и замыкает или соединяет формулы классической математики, численных методов и кинематические уравнения в физике.

Кроме того, приведем еще две подобные формулы, одна из которых является классической интегральной суммой Римана, равной определенному интегралу на отрезке  $[a, b]$ , а другая, подобная ей, получается путем повышения порядка производной на единицу. Эти две подобные формулы имеют вид:

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

(здесь  $a = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$ ,  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ );

$$f(b) - f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f'(x) dx.$$

Последнюю формулу, которая до настоящего времени в математическом (в частности в численном) анализе не применялась, в

настоящей работе предлагается использовать в качестве интегральной нормы для контроля точности вычисления производных с использованием локальных или глобальных формул численного дифференцирования (см. [2]). При этом символ предела отбрасывается, и формула контроля точности вычисления производных становится приближенной:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \Delta x_i \approx f(b) - f(a).$$

Теперь рассмотрим применение формулы (6), полученной путем обобщения теоремы Коши, для построения явного оператора и неявного способа вычисления определенного интеграла. Явная весовая квадратурная формула имеет следующий вид:

$$I_i^{i+1}(f) = I_i^{i+1}(g) \frac{f(c)}{g(c)}, \quad (9)$$

где  $I_i^{i+1}(f)$  – искомый на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  интеграл от некоторой сеточной функции  $f(x_i)$ , а  $g(x)$  – некоторая произвольная весовая (возможно, формульная) функция, интеграл от которой вычисляется либо точно, либо по некоторой квадратурной формуле. Точку  $x = c$  для приближенного вычисления интеграла выберем в середине отрезка, т.е.  $c = x_{i+0,5}$ . Разложение первообразной  $F_{i+1}$  и  $F_i$  относительно средней точки  $c = x_{i+0,5}$  показывает, что эта формула имеет третий порядок аппроксимации с остаточным слагаемым:

$$\frac{h^3}{24} \left( \frac{g''(\xi)}{g_{i+0,5}} f_{i+0,5} - f''(\xi) \right).$$

Здесь учтено, что интеграл  $I_i^{i+1}(g)$  заменяется формулой прямоугольников с остаточным слагаемым  $\frac{h^3}{24} g''(\xi)$ .

Во втором варианте построения квадратурной формулы для вычисления интеграла строится итерационная формула, в которой в качестве функции  $g(x)$  принимается звено параболического интегродифференциального сплайна [2]:

$$S_2(x) = \frac{1}{h} P_{2,i}(u) I_i^{i+1} + P_{2,i}(u) f_i + P_{2,i+1}(u) f_{i+1},$$

аппроксимирующей интегрируемую функцию  $f(x_i)$ . В данной формуле используются следующие обозначения:

$$u = \frac{x-x_i}{h}, P_{2,i} = 6u(1-u), P_{2,i} = (1-u)(1-3u), P_{2,i+1} = u(3u-2).$$

Значение многочлена  $S_2(x)$  берется в средней точке отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ , на котором вычисляется интеграл. Вместо интеграла  $I_i^{i+1}(g)$  в итерационной формуле принимается предыдущее приближение искомого интеграла. В результате перечисленных замен получается следующая итерационная формула:

$$I_i^{i+1(k+1)}(f) = I_i^{i+1(k)}(f) \frac{f(x_{i+0,5})}{S_2(x_{i+0,5})}. \quad (10)$$

В первом приближении  $k = 0$  искомый интеграл вычисляется по формуле прямоугольников. Итерационная формула (10) апробирована при расчете интеграла от простейших формульных функций. Расчеты свидетельствуют о сходимости итерационного процесса. Например, для интеграла от функции  $\sin x$  на отрезке  $[0, \pi/2]$  получены следующие приближения.

$k$	1	2	3	4
$I_0^{\pi/2}$	0,969(0,031)	1,0146(0,015)	0,998(0,002)	0,9983(0,0017)

В первой строке этой таблицы указан  $k$  – номер приближения, во второй – значения интегралов, полученные по итерационной формуле (10). В скобках в этой строке приведены абсолютные погрешности полученных приближений.

### Литература

1. Бiryukova Т.К., Kireev В.И., Gershkovich М.М. Применение принципа подобия аппроксимационных операторов к задачам приближения сеточных функций // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2018): материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета Смоленского государственного университета (Смоленск, 18–20 мая 2018). Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 230–243.
2. Kireev В.И., Biryukova Т.К. Интегродифференциальный метод обработки информации и его применение в численном анализе. М.: ИПИ РАН, 2014. 267 с.
3. Kireev В.И., Pantel'ev А.В. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.

**T.K. Biryukova<sup>1</sup>, V.I. Kireev<sup>2</sup>, M.M. Gershkovich<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup>The Institute of Informatics Problems of the Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow

<sup>2</sup> MISIS National University of Science and Technology, Moscow

### CLASSIC MEAN VALUE THEOREMS AND CINEMATIC EQUATIONS REVISITED BY MEANS OF SIMILARITY METHOD FOR APPROXIMATION OPERATORS

**Keywords:** *approximation operator, spline, Cauchy's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's formula, Lagrange's formula, mean value of a function, mean value theorem, Riemann sum for an integral, spline-function, spline-method, fractal, numerical differentiation, numerical integration, quadrature formula, integrodifferential, mesh function.*

**Abstract.** *We apply the newly described similarity principle of approximation operators to revisit classic Cauchy and Lagrange mean value theorems.*

*This approach yielded relations between definite integral on the section and functions values on corresponding open interval.*

*Using these relations, we deduce new formulas for approximate calculation of definite integral.*

*The method for deducing similar cinematic equations is described.*

*The formulas deduced using a similarity method might be considered to be fractals, while method for its deducing to be a fractal algorithm.*

**Ю.М. Вувуникян**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы*

УДК 517.988

## **ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМНЫХ КВАЗИОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ**

*Ключевые слова: системные эволюционные операторы, обобщенные спектральные характеристики системных эволюционных операторов, левый системный квазиобратный оператор, правый системный квазиобратный оператор.*

*Для системных эволюционных операторов произвольной кратности вводятся понятия левого системного квазиобратного, правого системного квазиобратного и двухстороннего системного квазиобратного операторов произвольной степени. Найдены условия существования у системного оператора с обобщенными характеристиками правых системных квазиобратных операторов любой степени. Доказываются общие соотношения, позволяющие по обобщенным спектральным характеристикам исходного системного оператора рекурсивно находить обобщенные спектральные характеристики левого и правого системных квазиобратных операторов.*

**1.** В работе мы вводим понятие системного квазиобратного оператора и исследуем задачу построения системного квазиобратного оператора в терминах спектральных характеристик исходного системного эволюционного оператора.

Пусть  $X$  – пространство обобщенных функций экспоненциального роста с носителями на замкнутой положительной полуоси [4; 5].

Рассмотрим системные эволюционные операторы произвольной кратности, действующие из пространства  $X^p$  в пространство  $X^q$ .

Введем понятие системного квазиобратного оператора к таким операторам.

Пусть  $A: X^p \rightarrow X^q$  – системный эволюционный оператор:

$$Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|} (a_\alpha * x^{\otimes \alpha}) \quad (x \in X^v),$$

$B: X^q \rightarrow X^p$   $B$  – полиномиальный системный оператор степени  $r$ :

$$Bx = \sum_{|\beta|=1}^r S_{|\beta|} (b_\beta * x^{\otimes \beta}) \quad (x \in X^v).$$

И пусть  $C$  – системный оператор, действующий из пространства  $X^p$  в пространство  $X^p$  и являющийся произведением операторов  $B$  и  $A$ , т.е.  $C = B \cdot A$ , а  $F$  – системный оператор, действующий из пространства  $X^q$  в пространство  $X^q$  и являющийся произведением системных операторов  $A$  и  $B$ , т.е.  $F = A \cdot B$ .

Оператор  $B$  называется **левым системным квазиобратным** степени  $r$  к системному оператору  $A$ , если

$$C = I_p + \sum_{|\alpha| \geq r+1}^{+\infty} C_\alpha, \quad (1)$$

где  $I_p$  – тождественный оператор, действующий в пространстве  $X^p$ , т.е.

$$\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p, \text{ и } C_\alpha = 0 \text{ при } 2 \leq |\alpha| \leq r.$$

Оператор  $B$  называется **правым системным квазиобратным** степени  $r$  к системному оператору  $A$ , если

$$F = I_q + \sum_{|\alpha| \geq r+1}^{+\infty} F_\alpha, \quad (2)$$

где  $I_q$  – тождественный оператор, действующий в пространстве  $X^q$ , т.е.

$$\sum_{|\alpha|=1} F_\alpha = I_q, \text{ и } F_\alpha = 0 \text{ при } 2 \leq |\alpha| \leq r.$$

В случае, когда  $p = q$ , можно ввести понятие системным квазиобратным степени  $r$ : оператор  $B$  называется **системным квазиобратным** степени  $r$  к оператору  $A$ , если он одновременно является левым и правым системным квазиобратным степени  $r$  к системному оператору  $A$ .

2. Пусть  $\tilde{X}$  – дуальное по Лапласу пространство к пространству  $X$ ,  $(\tilde{a}_\alpha)$ ,  $(\tilde{b}_\beta)_{|\beta|=1}^r$ ,  $(\tilde{c}_\alpha)$ ,  $(\tilde{f}_\alpha)$  – системы обобщенных спектральных характеристик (являющихся обобщенными преобразованиями Лапласа импульсных характеристик) системных операторов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$  соответственно.



Из условия  $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p$  получаем:  $\alpha = e_k$  ( $k = \overline{1; p}$ ), где  $e_k$  – вектор,  $k$ -я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0.

Тогда условие  $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p$  равносильно условию  $\sum_{k=1}^p C_{e_k} = I_p$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^p \tilde{c}_{e_k}(\lambda) \tilde{x}(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) \quad (x \in X^p). \quad (3)$$

Рассматриваемое условие (3) эквивалентно системе

$$\tilde{c}_{e_k, m}(\lambda) = \delta_{k, m} \quad (m = \overline{1; p}), \quad (4)$$

где  $\tilde{c}_{e_k, m}$  –  $m$ -я компонента вектор-функции  $\tilde{c}_{e_k}$ , а  $\delta_{k, m}$  – символ Кронекера. Таким образом, оператор  $B$  является системным левым квазиобратным степени  $r$  к оператору  $A$ , если выполнены условия (4) и условие

$$\tilde{c}_\alpha = 0 \quad (2 \leq |\alpha| \leq r). \quad (5)$$

Полагая в общей формуле композиции системных операторов  $\alpha = e_k$ , учитывая, что  $|\alpha| = |e_k| = 1$ , и, значит,  $m = 1$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha^1 = \alpha = e_k$ , получаем следующее равенство:

$$\tilde{c}_{e_k}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1} \tilde{b}_\beta(\lambda) \prod_{j=1}^q \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \sum_{j=1}^p \tilde{b}_{e_j}(\lambda) \tilde{a}_{e_k, j}(\lambda). \quad (6)$$

Таким образом, в силу равенства (6) имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^p \tilde{b}_{e_j}(\lambda) \tilde{a}_{e_k, j}(\lambda) = \delta_{k, m} \quad (k, m = 1; 2; \dots; p). \quad (7)$$

Введем вспомогательные матрицы

$$\tilde{A}(\lambda) = \left( \tilde{a}_{e_k, j}(\lambda) \right)_{k, j=1}^{p, q}, \quad \tilde{B}(\lambda) = \left( \tilde{b}_{e_j, m}(\lambda) \right)_{j, m=1}^{q, p}, \quad \tilde{I}_p = \left( \delta_{k, m} \right)_{k, m=1}^p.$$

Тогда систему линейных уравнений (7) можно записать в виде:

$$\tilde{B}(\lambda) \tilde{A}(\lambda) = \tilde{I}. \quad (8)$$

Из полученного равенства следует, что для любого  $\lambda \in \Pi_c$  матрица  $\tilde{B}(\lambda)$  является левой обратной к матрице  $\tilde{A}(\lambda)$ . В этом случае мы будем говорить, что матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима слева.

Если матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима слева, то из матричной функции  $\tilde{B}(\lambda)$  определяются все компоненты спектральных характеристик  $\tilde{b}_\beta$  для любых  $|\beta| = 1$ .



Рассмотрим теперь условие  $C_\alpha = 0$  при  $2 \leq |\alpha| \leq r$ . Согласно теореме композиции при  $|\alpha| = \overline{2; r}$  имеем:  $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Pi_c^n$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha, m}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^m|) \prod_{j=1}^v \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = 0.$$

Отделяя в рассматриваемой сумме слагаемое при  $m = n$  и учитывая, что тогда  $|\beta| = n$ ,

$$\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n), |\alpha^1| = |\alpha^2| = \dots = |\alpha^n| = 1,$$

в силу того, что  $|\alpha^1|, |\alpha^2|, \dots, |\alpha^n| \geq 1$  и  $|\alpha^1| + |\alpha^2| + \dots + |\alpha^n| = n$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{|\beta|=n} \sum_{\substack{\alpha = \alpha^1 + \dots + \alpha^n \\ |\alpha^1| = \dots = |\alpha^n| = 1}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^n|) \prod_{j=1}^p \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \\ & = - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha, m}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^m|) \prod_{j=1}^p \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, если  $B$  – правый системный квазиобратный степени  $r$  к оператору  $A$ , то выполнены следующие условия:

$$\tilde{f}_{e_k, m}(\lambda) = \delta_{k, m} \quad (k, m = \overline{1; q}), \quad (10)$$

$$\tilde{f}_\alpha = 0 \quad (2 \leq |\alpha| \leq r). \quad (11)$$

Полагая в общей формуле композиции  $\alpha = e_k$ , учитывая, что  $|\alpha| = |e_k| = 1$ , и, следовательно,  $m = 1$ ,  $\vec{\alpha} = \alpha^1 = \alpha = e_k$ , имеем:

$$\tilde{f}_{e_k}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1} \tilde{a}_\beta(\lambda) \prod_{j=1}^q \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \sum_{j=1}^q \tilde{a}_{e_j}(\lambda) \tilde{b}_{e_k, j}(\lambda).$$

Тогда в силу условия (10) получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^q \tilde{a}_{e_j, m}(\lambda) \tilde{b}_{e_k, j}(\lambda) = \delta_{k, m} \quad (k, m = \overline{1; q}). \quad (12)$$

С помощью матриц

$$\tilde{A}(\lambda) = \left( \tilde{a}_{e_k, j}(\lambda) \right)_{k, j=1}^{p, q}, \quad \tilde{B}(\lambda) = \left( \tilde{b}_{e_j, m}(\lambda) \right)_{j, m=1}^{q, p}, \quad \tilde{I}_q = \left( \delta_{k, m} \right)_{k, m=1}^q.$$

система уравнений (12) запишется в следующем виде:

$$\tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) = \tilde{I}_q,$$

откуда следует, что матрица  $\tilde{B}(\lambda)$  является правой обратной к матрице  $\tilde{A}(\lambda)$ . В случае, когда оператор  $B$  является одновременно левым и правым квазиобратным системным оператором, из полученных

соотношений следует, что матрица  $\tilde{B}(\lambda)$  является обратной к матрице  $\tilde{A}(\lambda)$ .

Таким образом, если матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима, то из системы (11) определяются все компоненты спектральных характеристик  $\tilde{b}_\beta$  для любых  $|\beta|=1$ .

Рассмотрим условие (11) при  $|\alpha|=n$ , где  $2 \leq n \leq r$ . Тогда для любых  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Pi_c^n$  справедливо следующее равенство:

$$\sum_{m=1}^n \sum_{|\beta|=m} \sum_{\tilde{\alpha} \in \Xi_{\alpha, m}} \tilde{a}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^m|) \prod_{j=1}^q \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = 0.$$

Выделяя первое слагаемое и учитывая, что  $\tilde{\alpha} = \alpha^1 = \alpha$ , имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\beta|=1} \tilde{a}_\beta(\lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \prod_{j=1}^q \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha, j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \\ & = - \sum_{m=2}^n \sum_{|\beta|=m} \sum_{\tilde{\alpha} \in \Xi_{\alpha, m}} \tilde{a}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^m|) \prod_{j=1}^q \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j}, j}(\lambda^{m_j+k_j}). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что в силу того, что при  $m \geq 2$ ,  $|\alpha^1|, |\alpha^2|, \dots, |\alpha^m| \geq 1$  и  $|\alpha^1| + |\alpha^2| + \dots + |\alpha^m| = n$ , то  $|\alpha^1|, |\alpha^2|, \dots, |\alpha^m| \leq n-1$ , и значит, правая часть равенства (13) не содержит  $\tilde{b}_{\alpha, j}$  при  $|\alpha|=n$ .

Кроме того, так как  $|\beta|=1$ , то  $\beta = e_j$ , и значит, равенство (13) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^q \tilde{a}_{e_j}(\lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) \tilde{b}_{\alpha, j}(\lambda) = f(\lambda), \quad (14)$$

где через  $f(\lambda)$  обозначена правая часть равенства (13).

Обозначая  $\lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  через  $\hat{\lambda}$  и замечая, что матрица  $\tilde{A}(\hat{\lambda})$  состоит из векторов  $\tilde{a}_{e_j}(\hat{\lambda})$  ( $j=1; 2; \dots; q$ ), запишем систему линейных уравнений (13) в следующем виде:

$$\tilde{A}(\hat{\lambda}) \tilde{b}_\beta(\lambda) = f(\lambda), \quad (15)$$

и значит, если матричная функция  $\tilde{A}(\hat{\lambda})$  обратима справа, то обобщенные спектральные характеристики  $\tilde{b}_\alpha$  системного квазиобратного справа оператора при  $2 \leq |\alpha| \leq r$  определяются из уравнения (15).

Таким образом, мы получили следующее утверждение.

Пусть  $(\tilde{a}_\alpha)$  – система обобщенных спектральных характеристик системного эволюционного оператора  $A$  произвольной кратности.

1. Если матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима слева, причем каждый элемент обратной слева матрицы принадлежит пространству  $\tilde{X}^p$ , то оператор  $A$  имеет системный левый квазиобратный  $B$  степени  $r$  для любого натурального числа  $r$ . При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик  $\tilde{b}_\alpha$  оператора  $B$  определяются из системы уравнений (7) при  $|\alpha|=1$ , и системы уравнений (9) при  $2 \leq |\alpha| \leq r$ .

2. Если матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима справа, причем каждый элемент обратной справа матрицы принадлежит пространству  $\tilde{X}^q$ , то оператор  $A$  имеет правый квазиобратный  $B$  степени  $r$  для любого натурального числа  $r$ . При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик  $\tilde{b}_\alpha$  оператора  $B$  определяются из системы уравнений (12) при  $|\alpha|=1$ , и системы уравнений (15) при  $2 \leq |\alpha| \leq r$ .

3. Если матричная функция  $\tilde{A}(\lambda)$  обратима, причем каждый элемент обратной матрицы принадлежит пространству  $\tilde{X}^p$ , то оператор  $A$  имеет системный квазиобратный  $B$  степени  $r$  для любого натурального числа  $r$ . При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик первого порядка оператора  $B$  определяются из соответствующих систем линейных уравнений, а компоненты обобщенных спектральных характеристик порядка выше первого определяются из соответствующих рекурсивных соотношений.

### Литература

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
2. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: МГУ, 1986. 368 с.
3. Земаян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 400 с.
4. Вувуникян Ю.М. Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками. Гродно: ГрГУ, 2007. 224 с.
5. Вувуникян Ю.М. Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы. Гродно: ГрГУ, 2014. 302 с.

**Y.M. Vuvunikian**

Yanka Kupala State University of Grodno

## GENERALIZED SPECTRAL CHARACTERISTICS OF ARBITRARY DEGREE SYSTEM QUASI-INVERSE OPERATORS

**Keywords:** *nonlinear system evolutionary operator, generalized spectral characteristics, left quasi-inverse system operator, right quasi-inverse system operator, quasi-inverse system operator.*

**Abstract.** *For system nonlinear evolutionary operators with generalized spectral characteristics the concepts of system left quasi-inverse operator, system right quasi-inverse operator and system quasi-inverse operator of degree  $r$  are introduced and the general recurrence formula for spectral characteristics of the left and right system quasi-inverse operator of degree  $r$  is proved.*

**С.А. Гомонов**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.54

## **НЕПРЕДИКАТИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА СХОДИМОСТЬ МЕТОДОМ СВЕДЕНИЯ НА СЕБЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ИХ ПРЕДЕЛОВ**

Ключевые слова: *порочный круг, непредикативное определение, бесконечная числовая последовательность, предел, подпоследовательность, метод сведения на себя, предельное множество.*

*В статье рассматриваются некоторые примеры использования непредикативных определений, встречающиеся в разных разделах математической науки (в алгебре, в теории чисел, в математическом анализе, в геометрии). Анализируются и развиваются общие приёмы поиска пределов сходящихся бесконечных числовых последовательностей, основанные на использовании условий (обычно уравнений), которым удовлетворяет искомое число – предел исследуемой числовой последовательности. Эти условия могут быть определяющими (характеристическими) для искомого числа или, по крайней мере, могут указывать на связь этого числа с ним же самим, что позволяет определить совокупность возможных его значений, а нередко и единственно возможное его значение.*

**1. Порочный круг и непредикативные определения.** В математике давно и хорошо известна логическая ошибка в обосновании (доказательстве) какого-либо результата, когда тезис выводится из аргументов, а аргументы выводятся из того же тезиса, в частности, когда обосновываемое утверждение используется в процессе собственного

обоснования. Образное название такого рассуждения – «порочный круг» (circulus vitiosus) [1; 2]. В качестве хорошо известного примера подобного рассуждения можно вспомнить рекомендации в [3] (образцово-показательные!) по обоснованию числового тождества (оно – «подарок» от формулы Кардано-Тарталья):

$$\sqrt[3]{38 + \sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38 - \sqrt{1445}} = 4,$$

в которых после предложения возвести в куб обе части этого равенства, что приводит после простых преобразований к равенству

$$76 - 3 \cdot \left( \sqrt[3]{38 + \sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38 - \sqrt{1445}} \right) = 64,$$

предлагают в нем заменить сумму  $\sqrt[3]{38 + \sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38 - \sqrt{1445}}$  числом 4. Ради справедливости надо отметить, что в последующих изданиях пособия [3] данная логическая ошибка была исправлена.

Однако существуют ситуации, когда наличие «порочного круга» не является таким уж совершенно недопустимым событием. Это случай использования так называемых *непредикативных определений*. Сам термин «непредикативное определение» ввёл в 1906 году французский математик А. Пуанкаре [2]. Именно он выдвинул возражения против использования подобных определений, являющихся одним из источников теоретико-множественных парадоксов.

К *непредикативным* определениям относят всякое определение, содержащее связанную переменную, в область изменения которой попадает определяемый объект (в противном случае, если определение не содержит таких переменных, то его называют *предикативным*).

Б. Рассел попытался построить математику на чисто предикативной основе с помощью специальной иерархии типов множеств [2], но в полном объёме такое построение (в частности, математического анализа) не удалось, хотя всё-таки для многих приложений предикативная теория (плюс арифметические аксиомы) позволяет достаточно развить математический анализ [4].

Так что *непредикативные* определения весьма широко и очень давно используются в математической науке, хотя на то, что они (хотя бы по виду!) несут в себе логический изъян, называемый «порочным кругом», указывали многие известные математики, и среди них такой известный специалист по математической логике и основаниям математики, как С.К. Клини [1]. По его мнению в таком определении определяемый объект участвует в собственном определении, а значит, для существования такого объекта нет никакой гарантии и нужны дополнительные исследования.

**2. Некоторые примеры применения непредикативных определений в математике.** Так как оказалось, что идея использования *непредикативных определений* не может быть объявлена исключительно

недопустимой и порочной, а потому не может быть забракована и отринута, то подобные определения приходится терпеть, сопровождая специальными исследованиями на существование (а порой и на единственность) определяемого объекта.

Однако порой есть и положительная сторона у определения, в котором определяемый объект участвует в собственном определении, так как подобной зависимостью от самого себя иногда можно неплохо и воспользоваться, получив некоторую дополнительную информацию об изучаемом объекте (числе, функции, определителе или геометрическом объекте). Конечно, не исключено, что вся эта информация получена для «пустого места», так как предмет исследования отсутствует, поскольку должен обладать противоречащими друг другу свойствами. Например, следующие уравнения, определяющие некоторые действительные числа – решения этих уравнения – пример непредикативных определений с весьма разными результатами:

$$x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}; x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

(впрочем, можно было бы взять и соответствующие алгебраические уравнения степени не ниже второй).

А вот аналогичные примеры уже над полем комплексных чисел:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}; z = \frac{i}{\bar{z}} \Leftrightarrow z \in \emptyset.$$

Стоит подчеркнуть, что иногда бывает выгодно перейти от непредикативного определения к предикативному:

$$2x = -4x + 7 \Leftrightarrow 6x = 7,$$

а порой – наоборот: от предикативного к непредикативному (примеры будут приведены ниже), хотя эквивалентными такие переходы бывают не всегда, что чревато дополнительными исследованиями.

Вот некоторые наиболее известные (почти «исторические») примеры использования непредикативных определений.

**Пример 1.** Известные ещё со времён Пифагора (VI век до н.э.) определения (с помощью пропорций) трёх самых «школьных» средних величин для двух произвольных положительных чисел (других чисел греки не знали) [5]:

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{a} \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \text{ – среднее арифметическое;}$$

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab} \text{ – среднее геометрическое;}$$

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x = \frac{2ab}{a+b} \text{ – среднее гармоническое.}$$

**Пример 2.** Определение понятия золотого сечения отрезка присутствует уже в «Началах» Евклида и опять-таки формулируется на языке уравнения-пропорции.

Пусть задан произвольный отрезок  $AB$ . Требуется определить внутреннюю точку  $X$  этого отрезка так, чтобы для положительных чисел

$|AX|=a$  и  $|XB|=b$  выполнялось условие  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , а

значит, так как  $a > 0$ , то  $a = b \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Понятие «золотое сечение» хорошо

известно архитекторам, скульпторам и художникам, но вот то, что конкретно называют «золотым сечением» менялось со временем: сейчас – это точка  $X$ , а во времена Евклида – это был наибольший из отрезков  $AX$  и  $XB$ , т.е. отрезок  $AX$  длиной  $a$ , иногда сечением называли саму

пропорцию  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$  и даже число  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , хотя для него встречаются и

другие названия: число, задающее «золотое» сечение, число Фидия – великого создателя скульптурного декора как Парфенона, так и всего Афинского Акрополя (V век до н.э.).

**Пример 3.** Считая, что система натуральных чисел определена набором аксиом Д. Пеано, легко определить операцию сложения  $f(a,b)$  в  $N$  следующими двумя аксиомами (напомним, равенство  $y = x'$  означает, что натуральное число  $y$  следует за натуральным числом  $x$ ):

I)  $f(a,1) = a'$ , где  $a$  – любое натуральное число;

II)  $f(a,b') = (f(a,b))'$ , где  $a$  и  $b$  – любые натуральные числа;

или, если использовать вместо символа  $f(a,b)$  символ  $a+b$ , то

I)  $a+1 = a'$ , где  $a \in N$ ;

II)  $a+b' = (a+b)'$ , где  $a, b \in N$ .

Очевидно, что требование (I) – пример предикативного определения, а вот определение (II) (сложение через сложение!) очевидно непредикативное определение (оба требования – в рамках системы аксиом Пеано). Поэтому далее приходится доказывать теорему о существовании и единственности сложения в  $N$ .

Аналогичная ситуация и с двумя аксиомами, задающими умножение в  $N$ :

I)  $a \cdot 1 = a$ , где  $a \in N$ ;

II)  $a \cdot b' = a \cdot b + a$ , где  $a, b \in N$ .

**Пример 4.** Для вычисления неопределённых и определённых интегралов хорошо известен приём, основанный на правиле интегрирования «по частям», когда искомый интеграл представляют в виде суммы известной функции и произведения искомого интеграла

опять-таки на некоторую известную функцию, что позволяет выразить искомый интеграл через эти известные функции. Данный приём, известный как метод сведения на себя, широко представлен многочисленными задачами во всех классических сборниках заданий по математическому анализу. Вот одна из таких задач: найдите неопределённый интеграл  $J = \int e^x \sin x dx$ .

**Решение.**  $J = \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$ , то есть  $J = e^x(\sin x - \cos x) - J$ , т.е.  $J = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$ .

**Пример 5.** Похожий приём существует и в исчислении конечных разностей. Он применяется при вычислении «в конечном виде» сумм типа  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ , где  $f(x)$  – числовая функция с  $D(f) = N$ . Напомним, что  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \Delta^{-1}(f(x)) \Big|_1^{n+1}$  [6]. Это так называемый дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница. Причём:

а)  $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$  – конечная разность первого порядка (с шагом 1) от функции  $f(x)$ ;

б)  $\Delta^{-1}(f(x))$  – любое конкретное решение функционального уравнения вида  $F(x+1) - F(x) = f(x)$ , где  $f(x)$  – известная функция с  $D(f) = N$ ;

в) так как  $\Delta(f_1(x) + f_2(x)) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$ , то

$$\Delta^{-1}(f_1(x) + f_2(x)) = \Delta^{-1}(f_1(x)) + \Delta^{-1}(f_2(x));$$

а раз  $\Delta(f_1(x) \cdot f_2(x)) = f_1(x+1) \cdot \Delta f_2(x) + \Delta f_1(x) \cdot f_2(x) = f_2(x+1) \cdot \Delta f_1(x) + f_1(x) \Delta f_2(x)$ , то одним из двух аналогов интегрирования по частям будет формула:

$$\Delta^{-1}(f_1(x) \cdot \Delta f_2(x)) = f_1(x) \cdot f_2(x) - \Delta^{-1}(f_2(x+1) \cdot \Delta f_1(x)),$$

а значит, для вычисления в конечном виде суммы  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \Delta^{-1}(x^2) \Big|_1^{n+1}$  достаточно найти  $\Delta^{-1}(x^2)$ .

Учитывая, что  $\Delta(x) = 1$  и  $\Delta(x^2) = 2x + 1$ , а значит,  $x^2 = \Delta^{-1}(2x + 1) = 2 \cdot \Delta^{-1}(x) + \Delta^{-1}(1) = 2\Delta^{-1}(x) + x$ , то есть  $\Delta^{-1}(x) = \frac{x^2 - x}{2} + C$ , а тогда

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(x^2) &= \Delta^{-1}\left(x \cdot \Delta^{-1}\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)\right) = x \cdot \frac{x(x-1)}{2} - \Delta^{-1}\left(\frac{x(x+1)}{2} \Delta(x)\right) = \\ &= \frac{x^2(x-1)}{2} - \Delta^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{x^2(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x^2) - \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x) = \\ &= \frac{x^2(x-1)}{2} - \frac{1}{2} \frac{x(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\Delta^{-1}(x^2), \end{aligned}$$



то есть

$$\Delta^{-1}(x^2) = x(x-1) \cdot \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \Delta^{-1}(x^2),$$

а значит:

$$\Delta^{-1}(x^2) = \frac{2x(x-1)(2x-1)}{4 \cdot 3} + C = \frac{1}{6} x(x-1)(2x-1) + C,$$

а следовательно, искомая сумма найдена:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \Delta^{-1}(x^2) \Big|_1^{n+1} = \frac{1}{6} x(x-1)(2x-1) \Big|_1^{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Впрочем у этой задачи на суммирование в конечном виде есть и более короткие решения.

**Пример 6.** Хорошо известный пример использования непредикативных определений можно отыскать в недрах метода итерации и метода сжимающих отображений [7]. Достаточно вспомнить уравнение  $x = f(x)$ , чье решение в некоторой замкнутой области  $\mathbf{C}$  действительного  $n$ -мерного пространства  $E_n$  ищется с любой наперед заданной точностью как предел итерационной последовательности вида  $(x^{(p)})$ , где  $x^{(0)}$  – любой элемент из  $\mathbf{C}$ , а

$$x^{(p)} = f(x^{(p-1)}), \quad p \in N.$$

В частности, для вычислений с нужной точностью значения функции  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , можно предложить итерационную последовательность, задаваемую так называемой итерационной формулой Герона [23]:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left( y_n + \frac{x}{y_n} \right),$$

сходящуюся к числу  $\sqrt{x}$ , где  $x$  – любое положительное число, а  $y_0$  – любое (лучше поближе к  $\sqrt{x}$ ) положительное число. Аналогичная итерационная последовательность давно найдена и для вычисления кубических корней [7].

**Пример 7.** Почти в любом сборнике упражнений и задач по линейной алгебре присутствует раздел, посвященный вычислению определителей произвольного порядка, а в нем подраздел, содержащий задачи на применение метода рекуррентных (рекурсивных или возвратных) соотношений [8]. Это как раз тот самый случай, когда, имея последовательность значений определителя  $n$ -го порядка ( $n \in N$ ):  $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n, \dots$ , то есть  $(D_n)$ , требуется получить формулу для  $D_n$  как функцию от  $n$  в явном виде. Если для  $(D_n)$  удастся получить зависимость между  $(D_n)$  и некоторыми ее подпоследовательностями,

например  $(D_n) = p \cdot (D_{n-1}) + q \cdot (D_{n-2})$ , где  $n \in N$ ,  $n \geq 3$ , а  $p, q \in R$ , причем  $D_1$  и  $D_2$  – известные числа, то тогда задача вычисления определителей  $D_n$ ,  $n \in N$ , свелась бы к решению рекуррентного соотношения (функционального уравнения):  $D_n = p \cdot D_{n-1} + q \cdot D_{n-2}$ , где  $n \in N$ ,  $n \geq 3$ , а  $D_1$  и  $D_2$  – известные числа (начальные условия). Это линейное однородное функциональное уравнение с постоянными коэффициентами легко сводится к уравнению второго порядка подстановкой  $\tilde{n} = n - 2$ , т.е.  $n = \tilde{n} + 2$ , где  $\tilde{n} \in N$ . Если  $q = 0$ , то искомая последовательность  $(D_n)$  имеет вид:

$$(D_n) = (D_1, D_2, pD_2, p^2D_2, \dots, p^{n-1}D_2, \dots),$$

т.е. «почти» геометрическая прогрессия, если же  $q \neq 0$ , то далее в свои права вступает теория решений рекуррентных соотношений (соответствующего класса) с составлением характеристического уравнения  $r^2 = pr + q$  ( $q \neq 0$ ) и выписыванием (по его корням) общего решения этого уравнения, а затем извлечением из него частного решения по его начальным условиям  $D_1$  и  $D_2$ .

Вот один из конкретных примеров подобных вычислений определителя  $n$ -го порядка (при любом  $n \in N$ ) [8]:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 2$ , а если для любого  $n \in N$ ,  $n \geq 3$ , разложить  $D_n$  по первому столбцу, то получим рекуррентное соотношение  $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ , т.е.  $(D_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$  – последовательность Фибоначчи с начальными условиями  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 2$ , а значит, используя формулу Бинэ, получим:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

**Пример 8.** И наконец, весьма любопытным примером непредикативного определения может служить вычисление значения квадратичной иррациональности по ее разложению в бесконечную цепную периодическую дробь [9; 10]. Учитывая, что любая бесконечная цепная дробь является сходящейся, найдем значение  $\alpha \in R$  периодической цепной дроби

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = [1; (1)].$$

Так как

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n,$$

где

$$u_1 = 1, u_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2, u_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, \dots, u_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1}}},$$

где в этом числовом выражении стоит ровно  $n$  единиц перед символом «+», учитывая и знаменатель «последней» дроби  $\frac{1}{1}$ . Однако очевидно, что тогда

$$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, n \geq 2 \text{ и } u_1 = 1,$$

а так как  $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1}$ , то, переходя к пределу в равенстве

$u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ , получаем, что положительное искомое число  $\alpha$  обязательно

удовлетворяет уравнению  $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , но  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , значит,

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  – число Фидия, а цепная периодическая дробь  $[1; (1)]$  имеет своим значением именно это знаменитое число.

Идея, только что использованная для вычисления значения бесконечной периодической дроби (мы знали, что она сходится и у нее есть конечное значение!), достаточно универсальна и может быть использована для нахождения возможных значений предела бесконечной числовой последовательности  $(u_n) \subset \mathbb{C}$ .

Договоримся, что далее все числовые последовательности будут считаться бесконечными, даже если слово «бесконечность» не будет использовано.

Итак, если для последовательности  $(u_n) \subset \mathbb{C}$  удалось найти соотношение вида

$$(u_n) = f((u_{n-1}), (u_{n-2}), \dots, (u_{n-k})), \quad (1)$$

где  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , то есть прослеживается связь между последовательностью  $(u_n)$  и ее  $k$  подпоследовательностями, то тогда,

считая, что функция  $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$  непрерывна на  $\mathbb{C}$ , мы, переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$  в равенстве (1), получим уравнение  $\alpha = f(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ , что, возможно, позволит конкретизировать набор чисел, подозрительных на возможное значение предела последовательности  $(u_n)$ , а вот указать возможные значения частных конечных пределов [12] этой последовательности данный прием, вообще говоря, **не позволяет**.

**Замечание 1.** Стоит подчеркнуть, что указанный выше метод (далее именно его будем называть методом сведения на себя) чаще всего оказывается **лишь частью** исследования бесконечной числовой последовательности  $(u_n) \subset \mathbb{C}$  на сходимость, так как после получения набора возможных значений предела этой последовательности **чаще всего** пойдет **мало алгоритмизуемое продолжение этого исследования**.

**Замечание 2.** Разумеется, подпоследовательности, участвующие в образовании правой части равенства (1), могут быть гораздо «прихотливее», чем  $(u_{n-1}), (u_{n-2}), \dots, (u_{n-k})$ .

**3. Исследование бесконечных числовых последовательностей на сходимость и вычисление их пределов с применением метода сведения на себя и не только.**

Для дальнейшего полезно будет напомнить символику и следующие свойства, связанные с бесконечными числовыми последовательностями [12–17]. Обозначения  $(z_n) \subset R$  и  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  означают, что числовая бесконечная последовательность  $(z_n)$ , соответственно вещественнозначная или комплекснозначная. Обозначение  $(z_{n_k}) \subset (z_n)$  означает, что последовательность  $(z_{n_k})$  является подпоследовательностью последовательности  $(z_n)$ , то есть последовательность индексов  $(n_k) \subset N$  и является строго возрастающей последовательностью (обозначение:  $(n_k) \uparrow\uparrow$ , а если нестрого, то  $(n_k) \uparrow$ ).

Так как правило вычисления значения членов последовательности  $(z_n)$  (т.е. функции, заданной на  $N$  со значениями в  $R$  или в  $\mathbb{C}$ ) могут быть переданы указанием упорядоченных пар вида  $(n, z_n)$ , где  $n \in N$ , то любую последовательность  $(z_n)$  можно (при такой интерпретации понятия последовательности) представить в виде множества  $(z_n) = \{(n, z_n) \mid n \in Z\}$ , а значит, и в виде объединения одноэлементных множеств:  $(z_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(n, z_n)\}$ . Считая, что определение равных последовательностей, суммы, разности, произведения, частного двух

числовых последовательностей, определение произведения числа на последовательность со всеми основными свойствами как отношения равенства, так и указанных операций нам известны, перечислим менее очевидные свойства (доказательства многих из них предлагаются в качестве задач в таких классических книгах, как [12; 14; 15; 17]):

**1.** Если предел у числовой бесконечной последовательности (**а других последовательностей рассматривать далее не будем**) существует, то он единственен.

**2.** Если  $(z_n)$  имеет предел, то всякая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

**3. Лемма Больцано – Вейерштрасса.** *У любой ограниченной последовательности имеется по крайней мере одна подпоследовательность, сходящаяся к конечному пределу, а значит, у любой бесконечной числовой последовательности  $(z_n)$  имеется по крайней мере одна подпоследовательность, сходящаяся к конечному или бесконечному пределу.*

**Замечание 1.** Напомним, что указанный выше конечный или бесконечный предел называют **частичным пределом** последовательности  $(z_n)$ , а совокупность всех таких чисел – **предельным множеством последовательности  $(z_n)$**  (в точке  $\infty$ ) [13]. Обозначают это множество символом  $C((z_n), \infty)$  или, короче,  $C((z_n))$ .

**4.** Для любой бесконечной числовой последовательности  $(z_n)$  ( $(z_n) \subset R$  или  $(z_n) \subset C$ ) совокупность всех ее частичных пределов (т.е. ее предельное множество  $C((z_n))$ ) замкнуто в  $\bar{R} = R \cup \{\infty\}$  или соответственно в  $\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ ; верно и обратное: любое замкнутое множество в  $\bar{R}$  (в  $\bar{C}$ ) является предельным множеством по крайней мере одной числовой последовательности  $(z_n) \subset R$  (соответственно  $(z_n) \subset C$ ) [12; 13].

**Замечание 2.** Благодаря сепарабельности топологического пространства  $\bar{C}$ , сепарабельно и любое его подмножество [14].

**5.** Весьма полезно помнить теоремы о предельном переходе в равенстве и неравенстве, связывающих числовые последовательности [12], а также и теорему о сходимости монотонной ограниченной последовательности  $(z_n) \subset R$ .

**6.** В дополнение и развитие изложенного в конце второго раздела данной статьи метода получения чисел, подозрительных на значение предела сходящейся числовой последовательности  $(z_n)$ , укажем на следующий очевидный факт. (Полезен также и принцип двустороннего ограничения, а также теорема Штольца [12; 17; 23]).

**Лемма.** Пусть числовая бесконечная последовательность  $(z_n)$ , где  $(z_n) \subset R$  или  $(z_n) \subset \mathbf{C}$ , обладает конечным набором подпоследовательностей

$$(z_{n_k^{(1)}}), (z_{n_k^{(2)}}), \dots, (z_{n_k^{(s)}}), \quad (2)$$

причем для каждой их них выполняется равенство

$$z_{n_k^{(j)}} = \varphi_j(z_k), \text{ где } k \in N, \quad j \in \{1, \dots, s\}, \quad (3)$$

причем все функции  $\varphi_j(z)$  заданы и непрерывны на  $R$  (соответственно на  $\mathbf{C}$ ), тогда в случае сходимости последовательности  $(z_n)$  к некоторому конечному пределу  $a \in R$  (соответственно  $a \in \mathbf{C}$ ) предельный переход в равенствах (3) при  $k \rightarrow \infty$  (и  $n \rightarrow \infty$ ) позволяет утверждать, что число  $a$  будет решением системы уравнений вида

$$z = \varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \dots = \varphi_s(z), \quad (4)$$

которая заведомо будет совместна, а множество всех ее решений в  $R$  (в  $\mathbf{C}$ ) обязательно содержит число  $a$ .

**Следовательно:**

1) найдя все решения системы (4), мы определим все числа, подозрительные на значение предела последовательности  $(z_n)$ , правда их может быть и бесконечно много.

2) если система (4) несовместна, то последовательность  $(z_n)$  расходящаяся.

**Замечание 3.** Напомним, что найти числа, подозрительные на предел исследуемой на сходимость числовой последовательности  $(z_n)$ , – это одно, а установить ее сходимость – это, как правило, отдельная и зачастую другая непростая задача.

7. Стоит отметить, что во многих случаях исследованию на сходимость бесконечной числовой последовательности  $(z_n)$  помогает представление ее в виде **объединения (разбиения)** конечного числа ее подпоследовательностей, то есть

$$(z_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(n, z_n)\} = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(n_k^{(1)}, z_{n_k^{(1)}})\} \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(n_k^{(2)}, z_{n_k^{(2)}})\} \right) \cup \dots \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(n_k^{(s)}, z_{n_k^{(s)}})\} \right), \quad (5)$$

где множества

$$N_1 = \{n_k^{(1)} | k \in N\}, \quad N_2 = \{n_k^{(2)} | k \in N\}, \quad \dots, \quad N_s = \{n_k^{(s)} | k \in N\}$$

дают в объединении весь натуральный ряд, а в случае, когда **объединение** (5) является **разбиением**, то и попарно не пересекаются.

То, что для последовательностей индексов выполнено:  $(n_k^{(1)}) \uparrow\uparrow, \dots, (n_k^{(s)}) \uparrow\uparrow$  само собой разумеется, как и то, что  $s \in N$  и  $s \geq 2$ . Простейшими примерами представления (5) можно назвать следующие разбиения:

$$(z_n) = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(2k-1, z_{2k-1})\} \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(2k, z_{2k})\} \right), \quad s=2, \quad (6)$$

или в общем виде для произвольного  $s \geq 2$ :

$$(z_n) = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(sk, z_{sk})\} \right) \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(sk+1, z_{sk+1})\} \right) \cup \dots \cup \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(sk+s-1, z_{sk+s-1})\} \right). \quad (7)$$

**8.** Напомним на конкретном примере один весьма простой прием перехода от неоднородного рекуррентного соотношения к однородному, связанный с суммированием в конечном виде последовательностей

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n), n \in N, \quad (8)$$

в случае, когда  $f(n)$  – многочлен от переменного  $n$ , а для нахождения суммы (8) применяется известное [6] функциональное уравнение  $F(x+1) - F(x) = f(x)$ , а  $f(x) \in C[x]$ .

Пусть  $f(x+1) = x^3$ , то есть ищем в конечном виде сумму  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ ,  $n \in N$ . Составим уравнение  $F(x+1) - F(x) = x^3$ , то есть  $\Delta(F(x)) = x^3$ , и применим к левой и правой его части несколько раз  $\Delta$ -оператор (см. пример 5 данной статьи), пока в правой части не появится нуль-многочлен.

Это будут следующие функциональные уравнения:  $\Delta^2(F(x)) = \Delta(x^3)$ , т.е.  $\Delta^2(F(x)) = 3x^2 + 3x + 1$ ,  $\Delta^3(F(x)) = \Delta(3x^2 + 3x + 1)$ , т.е.  $\Delta^3(F(x)) = 6x + 6$ ,  $\Delta^4(F(x)) = 6$ ,  $\Delta^5(F(x)) = \Delta(6) = 0$ , т.е.  $F(x+5) - 5F(x+4) + 10F(x+3) - 10F(x+2) + 5F(x+1) - F(x) = 0$ ,  $x \in N$ , к которому применима теория получения всех решений линейного однородного с постоянными коэффициентами рекуррентного соотношения пятого порядка.

Рассмотрим теперь несколько примеров исследования числовых последовательностей на сходимость с применением (с разным успехом!) метода сведения на себя.

Напомним, что многие задачи на вычисление пределов давно стали классическими и встречаются во многих учебниках и сборниках задач по математическому анализу [12], [15–18], [20–22], [23], поэтому указать их первоисточник весьма затруднительно, да и не слишком необходимо. Начнем же с совсем простой задачи.

**Задача 1.** Найдите числа, подозрительные на значения предела последовательности: а)  $\left(\frac{1}{n}\right)$ , б)  $(n^k)$ , где параметр  $k \in R$ , в)  $(a^n)$ , где параметр  $a \in C$ .

*Решение*

а) Если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lambda \in R$  (далее будем, как это принято для последовательности, писать  $n \rightarrow \infty$ ), то из следующих очевидных включений и зависимостей

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \subset \left(\frac{1}{n}\right), \\ \left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \subset \left(\frac{1}{n}\right), \\ \left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \subset \left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda = \lambda, \\ \frac{1}{3}\lambda = \lambda, \\ \lambda^2 = \lambda, \end{cases}$$

то есть  $\lambda = 0$ , а значит, единственная возможность для последовательности  $\left(\frac{1}{n}\right)$  — это сходиться к 0, а так как эта последовательность обратная к бесконечно большой последовательности  $(n)$ , то она является сходящейся именно к уже «угаданному» числу 0.

б) При  $k = 0$  последовательность  $(n^k) = (1)$  и сходится к 1; при  $k \neq 0$  простое соотношение и включение  $2^k \cdot (n^k) = ((2n)^k) \subset (n^k)$ , в случае, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \lambda \in R$ , дает с помощью предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$  уравнение для поиска  $\lambda$ :  $2^k \cdot \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$ , т.е. в случае сходимости у последовательности  $(n^k)$  может быть пределом лишь число 0, что имеет место при  $k < 0$ , а при  $k > 0$  последовательность  $(n^k)$  сходится к  $+\infty$  [15–22].



в) Очевидно, при  $a=0$  и  $a=1$  последовательность  $(a^n)$  будет константой, а при  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0;1\}$ , считая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lambda \in \mathbb{C}$ , получаем из соотношений

$$\begin{cases} (a^n)^3 = (a^{3n}) \subset (a^n), \\ (a^n)^2 = (a^{2n}) \subset (a^n) \end{cases}$$

следующие уравнения для поиска  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \lambda^3 = \lambda, \\ \lambda^2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \{0;1\},$$

то есть подозрительные на предел числа – это 0 и 1. Хорошо известные из курса математического анализа рассуждения позволяют утверждать, что при  $|a| < 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , а при остальных  $n \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  последовательность  $(a^n)$  расходится.

**Задача 2.** Для последовательности  $(x^n) \subset R$ , заданной условиями

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1, \\ x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), \text{ где } n \geq 3, \end{cases}$$

найдите числа, подозрительные на значение ее предела.

*Решение.* Непосредственной проверкой легко убедиться, что  $(x_n) = (1, 1, 1, \dots) = (1)$  – константа, а значит, имеет своим пределом число 1, а вот предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , так как имеем тождество  $(x_n) = \frac{1}{2}(x_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_{n-2})$ , которое (если обозначить  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda \in R$ ) дает уравнение  $\lambda = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda$ , решением у которого является любое действительное число, а значит, никакой полезной информации о возможных значениях  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  мы не получили. Бывает и такое, тем более, что и без этого установлено, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Задача 3** [12]. Исследуйте на сходимость последовательность  $(x_n) \subset R$ , заданную условиями:  $x_1$  – любое число из  $(0; 1)$  и  $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ .

*Решение.* Первоначально выясним, сходится ли любая из указанных последовательностей, если  $x_1 \in (0; 1)$ . Действительно:  $0 < x_1 < 1$ , значит, если  $0 < x_k < 1$ , то  $2 - x_k > 1$ , а тогда  $x_{k+1} = x_k(2 - x_k) > x_k$ , с другой стороны  $x_{k+1} = 1 - (x_k - 1)^2 < 1$ , т.е.  $0 < x_k < x_{k+1} < 1$  по аксиоме

математической индукции заключаем, что  $(x_n) \uparrow \uparrow$  и ограничена сверху, значит, сходится, и для ее предела  $\lambda > 0$ , тогда, переходя в равенстве  $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$  к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(2 - \lambda), \\ \lambda > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

**Ответ:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Задача 4.** Исследуйте на сходимость последовательности:  
а)  $(\cos n)$ , б)  $(\sin n)$ , в)  $(\operatorname{tg} n)$ , г)  $(\operatorname{ctg} n)$ .

*Решение*

а) Последовательность  $(\cos n)$  ограничена, что позволяет предположить, что если она сходится, например, к числу  $\lambda \in [-1; 1]$ , то тогда из очевидных равенств и включений

$$\begin{cases} (\cos 2n) = (2\cos^2 n - 1) \subset (\cos n), \\ (\cos 3n) = (4\cos^3 n - 3\cos n) \subset (\cos n), \end{cases}$$

с помощью предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda = 2\lambda^2 - 1, \\ \lambda = 4\lambda^3 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}, \\ \lambda \in \{0; 1; -1\} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

то есть единственным подозрительным на предел последовательности  $(\cos n)$  числом может быть 1. Однако, так как  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ , а функция  $F(x) = 1 - x^2$  непрерывна на  $R$ , то если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 1$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sin^2 n) = 1$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 n = 0$ , значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$ , однако, так как  $(\cos(n+1)) = (\cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1) \subset (\cos n)$ , то при  $n \rightarrow \infty$  получим, что  $\lambda = \lambda \cdot \cos 1 - 0 \cdot \sin 1 \Leftrightarrow \lambda(\cos 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ , так как  $\cos 1 \neq 0$ . Получили, что наряду с единственным возможным пределом последовательности  $(\cos n)$ , равным 1, появилось и еще одно значение предела последовательности  $(\cos n)$ , что противоречит свойству единственности предела. Значит, последовательность  $(\cos n)$  расходится.

б) Предположим, что последовательность  $(\sin n)$  сходится к  $\lambda \in [-1; 1]$ , тогда из равенства  $\sin(n+1) - \cos 1 \sin n = \cos n \cdot \sin 1$ , учитывая, что  $(\sin(n+1)) \subset (\sin n)$ , немедленно получаем сходимость последовательности  $(\sin(n+1) - \cos 1 \cdot \sin n)$ , т.е. сходится

последовательность  $(\cos n \cdot \sin 1)$ , а так как  $\cos n = \frac{\sin 1 \cdot \cos n}{\sin 1}$  и  $\sin 1 \neq 0$ , то будет сходиться к конечному пределу и  $(\cos n)$ , что неверно (см. пункт а) этой же задачи).

**Замечание 4.** Можно предложить и такое рассуждение: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 1$ , а тогда и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$ , то из равенства  $\cos(n+1) = \cos n \cdot \cos 1 - \sin n \cdot \sin 1$  при  $n \rightarrow \infty$  следует, что  $1 = 1 \cdot \cos 1 - 0 \cdot \sin 1$ , то есть  $\cos 1 = 1$ , а это неверно, т.е. получили явное противоречие, возникшее из предположения, что  $(\cos n)$  – сходящаяся последовательность.

**Замечание 5.** Другое решение имеется в [17, с. 81].

в) Из равенства  $\operatorname{tg}(n+1) = \frac{\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n}$ , если предположить, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} n$  существует и равен  $\lambda \in R$  выполнится одно из двух:

I. Если  $1 - \lambda \cdot \operatorname{tg} 1 \neq 0$ , то  $\lambda = \frac{\lambda + \operatorname{tg} 1}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \lambda} \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 \operatorname{tg} 1 = \lambda + \operatorname{tg} 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 1 \cdot (1 + \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$ , т.е.  $(\operatorname{tg} n)$  не может иметь конечного предела и является расходящейся последовательностью.

II. Если  $1 - \lambda \cdot \operatorname{tg} 1 = 0$ , а тогда, чтобы была надежда на существование  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}(n+1)$  надо, чтобы и в числителе получили бы ноль, т.е.  $\lambda + \operatorname{tg} 1 = 0$ , следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} 1 - \lambda \cdot \operatorname{tg} 1 = 0, \\ 1 + \operatorname{tg} 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\operatorname{tg} 1, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \emptyset$$

и необходимое противоречие получено.

г) Последовательность  $(\operatorname{ctg} n)$  совершенно аналогично может быть проанализирована и ответом будет отсутствие сходимости у данной последовательности, хотя проще воспользоваться тем, что  $\operatorname{ctg} n = (\operatorname{tg} n)^{-1}$ .

**Замечание 6.** Было бы весьма интересно найти множество всех частичных пределов для рассмотренных выше последовательностей, что и осуществлено в книге [17] (задачи 3.194 и 3.195, подсказка на стр. 90–91, пример 3.23). Вот какие интересные результаты предложено обосновать в этих задачах.

**Теорема 1.** а) Множества всех частичных пределов последовательностей  $(\sin n)$  и  $(\cos n)$ , то есть их предельные множества, представляют собой отрезок  $[-1; 1]$ .

б) Множества всех частичных пределов последовательностей  $(\operatorname{tg} n)$  и  $(\operatorname{ctg} n)$  представляют собой всю числовую прямую, пополненную точкой  $\infty$  (а точнее точками  $\pm\infty$ ).

**Задача 5.** [12, с. 72]. Исследуйте на сходимость и, если последовательность сходится, найдите ее предел:

а)  $(x_n) = \left(\frac{c^n}{n!}\right)$ , где параметр  $c \in (0; +\infty)$ ,

б)  $(x_n) = \left(\underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ квадратных корней}}\right)$ , где  $c \in (0; +\infty)$ .

**Указание и ответ.**

а)  $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ ;

б)  $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4c+1}$ .

**Задача 6.** Найдите все сходящиеся последовательности Фибоначчи.

**Указание и ответ.** Так как  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ; то, используя обобщенную формулу Бинэ, задающую любую последовательность Фибоначчи, получим, что только одна последовательность Фибоначчи сходится – это нулевая последовательность.

**Задача 7** [12]. Исследуйте на сходимость последовательность  $(x_n) = \left(\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)\right)$ .

*Решение.* Непосредственно проверкой можно убедиться, что  $(x_n) = (0, 1, 0, 1, \dots) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(2n-1, 0)\}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(2n, 1)\}\right)$ , а значит, любая подпоследовательность последовательности  $(x_n)$ , порождающая конечный частичный предел, будет (с точностью до перехода к подпоследовательности) тождественна 0 или 1.

**Ответ.**  $C((x_n)) = \{0; 1\}$ .

Если же заметить, что  $(x_n)^2 = (x_n)$ , то предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , с предположением, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda \in R$ , дает уравнение  $\lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda \in \{0; +1\} = C((x_n))$ .

**Замечание 7.** Следует отметить, что предельный переход (а значит, метод сведения на себя), вообще говоря, не действует, если хочется найти подозрительные на частичные пределы числа.

Рассмотрим следующий пример (частный случай примера 6 из [12, с. 75–77]).

**Задача 8.** Исследуйте на сходимость и найдите все частичные пределы последовательности, заданной условиями  $x_1 = -2$ ,  $x_{n+1} = -2 + \frac{x_n^2}{2}$ ,  $n \in N$ .

*Решение.* Если предположить, что  $(x_n)$  сходится к действительному числу  $\lambda \in R$ , то предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  дает уравнение  $\lambda = -2 + \frac{\lambda^2}{2} \Leftrightarrow \lambda \in \{1 \pm \sqrt{5}\}$ , однако, легко видеть, что

$$(x_n) = (-2, 0, -2, 0, -2, 0, \dots) = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(2k-1, -2)\} \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(2k, 0)\} \right), \quad (9)$$

а следовательно,  $C((x_n)) = \{0; -2\}$ .

Однако ни один их частичных пределов не появился среди набора чисел, который (как казалось) должен был их содержать. И причина этому есть. Если бы какая-либо подпоследовательность последовательности  $(x_n)$  сходилась к конечному пределу, то она бы имела бесконечное количество членов хотя бы в одном из двух объединяемых в (9) множеств, а значит, можно считать, что с точностью до перехода к подпоследовательности, она – константа и имеет предел.

Однако в равенстве  $x_{n+1} = -2 + \frac{x_n^2}{2}$ ,  $n \in N$ , задействованы два члена, стоящих рядом в последовательности  $(x_n)$ , а значит, они имеют номера разной четности, а, как было выяснено, любая подпоследовательность последовательности  $(x_n)$ , если сходится, то с некоторого номера будет состоять только из членов последовательности  $(x_n)$  четных номеров или только нечетных, а поэтому предельный переход дает уравнение вида  $\lambda_1 = -2 + \frac{\lambda_2^2}{2}$  и уравнение вида  $\lambda_2 = -2 + \frac{\lambda_1^2}{2}$ , благодаря тому, что четным номером может быть как  $n$ , так и  $n+1$ . Легко найти все решения системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 + \frac{\lambda_2^2}{2}, \\ \lambda_2 = -2 + \frac{\lambda_1^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in \{(0; -2), (-2; 0), (1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}), (1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})\},$$

а значит, все искомые частичные пределы (а это 0 и  $-2$ ) являются элементами множества  $\{0; -2; 1 \pm \sqrt{5}\}$ , то есть  $C((x_n)) \subset \{0; -2; 1 \pm \sqrt{5}\}$ .

Однако «проследить», как может «преобразоваться» подпоследовательность, порождающая конечный частичный предел при подстановке в разные «части» заданного (или полученного)

рекуррентного соотношения, вообще говоря, весьма затруднительно, поэтому предельный переход при поиске частичных пределов весьма непросто и требует громоздких исследований, а порой, и вовсе бесполезен. В завершении этой части статьи стоит привести несколько интересных задач, при решении которых метод сведения на себя может оказать определенную помощь.

**Задача 9** [15]. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 1}\right), \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + n}\right), \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\sin \sin \sin \dots \sin x}_{n \text{ раз вычисляем значение синуса}} \right),$$

где  $x$  – любое действительное число.

**Задача 10** [15; 17]. Найдите верхний и нижний частичные пределы следующих последовательностей:

$$\text{а) } (x_n) = \left( \frac{n^2}{1+n^2} \cdot \cos \frac{2n \cdot \pi}{3} \right), \text{ б) } (x_n) = \left( \frac{n}{n+1} \cdot \sin^2 \frac{n \cdot \pi}{4} \right),$$

$$\text{в) } (x_n) = \left( \cos^n \frac{2\pi n}{3} \right), \text{ г) } (x_n) = \left( ((-1)^n + 1) \cdot 2^n \right),$$

$$\text{д) } (x_n) = \left( \frac{n+1}{n+1+n(-1)^n} \right), \text{ е) } (x_n) = \left( n \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right),$$

$$\text{ж) } (x_n) = \left( \cos(n^2) \right), \text{ з) } (x_n) = \left( \sin(n^2) \right).$$

**Замечание 8.** Отметим существование несколько более общей ситуации при применении метода сведения на себя при исследовании на сходимость числовой последовательности  $(z_n)$  (или, если это удобнее,  $(z_k)$ ). Предполагая, что  $(z_k)$  сходится к конечному пределу  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а между нею самой и ее подпоследовательностями

$$(z_{n_k^{(1)}}), (z_{n_k^{(2)}}), \dots, (z_{n_k^{(s)}}), \quad s \in N,$$

а также некоторыми конкретными сходящимися последовательностями

$$(u_k^{(1)}), (u_k^{(2)}), \dots, (u_k^{(m)}), \quad m \in N,$$

с соответствующими конечными пределами  $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{C}$ , найдена зависимость вида

$$F(z_k, z_{n_k^{(1)}}, z_{n_k^{(2)}}, \dots, z_{n_k^{(s)}}, u_k^{(1)}, \dots, u_k^{(m)}) = 0,$$

причем функция  $F(w_1, w_2, \dots, w_s, w_{s+1}, \dots, w_{s+m})$  непрерывна на  $\mathbb{C}^{s+m}$ , то тогда, осуществив предельный переход при  $k \rightarrow \infty$ , получим уравнение вида  $F(\lambda, \lambda, \dots, \lambda, u_1, u_2, \dots, u_m) = 0$  для поиска чисел  $\lambda$ , подозрительных на значение предела последовательности  $(z_n)$ .

**Например,** для последовательности  $(x_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)$  получаем:

$$x_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{n+1} = \left(n + \frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = x_n + 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \quad \text{или}$$

$$x_{n+1} - x_n - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0. \quad \text{Переходя к пределу при } n \rightarrow \infty, \text{ имеем:}$$

$$\lambda - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0, \text{ а значит, } (x_n) \text{ расходится.}$$

**Замечание 9.** Можно предложить достаточно универсальный подход к поиску зависимости между последовательностью  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  и некоторыми ее подпоследовательностями, если функция  $y = f(n) = z_n$ ,  $n \in N$ , имеет «хорошее» однозначное обращение (иначе возникнут технические «трудности», хотя и для многозначных отображений давно разработано понятие непрерывности):  $n = f^{-1}(y) = f^{-1}(z_n)$ ,  $n \in N$ , тогда, например:

$$1) \begin{cases} n = f^{-1}(z_n), \\ n+1 = f^{-1}(z_{n+1}) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(z_n) + 1 = f^{-1}(z_{n+1});$$

или

$$2) \begin{cases} n = f^{-1}(z_n), \\ n+2 = f^{-1}(z_{n+2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = f^{-1}(z_n), \\ 2n+4 = 2f^{-1}(z_{n+2}), \end{cases}$$

а значит, раз  $n + n + 1 + 3 = 2f^{-1}(z_{n+2})$ , то  $f^{-1}(z_n) + f^{-1}(z_{n+1}) + 3 = 2f^{-1}(z_{n+2})$  или  $f^{-1}(z_{n+1}) + f^{-1}(z_{n+3}) = 2f^{-1}(z_{n+2})$ , а можно и так:

$$3) n+1 = f^{-1}(z_{n+1}), \text{ значит, } n^2 + 2n + 1 = (f^{-1}(z_{n+1}))^2 \text{ или:}$$

$$(f^{-1}(z_n))^2 + f^{-1}(z_n) + f^{-1}(z_{n+1}) = (f^{-1}(z_{n+1}))^2,$$

а также  $f^{-1}(z_{2n}) = 2f^{-1}(z_n)$ ,  $f^{-1}(z_{n^2}) = (f^{-1}(z_n))^2$  и т.д. Ну а далее все будет зависеть от возможности получить «удачную» зависимость вида  $F(z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+k}) = 0$  (как следствие соответствующих соотношений 1–3 и т.д.). Вот простой иллюстрирующий **пример** соответствующей части исследования на сходимость последовательности  $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Имеем,

так как  $x_n \neq 1$ :  $n = \frac{1}{x_n - 1}$ , а значит,  $n+1 = \frac{1}{x_{n+1} - 1}$ , откуда следует, что

$$\frac{1}{x_n - 1} + 1 = \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \text{ а значит, } x_{n+1} \cdot x_n - 2x_n + 1 = 0, \text{ тогда, если } \lim_{n \rightarrow \infty} = \lambda \in \mathbb{R},$$

то  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ , т.е. если последовательность  $(x_n)$  сходится, то только к числу 1. Впрочем сходимость  $(x_n)$  очевидна.

4. Следует еще раз обратить внимание на хорошо известное важное характеристическое свойство: совокупность всех частичных пределов любой бесконечной последовательности  $(z_n) \subset \mathbf{C}$ , являясь предельным множеством в точке  $\infty \in \bar{\mathbf{C}}$  соответствующей функции  $f(n) = z_n$ ,  $n \in N$ , автоматически будет замкнутой в  $\bar{\mathbf{C}}$  [13].

Кроме того, предельные множества соответствующих функций позволяют несколькими способами охарактеризовать «скорость» сближения членов сходящихся последовательностей.

А именно: пусть  $(z_n) \subset \mathbf{C}$  сходится к числу  $z_0 \in \mathbf{C}$  и  $(\forall n \in N)(z_n \neq z_0)$ , тогда можно положить:

$$L_1((z_n)) \stackrel{def}{=} C \left( f(w_1, w_2) = \frac{w_1}{w_2}, (0, 0) \right),$$

где  $Dom f = ((z_n - z_0))^2 = \{(z_m - z_0, z_k - z_0) \mid m, k \in N\}$  – декартов квадрат последовательности, а если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , то разумно положить, что

$$L_2((z_n)) \stackrel{def}{=} L_1 \left( \left( \frac{1}{z_n} \right) \right),$$

впрочем, в этом случае, т.е. когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , можно еще предложить и такой вариант:

$$L_3((z_n)) \stackrel{def}{=} C \left( f(w_1, w_2) = w_1 - w_2, (\infty, \infty) \right),$$

где  $Dom f = ((z_n))^2$ . В результате получаем наиболее простые способы охарактеризовать относительное поведение членов сходящейся последовательности  $(z_n)$ .

### Примеры

1)  $L_1 \left( \left( \frac{1}{n!} \right) \right) = L_1 \left( (2^{n^2}) \right) = \{0; 1; \infty\}$ ;

2)  $L_1 \left( (a^n) \right) = \{a^k \mid k \in Z\} \cup \{0; \infty\}$ , где  $0 < a < 1$ ;

3) Если  $p_1(n), p_2(n) \in \mathbf{C}[n] \setminus \mathbf{C}$ ,  $m = \deg p_1(n) < \deg p_2(n) = m'$ , то

$$L_1 \left( \left( \frac{p_1(n)}{p_2(n)} \right) \right) = L_1 \left( \left( \frac{1}{n^{m'-m}} \right) \right) = [0; +\infty) \cup \{\infty\}.$$



Как оказалось, без особого труда можно указать характеристические свойства тех подмножеств множества  $\bar{\mathbb{C}}$ , каждое из которых служит соответствующим предельным множеством.

**Теорема 2.** Для того, чтобы множество  $M \subset \bar{\mathbb{C}}$  было предельным множеством хотя бы для одной из функций вида:

$$f(w_1, w_2) = \frac{w_1}{w_2} \text{ с } \text{Dom } f = ((z_n - z_0))^2,$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in \mathbb{C}$  и  $z_n \neq z_0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $M$  удовлетворяло следующим трем условиям:

а)  $\{0; 1; \infty\} \subseteq M$ ;

б)  $M$  замкнуто в  $\bar{\mathbb{C}}$ ;

в)  $M$  замкнуто относительно операции взятия обратного элемента, то есть  $(\forall z \in \bar{\mathbb{C}}) \left( (z \in M) \Rightarrow \left( \frac{1}{z} \in M \right) \right)$ .

**Замечание 10.** Напомним, что 0 и  $\infty$  считаются обратными друг другу элементами в  $\bar{\mathbb{C}}$ .

**Теорема 3.** Для того, чтобы множество  $M \subset \bar{\mathbb{C}}$  было предельным множеством хотя бы для одной из функций вида:

$$f(w_1, w_2) = w_1 - w_2 \text{ с } \text{Dom } f = ((z_n))^2,$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы  $M$  удовлетворяло следующим трем условиям:

а)  $\{0; \infty\} \subseteq M$ ;

б)  $M$  замкнуто в  $\bar{\mathbb{C}}$ ;

в)  $M$  замкнуто относительно операции взятия обратного элемента, то есть  $(\forall z \in \bar{\mathbb{C}}) \left( (z \in M) \Rightarrow (-z \in M) \right)$ .

**Замечание 11.** Как обычно, считаем, что  $-\infty = \infty$ .

### Литература

1. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. М.: Наука, 1975. 720 с.
2. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. 1184 с.
3. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: учебное пособие / В.К. Егоров, Б.А. Кордемский [и др.] / под ред. М.И. Сканава. 5-е изд. М.: Высш. шк., 1988. 431 с.
4. Takeuti G. Two application of logic to mathematics. Tokio, 1978.
5. Джини К. Средние величины. М.: Статистика, 1970. 418 с.
6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1974. 384 с.
9. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 384 с.
- 10 Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: учебное пособие. В 6 ч. Ч. 1: Введение в анализ и дифференциальное исчисление. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 319 с.
11. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1975. 48 с.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
13. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 312 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
15. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ: Астрель, 2010. 558 с.
16. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащёнов К.В. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Просвещение, 1966. 436 с.
17. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: в 3 т. Т. 1.: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. 412 с.
18. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1 / Виленкин Н.Я., Бохан К.А. [и др.] /под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение. 1971. 343 с.
19. Родионов Е.М., Синякова С.Л. Математика. Ч. II. Функция. Последовательность. Предел. Производная. Применение производной. М.: Ориентир. 2004. 432 с.
20. Виленкин Н.Я. Иванов-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1995. 335 с.
21. Баландин М. Предел числовой последовательности. М.: Просвещение, 2004. 41 с.
22. Лосневская Т.В., Кузнецов В.Л. Пределы числовых последовательностей и функций. М.: Просвещение, 2011. 211 с.
23. Гаврилов В.И., Афанасьева В.И. Начала математического анализа и элементарные функции: учебное пособие. Ч. 1. Якутск: Изд-во Якутского университета, 2000. 108 с.

**S.A. Gomonov**  
Smolensk State University

**APREDICTIVE DEFINITIONS AND SOME METHODS OF STUDIES  
OF THE NUMERICAL SEQUENCES ON THE CONVERGENCE  
OF THE SELF-REDUCTION METOD AND OF COMPUTATION  
OF THEIR LIMITS**

**Keywords:** *vicious circle, non-predictive definition, infinite numerical sequence, limit, subsequence, self-reduction method, cluster set.*

**Abstract.** *The article discusses some examples of the use of non-predictive definitions found in different sections of mathematical science (algebra, number theory, mathematical analysis, geometry). The General methods of search of limits of converging infinite numerical sequences based on the use of conditions (usually equations), which satisfy the desired number – the limit of the investigated numerical sequence are analyzed and developed. These conditions can be decisive (characteristic) for the desired number or, at least, can indicate the relationship of this number with itself, which allows to determine the totality of its possible values, and often the only possible value.*

**О.Б. Долгополова, Э.И. Зверович**  
*Белорусский государственный университет*

УДК 517.948

## **ОБРАЩЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА, ВЗЯТОГО ПО КОНЕЧНОМУ ОТРЕЗКУ**

Ключевые слова: *гиперсингулярное интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, теория упругости, контактные задачи, краевые задачи.*

*В работе предложено решение гиперсингулярного интегрального уравнения  $\frac{n!}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} = f(t)$ , где  $n \in N$ ,  $-1 < t < 1$ . При  $n=0$  это уравнение является сингулярным интегральным уравнением 1-го рода, широко применявшимся при решении контактных задач теории упругости.*

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\frac{n!}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} = f(t), \quad n \in N, \quad -1 < t < 1, \quad (1)$$

где интеграл, расходящийся в обычном смысле, понимается в смысле конечной части по Адамару ([1, с. 125–135]). При  $n=0$  уравнение (1) является сингулярным интегральным уравнением 1-го рода, широко применявшимся при решении контактных задач теории упругости [1]. Чтобы гарантировать существование конечной части интеграла (1), будем искать решения уравнения (1), которые при любом  $t_0 \in [-1, 1]$  допускают разложение по формуле Тейлора

$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k + r_n(t; t_0)$ , где  $r_n(t; t_0) = O((t-t_0)^{n+\lambda})$  при

некотором  $\lambda \in (0, 1]$ . Будем считать, что правая часть уравнения (1) – заданная функция,  $H$ -непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$ .

К уравнению (1) применим известный метод аналитического продолжения. С этой целью введем новую неизвестную функцию

$$\Phi(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-z)^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (2)$$

аналитическую вне отрезка  $[-1, 1]$ , и для ее предельных значений  $\Phi^\pm(t)$  сверху и снизу соответственно применим обобщенные формулы Сохоцкого [2]:

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t) + \frac{n!}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \\ \Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi^{(n)}(t) + \frac{n!}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} \end{cases}, \quad t \in (-1, 1). \quad (3)$$

Сложив эти равенства, перепишем уравнение (1) в виде следующей краевой задачи:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (4)$$

к которой для большей определенности надо добавить асимптотики функции  $\Phi(t)$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow -1$ ,  $z \rightarrow 1$ . Асимптотика при  $z \rightarrow \infty$  усматривается непосредственно из равенства (2):

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Асимптотики при  $z \rightarrow \pm 1$  найдем, применив к интегралу (2) интегрирование по частям:

$$u = \varphi(\tau), \quad du = \varphi'(\tau) d\tau, \quad dv = (\tau-z)^{-n-1} d\tau, \quad v = \frac{(\tau-z)^{-n}}{-n}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-z)^{n+1}} &= \frac{(\tau-z)^{-n}}{-n} \varphi(\tau) \Big|_{\tau=-1}^{\tau=1} + \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{(\tau-z)^n} = \\ &= \frac{(1-z)^{-n}}{-n} \varphi(1) + \frac{(-1-z)^{-n}}{n} \varphi(-1) + \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{(\tau-z)^n}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\Phi(z) = O\left(\frac{1}{(z \mp 1)^n}\right) \text{ при } z \rightarrow \pm 1. \quad (6)$$

Таким образом, уравнение (1) свелось к краевой задаче (4), решения которой должны удовлетворять асимптотическим равенствам (5) и (6).

Для решения этой последней задачи выделим аналитическую в области  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  ветвь функции  $w(z) = \sqrt{1-z^2}$ , предельные значения которой положительны на верхнем берегу разреза  $(-1, 1)$  и отрицательны на нижнем берегу. Тогда будет

$$\frac{w^+(t)}{w^-(t)} = -1 \text{ при } -1 < t < 1 \quad (7)$$

и

$$w(z) \asymp z \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad w(z) \asymp (z \mp 1)^{1/2} \text{ при } z \rightarrow \pm 1. \quad (8)$$

Условимся обозначать  $w(t) := w^+(t)$  при  $-1 < t < 1$  и будем рассматривать случаи четного и нечетного  $n$  отдельно.

При нечетном  $n = 2k + 1$ , умножив краевое условие (4) на  $[w(t)]^n$ , получим равенство

$$[w(t)]^n \Phi^+(t) + [w(t)]^n \Phi^-(t) = [w(t)]^n f(t), \quad t \in (-1, 1). \quad (9)$$

Учитывая соотношение (7), равенство (9) можно истолковать как краевое условие следующей задачи «о скачке»:

$$\left[ (w(t))^n \Phi(t) \right]^+ - \left[ (w(t))^n \Phi(t) \right]^- = (w(t))^n f(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (10)$$

для нахождения функции  $(w(z))^n \Phi(z)$ , исчезающей при  $z \rightarrow \infty$  и имеющей асимптотику  $O\left(\frac{1}{(z \mp 1)^{n/2}}\right)$  при  $z \rightarrow \pm 1$ .

Однородная (при  $f(t) \equiv 0$ ) задача (10) имеет  $2k$  линейно-независимых решений

$$(w(z))^n \Phi(z) = \frac{1}{(z-1)^k} \sum_{\nu=0}^{k-1} c_\nu z^\nu + \frac{1}{(z+1)^k} \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu z^\nu,$$

где  $c_\nu, d_\nu$  – произвольные постоянные. Таким образом, общее решение неоднородной задачи (4 – 6) можно представить в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(z)} \right)^n \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-z)} + \frac{1}{(w(z))^n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_\nu z^\nu}{(z-1)^k} + \frac{d_\nu z^\nu}{(z+1)^k} \right]. \quad (11)$$

Предельные значения этой функции на интервале  $(-1, 1)$  равны:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^n \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-t)} + \frac{1}{(w(t))^n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_\nu t^\nu}{(t-1)^k} + \frac{d_\nu t^\nu}{(t+1)^k} \right],$$

$$\Phi^{-}(t) = \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^n \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-t)} - \frac{1}{(w(t))^n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu}t^{\nu}}{(t-1)^k} + \frac{d_{\nu}t^{\nu}}{(t+1)^k} \right].$$

Вычитая из первой формулы (3) вторую, получим  $\varphi^{(n)}(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)$ , и, подставляя сюда найденные выражения, будем иметь:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^n \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-t)} + \frac{2}{(w(t))^n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu}t^{\nu}}{(t-1)^k} + \frac{d_{\nu}t^{\nu}}{(t+1)^k} \right].$$

Для определенности подчиним искомое решение уравнения (1) следующим начальным условиям:  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ . Тогда общее решение уравнения (1) представляется в виде:

$$\varphi(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(u)} \right)^n \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-u)} + \frac{2}{(w(u))^n} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu}u^{\nu}}{(u-1)^k} + \frac{d_{\nu}u^{\nu}}{(u+1)^k} \right] \right\} du.$$

Предположим теперь, что число  $n$  – четное. Пусть  $n = 2k$ . Тогда вместо задачи (10) будем рассматривать следующую задачу «о скачке»:

$$\left[ (w(t))^{n+1} \Phi(t) \right]^{+} - \left[ (w(t))^{n+1} \Phi(t) \right]^{-} = \left[ w(t) \right]^{n+1} f(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (12)$$

в классе функций  $(w(z))^{n+1} \Phi(z)$ , ограниченных при  $z \rightarrow \infty$  и имеющих асимптотику  $O\left(\frac{1}{(z \mp 1)^{k-1}}\right)$  при  $z \rightarrow \pm 1$ . Общее решение

однородной (при  $f(t) \equiv 0$ ) задачи (12) имеет вид:

$$c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu}z^{\nu}}{(z-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu}z^{\nu}}{(z+1)^{k-1}} \right],$$

где  $c, c_{\nu}, d_{\nu}$  – произвольные постоянные. Общее решение неоднородной задачи (12) при дополнительном условии

$$\int_{-1}^1 \left( w(\tau) \right)^{n+1} f(\tau) d\tau \equiv 0 \quad (13)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} (w(z))^{n+1} \Phi(z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( w(\tau) \right)^{n+1} \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau-z)} + c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu}z^{\nu}}{(z-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu}z^{\nu}}{(z+1)^{k-1}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда при том же условии (13) находим общее решение задачи (4):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(z)} \right)^{n+1} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-z)} + \frac{1}{(w(z))^{n+1}} \left\{ c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu} z^{\nu}}{(z-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu} z^{\nu}}{(z+1)^{k-1}} \right] \right\}.$$

Предельные значения этой функции на интервале  $(-1,1)$  сверху и снизу соответственно равны:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^{n+1} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-t)} + \frac{1}{(w(t))^{n+1}} \left\{ c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu} t^{\nu}}{(t-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu} t^{\nu}}{(t+1)^{k-1}} \right] \right\},$$

$$\Phi^-(t) = \frac{1}{2} f(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^{n+1} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-t)} - \frac{1}{(w(t))^{n+1}} \left\{ c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu} t^{\nu}}{(t-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu} t^{\nu}}{(t+1)^{k-1}} \right] \right\}.$$

Отсюда, учитывая, что  $\varphi^{(n)}(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ , находим:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(t)} \right)^{n+1} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-t)} + \frac{2}{(w(t))^{n+1}} \left\{ c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu} t^{\nu}}{(t-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu} t^{\nu}}{(t+1)^{k-1}} \right] \right\}.$$

Опять предположим, что  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ . Тогда, при выполнении условия (13), общее решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \left( \frac{w(\tau)}{w(u)} \right)^{n+1} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-u)} + \frac{2}{(w(u))^{n+1}} \left\{ c + \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \frac{c_{\nu} u^{\nu}}{(u-1)^{k-1}} + \frac{d_{\nu} u^{\nu}}{(u+1)^{k-1}} \right] \right\} \right\} du.$$

## Литература

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., Мир, 1989.
2. Зверович Э.И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці НАН Беларусі. 2012. №2. С. 24-28.

**O.B. Dolgoplova, E.I. Zverovich**  
Belarusian State University

## INVERSION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRAL WHICH IS TAKEN ON THE FINAL CUT

**Keywords:** *hypersingular integral equation, singular integral equation, theory of elasticity, contact problems, boundary value problems.*

**Abstract.** *The paper proposes a solution of the hypersingular integral equation  $\frac{n!}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} = f(t)$ , where  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 < t < 1$ . When  $n=0$  this equation is a singular integral equation of the first type, widely used in solving contact problems of the theory of elasticity.*

**Г.С. Евдокимова**

*Смоленский государственный университет*

УДК 519.2

## **ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ПОТЕРЬ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ**

*Ключевые слова: система с отказами, порядок поступления, периодические интенсивности, усреднение по периоду интенсивности потока обслуживания, эффективность системы.*

*В работе доказано, что если при нахождении характеристик систем массового обслуживания с переменными интенсивностями использовать «усреднение» по периоду интенсивности обслуживания, то это приведет к переоценке эффективности реальной системы и возможности допустить ошибку при оценке качества её работы.*

Многие возникающие на практике задачи не могут быть решены с помощью модели процессов гибели и размножения с постоянными интенсивностями, так как в действительности редко приходится иметь дело с постоянными интенсивностями потоков. Практически интенсивность появления требований на обслуживание и интенсивность обслуживания изменяются со временем и нередко представляют периодические функции. Например, интенсивность вызовов скорой медицинской помощи резко увеличивается в вечерние часы. В настоящее время аналитическое решение в стационарном режиме для систем массового обслуживания с периодическим входящим потоком и с переменной интенсивностью обслуживания получить не удалось.

Следовательно, на практике возникает желание избавиться от трудностей, связанных с наличием зависимости, и воспользоваться одним из следующих приемов: 1) исследовать систему массового обслуживания по максимуму интенсивности поступления требований; 2) исходить из «усредненной» по периоду интенсивности. При таких подходах, очевидно, в обоих случаях начинают действовать факторы, оказывающие влияние на эффективность работы обслуживающих систем, так как показатель эффективности системы зависит от



особенностей ситуации, в которой эксплуатируется система, в частности от параметров потока требований и обслуживания. В первом случае какое-то время система работает в недогруженном режиме, а во втором случае возникают периоды достаточно большой перегрузки.

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с потерями. Эти системы распространены достаточно широко. Особенностью их функционирования является то, что всякое требование, поступившее в систему в некоторый момент времени, либо начинает сразу обслуживаться, либо теряется, если в момент его поступления обслуживающий прибор занят. Сопоставим характеристики реальной с периодическими параметрами и усредненной по периоду систем массового обслуживания и убедимся, что усреднение по периоду интенсивности экспоненциального обслуживания способствует росту эффективности системы массового обслуживания.

Итак, в систему массового обслуживания поступает неоднородный пуассоновский поток требований с интенсивностью

$$\lambda(t) = \lambda(t+T).$$

Время обслуживания заявки – величина случайная, распределенная по экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu(t)$ , которая является периодической функцией времени с тем же периодом  $T$ :

$$\mu(t) = \mu(t+T).$$

Обозначим через  $P_k(t)$  вероятность того, что в течение промежутка времени длительности  $t$  системе будут предъявлены  $k$  требований  $k = 0, 1$ . Для определения вероятностей состояний может быть использована система дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \bar{P}'_0(t) &= -\lambda(t)P_0(t) + \mu(t)P_1(t), \\ \bar{P}'_1(t) &= -\mu(t)P_1(t) + \lambda(t)P_0(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения этой системы дифференциальных уравнений запишем нормирующее условие:

$$P_0(t) + P_1(t) = 1.$$

Введем преобразования времени  $\tau$ :

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t \mu(s) ds.$$

В этом случае при условии, что  $\bar{P}_k(\tau) = P_k(t)$ , система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{P}'_0(\tau) &= -\rho(\tau)\bar{P}_0(\tau) + \bar{P}_1(\tau), \\ \bar{P}'_1(\tau) &= -\bar{P}_1(\tau) + \rho(\tau)\bar{P}_0(\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho(\tau) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$ .

Если учесть нормирующее условие

$$\bar{P}_0(\tau) + \bar{P}_1(\tau) = 1,$$

то из двух уравнений (2) одно является лишним. Поэтому отбросим второе уравнение системы (2), а в первое подставим вместо  $\bar{P}_1(\tau)$  его выражение:  $(1 - \bar{P}_0(\tau))$ :

$$\bar{P}'_0(\tau) = 1 - (\rho(\tau) + 1)\bar{P}_0(\tau). \quad (3)$$

Полученное уравнение необходимо решать при следующих начальных условиях:

$$\bar{P}_k(0) = \delta_k.$$

Частное решение уравнения (3) в этих условиях принимает вид:

$$\bar{P}_0(\tau) = e^{-\int_0^\tau (\rho(z)+1)dz} \left[ 1 + \int_0^\tau e^{\int_0^u (\rho(z)+1)dz} du \right].$$

Под эффективностью обслуживающей системы понимают характеристику уровня выполнения этой системой тех функций, для которых она предназначена. Для данной ситуации рассмотрим в качестве такой характеристики среднее число потерь в единицу времени.

Поток потерянных заявок обозначим через  $\varphi(\tau)$ . Очевидно, что

$$M\varphi(\tau) = \int_0^\tau \rho(\tau)\bar{P}_1(\tau)d\tau.$$

Поэтому в стационарном режиме среднее число потерянных заявок в единицу времени можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} M\varphi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \rho(\tau)\bar{P}_1(\tau)d\tau, \\ \varphi &= \rho - 1 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \bar{P}_0(\tau)d(\tau), \end{aligned}$$

т.е.

$$\varphi = \rho - 1 + c\rho \cdot e^{-\int_0^\tau (\rho(z)+1)dz} \int_0^\tau e^{\int_0^u (\rho(z)+1)dz} du.$$

Наша задача: доказать неравенство

$$c\rho \cdot e^{-\int_0^\tau (\rho(z)+1)dz} \int_0^\tau e^{\int_0^u (\rho(z)+1)dz} du \geq \frac{1}{\rho+1}.$$

Введем обозначения:

$$c(\tau) = e^{\int_0^\tau (\rho(z)+1)dz}, \quad g(\tau) = e^{c(\tau)}, \quad \eta(\tau) = \frac{\int_0^\tau g(u)du}{e^{c(\tau)}}.$$

Полагая  $nT \leq \tau < (n+1)T$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^u g(u)du &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} g(u)du + \int_{nT}^{nT+v} g(u)du = \int_0^T g(s)ds \sum_{k=0}^{n-1} e^{kc} + \int_0^v g(s)ds e^{nc} = \\ &= \int_0^T g(s)ds \frac{e^{nc} - 1}{e^c - 1} + \int_0^v g(s)ds e^{nc}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\eta(\tau) = \frac{\int_0^\tau g(u)du}{e^{nc} e^{c(\nu)}} = \frac{\int_0^T g(s)ds \frac{1-e^{-nc}}{e^c-1} + \int_0^\nu g(s)ds}{g(\nu)}.$$

Предположим

$$I_\nu = \int_0^\nu g(s)ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} \eta(\tau)d\tau &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \eta(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{I_T \frac{1-e^{-kc}}{e^c-1} + I_\nu}{g(\nu)} d\nu = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T \frac{I_T \frac{1-e^{-kc}}{e^c-1} + I_\mu}{g(\nu)} d\nu = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{I_T}{e^c-1} \int_0^T \frac{d\nu}{g(\nu)} - \frac{I_T}{e^c-1} \int_0^T \frac{d\nu}{g(\nu)} d\nu e^{-kc} + \int_0^T \eta(\nu)d\nu \right\} = \\ &= n \int_0^T \eta(\nu)d\nu + I_T \frac{1}{e^c-1} \int_0^T \frac{d\nu}{g(\nu)} \left[ n - \frac{1-e^{-nc}}{1-e^{-c}} \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{nT}^{nT+v_n} \eta(\tau)d\tau &= \int_{nT}^{nT+v_n} \frac{I_T \frac{1-e^{-nc}}{e^c-1} + I_\nu}{g(\nu)} d\nu = \int_{nT}^{v_n} \frac{I_T \frac{1-e^{-nc}}{e^c-1} + I_\nu}{g(\nu)} d\nu = \\ &= I_T \frac{1-e^{-nc}}{e^c-1} \int_0^{v_n} \frac{d\nu}{g(\nu)} + \int_0^{v_n} \eta(\nu)d\nu \end{aligned}$$

ограничено, то

$$\begin{aligned} \text{ср.}\eta(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + v_n} \int_0^{nT} \eta(\tau)d\tau + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + v_n} \int_{nT}^{nT+v_n} \eta(\tau)d\tau = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nT}{nT + v_n} \int_0^T \eta(\nu)d\nu + \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \frac{1}{e^c-1} \int_0^T \frac{d\nu}{g(\nu)} \left[ \frac{nT}{nT + v_n} - \frac{1-e^{-nc}}{1-e^{-c}} \frac{1}{nT + v_n} \right] = \\ &= \int_0^T \eta(\nu)d\nu + \frac{I_T}{e^c-1} \int_0^T \frac{d\nu}{g(\nu)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
cp \cdot \eta(\tau) &= \int_0^T \eta(v) dv + \frac{I_T}{e^c - 1} \int_0^T \frac{dv}{g(v)} = \int_0^T \frac{I_v + \frac{I_T}{e^c - 1}}{g(v)} dv \geq \\
&\geq \frac{1}{\int_0^T \frac{g(v)}{I_v + \frac{I_T}{e^c - 1}} dv} = \frac{1}{\int_0^T d \ln \left( I_v + \frac{I_T}{e^c - 1} \right)} = \frac{1}{\ln e^c} = \frac{1}{c}.
\end{aligned}$$

Равенство будет иметь место лишь при выполнении условия

$$g(v) = \text{const} \left( I_v + \frac{I_T}{e^c - 1} \right). \quad (4)$$

Дифференцируя выражение (4), получаем:

$$c_v g(v) = \text{const} g(v), \quad c_v = \text{const}, \quad \eta(\tau) = \text{const}.$$

Заметим, что это возможно только тогда, когда

$$\frac{\lambda(t)}{\mu(t)} = \text{const}.$$

Окончательно получаем:

$$\varphi = \rho - 1 + cp \cdot e^{-\int_0^{\tau} (\rho(z)+1) dz} \int_0^{\tau} e^{\int_0^u (\rho(z)+1) dz} du, \quad \varphi \geq \rho - 1 + \frac{1}{\rho + 1} = \frac{\rho^2}{\rho + 1}.$$

Сказанное выше достаточно для уяснения смысла этого неравенства: среднее число потерь в единицу времени для реальной системы массового обслуживания больше, чем для усредненной по периоду системы. Следовательно, если при вычислении характеристик систем массового обслуживания с переменными интенсивностями идти по указанному пути усреднения, то это приведет к возможности допустить ошибку при оценке качества работы реальной системы.

### Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
2. Климов Г.П. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 2011. 312 с.

**G.S. Evdokimova**  
Smolensk State University

### ON THE EVALUATION OF THE AVERAGE NUMBER OF LOSSES FOR A SINGLE-CHANNEL QUEUING SYSTEM

**Keywords:** *system failures, order received, periodic intensity, averaging over the period of the flow services, the effectiveness of the system.*

**Abstract.** *It is proved that when finding the characteristics of Queuing systems with variable intensities use "averaging" over the period of intensity of service, it will lead to a reassessment of the effectiveness of the real system and the possibility to make a mistake in assessing the quality of its work.*

## ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ ХОЛЛА. I

Ключевые слова: инцидентностная структура с параллельностью, аффинная плоскость, тернар Холла, характеристика свойств тернара с помощью ассоциированных аффинных плоскостей, аффинные плоскости трансляций.

С произвольной тернарной алгеброй Холла ассоциируется определенная аффинная плоскость. Выясняется, каким условиям должна удовлетворять алгебра Холла, чтобы заданное некоторыми формулами преобразование точек аффинной плоскости являлась коллинеацией этой плоскости.

В данной работе рассматриваются преобразования точек плоскости, порождающие трансляции ассоциированной аффинной плоскости. В терминах тернарной алгебры найдены условия, при которых предложенные преобразования точек являются трансляциями.

Начнем с определения терминов теории инцидентностных структур, используемых в работе.

**Определение 1.** Тернарной алгеброй называется [1] алгебра  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  типа  $\langle 3, 0, 0 \rangle$ , то есть алгебра с тернарной операцией  $T$  и двумя выделенными элементами  $0$  и  $1$ ,  $0 \neq 1$ , в которой для любых элементов  $a, b, c, d$  из множества  $A$  выполняются аксиомы:

$$A1. T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b;$$

$$A2. T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a;$$

A3. Уравнение  $T(a, b, x) = c$  однозначно разрешимо в  $A$  относительно  $x$ ;

A4. Уравнение  $T(a, x, b) = T(c, x, d)$  при  $a \neq c$  однозначно определяет элемент  $x$  из  $A$ ;

A5. Система уравнений

$$\begin{cases} T(x, a, y) = b; \\ T(x, c, y) = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x, a, y) = b; \\ T(x, c, y) = d \end{cases}$$

при  $a \neq c$  однозначно определяет пару  $(x, y)$  из  $A \times A$ .

Вместе с термином «тернарная алгебра» в литературе также употребляются термины «тернар» и «тернар Холла».

**Определение 2.** Тернарная операция  $T$  алгебры порождает три бинарные операции:

$$a \cdot b = T(a, b, 0);$$

$$a + b = T(1, a, b);$$

$$a \oplus b = T(a, 1, b),$$

через которые сама операция  $T$  может быть выражена в некоторых частных случаях.

**Теорема 1.** Алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является лупой.

Действительно, из аксиомы  $A3$  при  $a = 1$  следует существование единственного решения уравнения  $b + x = c$ . Из аксиомы  $A4$  при  $a = 1$  и  $c = 0$  следует существование единственного решения уравнения  $x + b = d$ .

Тернарные алгебры были предложены Холлом в качестве аппарата для описания и исследования проективных (а вместе с тем, и аффинных) плоскостей.

Приведем конструкцию, которую использовал Холл для построения проективных и аффинных плоскостей (дадим аффинный вариант).

*Конструкция 1.* Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла. Инцидентностная структура с параллельностью  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ , где

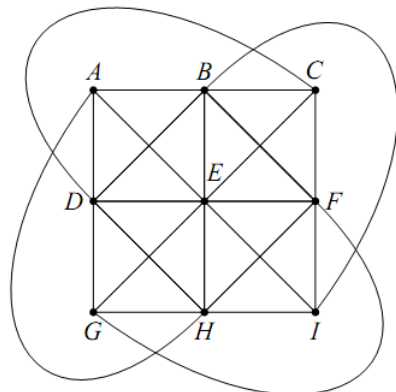
$P = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$	– множество точек;
$L = \{[m, n] \mid m, n \in A\} \cup \{[a] \mid a \in A\}$	– множество прямых;
$(a, b) I [m, n] \Leftrightarrow T(m, a, n) = b;$ $(a, b) I [c] \Leftrightarrow a = c$	– отношение инцидентности;
$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow a = c;$ $(\forall a, b \in A) [a] \parallel [b]$	– отношение параллельности.

является аффинной плоскостью. При этом структура  $S$  называется ассоциированной с тернаром  $R$ .

Инцидентностную структуру с параллельностью  $S$ , полученную из тернара  $R$  с помощью конструкции 1, будем обозначать  $S_R$ .

**Пример 1.** Пусть  $\langle \mathbb{Z}_3; +, \cdot \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ , – кольцо классов вычетов по модулю 3. Тогда алгебра  $\langle \mathbb{Z}_3; T, 0, 1 \rangle$ , где  $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ , является тернаром Холла.

Аффинная плоскость, полученная из тернара Холла с помощью конструкции 1, представлена на рисунке 1.



Точки		Прямые	
A	(0, 2)	GH	[0, 0]
B	(1, 2)	DE	[0, 1]
C	(2, 2)	AB	[0, 2]
D	(0, 1)	CG	[1, 0]
E	(1, 1)	BD	[1, 1]
F	(2, 1)	AH	[1, 2]
G	(0, 0)	BF	[2, 0]
H	(1, 0)	CD	[2, 1]
I	(2, 0)	AE	[2, 2]
		AD	[0]
		BE	[1]
		CF	[2]

Рис. 1. Аффинная плоскость над кольцом классов вычетов по модулю 3

**Определение 3.** Коллинеацией аффинной инцидентностной структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  (AI-структуры) [2] называется пара биекций  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1: P \rightarrow P$  и  $\alpha_2: L \rightarrow L$ , такая что:

$$(\forall p \in P) (\forall L \in L) (p \text{ I } L \Leftrightarrow \alpha_1(p) \text{ I } \alpha_2(L)).$$

Коллинеация  $\alpha$  инцидентностной структуры  $S$  называется *аффинной*, если она сохраняет параллельность прямых.

Ниже для образов точки  $p$  и прямой  $L$  будем использовать записи  $\alpha(p)$  и  $\alpha(L)$  соответственно без указания нижних индексов.

Заметим, что:

1) не каждая пара биекций  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  является коллинеацией аффинной инцидентностной структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ ;

2) задание одной из биекций  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  даже при условии сохранения отношения инцидентности не определяет вторую биекцию;

3) коллинеация  $\alpha$  аффинной инцидентностной структуры  $S$  не сохраняет параллельность прямых;

4) коллинеация  $\alpha$  аффинной плоскости  $S$  является аффинной.

Аффинная коллинеация  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , такая что

$$(\forall p \in P) \alpha_1(p) \neq p \text{ и } (\forall L \in L) (\alpha_2(L) \parallel L),$$

называется *трансляцией* аффинной плоскости.

В настоящей работе мы выясним, каким условиям должен удовлетворять тернар Холла  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ , чтобы отображение  $\alpha_1: P \rightarrow P$  на множестве точек ассоциированной с  $R$  аффинной плоскости  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  являлось коллинеацией.

**Теорема 2.** Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла и  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  – ассоциированная с  $R$  аффинная плоскость.

Для любого  $a$  из  $A$  каждое из отображений

$$\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x, y + b)$$

тогда и только тогда является трансляцией, когда тернар  $R$  удовлетворяет условиям:

a) алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является группой;

b)  $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ .

**Доказательство.** Пусть отображение  $\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x, y + b)$ ,  $b \neq 0$ , является коллинеацией  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ . Докажем, что образ  $\alpha_2(L)$  любой прямой  $L$  аффинной плоскости параллелен прямой  $L$ .

От противного, пусть  $p = (c, d)$  – точка пересечения прямых  $L$  и  $\alpha_2(L)$ . Введем обозначения:  $M = \alpha_2(L)$  и  $N = [c]$ . Заметим, что точка  $p$  инцидентна прямым  $L, M, N$ . Поэтому

$$\alpha(p) = \alpha(L \cap M) = \alpha(L \cap N) = \alpha(L) \cap \alpha(N) = M \cap N = p;$$

$$(c, d + b) = (c, d);$$

$$d + b = d.$$

По аксиоме  $A3$  тернара Холла получаем  $b = 0$ . Полученное противоречие доказывает параллельность прямых  $L$  и  $\alpha_2(L)$ :

$L \parallel \alpha_2(L)$ .

Исследуем теперь свойства отображения  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}(0, d) &\rightarrow (0, d + b); \\ [m, d] &\rightarrow [m, d + b]; \\ (x, T(m, x, d)) &\rightarrow (x, T(m, x, d) + b).\end{aligned}$$

Так как коллинеации сохраняют инцидентность точек и прямых, получаем:

$$T(m, x, d) + b = T(m, x, d + b). \quad (2.1)$$

При  $m = 1$  из (2.1) получаем:

$$(x + d) + b = x + (d + b). \quad (2.2)$$

Из (2.2) и теоремы 1 следует, что алгебра  $\langle \mathbf{A}; +, 0 \rangle$  является группой.

При  $b = -d$  из (1) получаем:

$$\begin{aligned}T(m, x, d) + (-d) &= T(m, x, d + (-d)); \\ T(m, x, d) + (-d) &= m \cdot x; \\ T(m, x, d) &= m \cdot x + d.\end{aligned} \quad (2.3)$$

Что и требовалось доказать.

Обратно, если тернар Холла  $R = \langle \mathbf{A}; T, 0, 1 \rangle$  удовлетворяет условиям а), б), то отображение  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\begin{aligned}\alpha_1: (x, y) &\rightarrow (x, y + b); \\ \alpha_2: [m, d] &\rightarrow [m, d + b]; \\ \alpha_2: [m] &\rightarrow [m]\end{aligned}$$

является трансляцией аффинной плоскости  $S_R = \langle \mathbf{P}, \mathbf{L}; \mathbf{I}, \parallel \rangle$ , ассоциированной с тернаром  $R$ .

**Теорема 3.** Из условия  $T(a, b, c) = a \cdot b + c$  следует равенство

$$a \oplus b = a + b.$$

**Доказательство.**

$$a \oplus b = T(a, 1, b) = a \cdot 1 + b = 1 \cdot a + b = T(1, a, b) = a + b.$$

**Теорема 4.** Пусть  $R = \langle \mathbf{A}; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла и  $S_R = \langle \mathbf{P}, \mathbf{L}; \mathbf{I}, \parallel \rangle$  – ассоциированная с  $R$  аффинная плоскость.

Для любого  $a$  из  $\mathbf{A}$  каждое из отображений

$$\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x + a, y)$$

тогда и только тогда является коллинеацией, когда тернар  $R$  удовлетворяет условиям:

а) алгебра  $\langle \mathbf{A}; +, 0 \rangle$  является группой;

б)  $T(m, c + a, T(m, -a, d)) = T(m, c, d)$ .

**Доказательство.** Пусть отображение  $\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x + a, y)$  является коллинеацией  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ .

Коллинеация  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  является аффинной (обоснование подобно доказательству в теореме 2).

Рассмотрим теперь действие коллинеации  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}(c, T(m, c, d)) &\rightarrow (c + a, T(m, c, d)); \\ [m, d] &\rightarrow [m, d].\end{aligned}$$



Так как коллинеации сохраняют инцидентность точек и прямых, получаем:

$$T(m, c + a, d_1) = T(m, c, d). \quad (4.1)$$

При  $c = -a_l$  из (4.1) получаем:

$$d_1 = T(m, -a_l, d).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [m, d] &\rightarrow [m, T(m, -a_l, d)]; \\ (c, T(m, c, d)) &\rightarrow (c + a, T(m, c, d)); \end{aligned}$$

$$T(m, c + a, T(m, -a_l, d)) = T(m, c, d). \quad (4.2)$$

При  $m = 1$  и  $d = 0$  из (4.2) получаем:

$$\begin{aligned} (c + a) + -a_l &= c; \\ -a_l &= -a_r = -a; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$T(m, c + a, T(m, -a, d)) = T(m, c, d). \quad (4.4)$$

При  $m = 1$  из (4.4) получаем:

$$(c + a) + (-a + d) = c + d. \quad (4.5)$$

При  $c = 0$  получаем:

$$a + (-a + d) = d. \quad (4.6)$$

При  $d = a + e$  из (4.5), с учетом (4.6), получаем:

$$(c + a) + e = c + (a + e). \quad (4.7)$$

Из (4.7) и теоремы 1 следует, что алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является группой.

Что и требовалось доказать.

Обратно, если тернар Холла  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  удовлетворяет условиям а) и б), то отображение  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1: (x, y) &\rightarrow (x + a, y); \\ \alpha_2: [m, d] &\rightarrow [m, T(m, -a_l, d)]; \\ \alpha_2: [m] &\rightarrow [m] \end{aligned}$$

является трансляцией аффинной плоскости  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  ассоциированной с  $R$ .

**Теорема 5.** Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла и  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  – ассоциированная с  $R$  аффинная плоскость.

Для любых  $a$  и  $b$  из  $A$  каждое из отображений

$$\begin{aligned} \alpha_1: (x, y) &\rightarrow (x + a, y) \\ \beta_1: (x, y) &\rightarrow (x, y + b) \end{aligned}$$

тогда и только тогда является коллинеацией, когда тернар  $R$  удовлетворяет условиям:

- $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ ;
- алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является абелевой группой;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;

**Доказательство.** Пусть отображения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  являются коллинеациями. Из теорем 2 и 4 следует, что в тернаре  $R$  выполняются условия:

$$T(a, b, c) = a \cdot b + c; \quad (5.1)$$

$$\text{алгебра } \langle A; +, 0 \rangle - \text{группа:} \quad (5.2)$$

$$T(m, c + a, T(m, -a, d)) = T(m, c, d). \quad (5.3)$$

При  $d = 0$  и  $c = 0$  из (5.3) получаем:

$$m \cdot a + m \cdot (-a) = 0$$

или

$$m \cdot (-a) = -(m \cdot a).$$

С учетом полученного равенства при  $d = 0$  из (5.3) получаем условие с):

$$m \cdot (c + a) + m \cdot (-a) = m \cdot c;$$

$$m \cdot (c + a) = m \cdot c + m \cdot a.$$

Из теорем 2 и 4 следует, что ассоциированная с  $R$  аффинная плоскость  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  транзитивна в двух направлениях и, следовательно, является плоскостью трансляций. В аффинной плоскости композиция двух трансляций коммутативна, то есть не зависит от порядка их выполнения.

Пусть

$$\alpha: (x, y) \rightarrow (x + a, y);$$

$$\beta: (x, y) \rightarrow (x + b, y)$$

трансляции (переносы) аффинной плоскости  $S_R$ . Тогда

$$\begin{aligned} (a + b, 0) &= \beta(\alpha(0, 0)) = (\beta\alpha)(0, 0) = (\alpha\beta)(0, 0) = \alpha(\beta(0, 0)) = \\ &= \alpha(b, 0) = (b + a, 0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a + b = b + a,$$

алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является абелевой группой.

Что и требовалось доказать.

Обратно, если тернар Холла  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  удовлетворяет условиям а), б), с), то отображение  $\alpha$ :

$$(x, y) \rightarrow (x + (x_2 - x_1), y + (y_2 - y_1))$$

является трансляцией аффинной плоскости  $S_R$ , переводящей произвольную точку  $(x_1, y_1)$  в точку  $(x_2, y_2)$ .

Таким образом, аффинная плоскость  $S_R$  является плоскостью трансляций.

## Литература

1. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностранной литературы. 1962. 466 с.
2. Аргунов Б.И., Емельченков Е.П. Инцидентностные структуры и тернарные алгебры // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. Вып. 2 (224). С. 3-37.

**Emelchenkov E. P.**  
Smolensk State University

## TERNARY HALL ALGEBRAS. I

**Keywords:** *incident structure with parallelism, affine plane, Hall ternar, characteristic of ternar properties by associated affine planes, affine translation planes.*

**Abstract.** *Free ternary Hall algebra is associated with certain affine plane. It is found out what conditions the Hall algebra must satisfy in order for the transformation of the points of the affine plane given by some formulas to be a collineation of this plane.*

*This paper discusses the transformation of points in the plane that generates the broadcast of the associated affine plane. In terms of ternary algebra, the conditions under which the proposed point transformations are translations are found.*

**Е.П. Емельченков, Е.И. Гончаров**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 514.14 + 514.16

## ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ ХОЛЛА. II

**Ключевые слова:** *инцидентностная структура с параллельностью, аффинная плоскость, тернар Холла, характеристика свойств тернара с помощью ассоциированных аффинных плоскостей, аффинные плоскости трансляций.*

*С произвольной тернарной алгеброй Холла ассоциируется определенная аффинная плоскость. Выясняется, каким условиям должна удовлетворять алгебра Холла, чтобы заданное некоторыми формулами преобразование точек аффинной плоскости являлось коллинеацией этой плоскости.*

*Рассматриваются преобразования точек плоскости, порождающие гомотетии ассоциированной аффинной плоскости.*

Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. Ниже приведены основные результаты из этой работы.

**Определение 1.** *Тернарной алгеброй называется [2] алгебра  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  типа  $\langle 3, 0, 0 \rangle$ , то есть алгебра с тернарной операцией  $T$  и двумя выделенными элементами  $0$  и  $1$ ,  $0 \neq 1$ , в которой для любых элементов  $a, b, c, d$  из множества  $A$  выполняются аксиомы:*

$$A1. T(a, 0, b) = T(0, a, b) = b;$$

$$A2. T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a;$$

A3. Уравнение  $T(a, b, x) = c$  однозначно разрешимо в  $A$  относительно  $x$ ;

A4. Уравнение  $T(a, x, b) = T(c, x, d)$  при  $a \neq c$  однозначно определяет элемент  $x$  из  $A$ ;

A5. Система уравнений

$$\begin{cases} T(x, a, y) = b; \\ T(x, c, y) = d \end{cases}$$

при  $a \neq c$  однозначно определяет пару  $(x, y)$  из  $A \times A$ .

Вместе с термином «тернарная алгебра» в литературе также употребляются термины «тернар» и «тернар Холла».

**Определение 2.** Тернарная операция  $T$  алгебры порождает три бинарные операции:

$$a \cdot b = T(a, b, 0);$$

$$a + b = T(1, a, b);$$

$$a \oplus b = T(a, 1, b),$$

через которые сама операция  $T$  может быть выражена в некоторых частных случаях.

Тернарные алгебры были предложены Холлом [2] в качестве аппарата для описания и исследования проективных (а вместе с тем, и аффинных) плоскостей.

Приведем здесь конструкцию, которую использовал Холл для построения проективных и аффинных плоскостей (дадим аффинный вариант). Каждой тернарной алгебре Холл сопоставлял аффинную плоскость с помощью конструкции 1.

*Конструкция 1.* Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  - тернар Холла. Инцидентностная структура с параллельностью  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ , где

$P = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$	- множество точек;
$L = \{[m, n] \mid m, n \in A\} \cup \{[a] \mid a \in A\}$	- множество прямых;
$(a, b) I [m, n] \Leftrightarrow T(m, a, n) = b;$ $(a, b) I [c] \Leftrightarrow a = c$	- отношение инцидентности;
$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow a = c;$ $(\forall a, b \in A) [a] \parallel [b]$	- отношение параллельности.

является аффинной плоскостью. При этом структура  $S$  называется *ассоциированной* с тернаром  $R$ .

Инцидентностную структуру с параллельностью  $S$ , полученную из тернара  $R$  с помощью конструкции 1, будем обозначать  $S_R$ .

**Определение 3.** *Коллинеацией* аффинной инцидентностной структуры  $S = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  (AI-структуры) [2] называется пара биекций  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1: P \rightarrow P$  и  $\alpha_2: L \rightarrow L$ , такая что:

$$(\forall p \in P) (\forall L \in L) (p I L \Leftrightarrow \alpha_1(p) I \alpha_2(L)).$$

Коллинеация  $\alpha$  инцидентностной структуры  $S$  называется *аффинной*, если она сохраняет параллельность прямых.

Ниже для образов точки  $p$  и прямой  $L$  будем также использовать записи  $\alpha(p)$  и  $\alpha(L)$  соответственно без указания нижних индексов.

В работе [1, теорема 5] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла и  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  – аффинная плоскость ассоциированная с  $R$ .

Для любых  $a$  и  $b$  из  $A$  каждое из отображений

$$\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x + a, y),$$

$$\beta_1: (x, y) \rightarrow (x, y + b)$$

тогда и только тогда является трансляцией, когда тернар  $R$  удовлетворяет условиям:

a)  $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ ;

b) алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является абелевой группой;

c)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Отсюда, в частности, следует, что аффинная плоскость  $S_R$  является плоскостью трансляций.

В настоящей работе мы выясним, каким условиям должен удовлетворять тернар Холла  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$ , чтобы отображение  $\alpha_1: P \rightarrow P$  на множестве точек ассоциированной с  $R$  аффинной плоскости  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  являлось гомотетией.

**Определение 4.** Коллинеация  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  аффинной плоскости называется *гомотетией с центром  $o$* , если

$$\alpha_1(o) = o;$$

$$\alpha_2(L) \parallel L \text{ для любой прямой } L \text{ из } L.$$

**Теорема 2.** Пусть  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  – тернар Холла и  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$  – ассоциированная с  $R$  аффинная плоскость.

Для любого  $k \neq 0$  из  $A$  каждое из отображений

$$\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x \cdot k, y \cdot k)$$

тогда и только тогда является гомотетией с центром  $o$ , когда тернар  $R$  удовлетворяет условиям:

a)  $T(a, b, c) \cdot k = T(a, b \cdot k, c \cdot k)$ ;

b)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ;

c)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;

d) алгебра  $\langle A \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$  является группой.

**Доказательство.** Пусть отображение  $\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x \cdot k, y \cdot k)$  является коллинеацией  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ .

$$(0, 0) \rightarrow (0, 0);$$

$$(1, m) \rightarrow (k, m \cdot k);$$

$$[m, 0] \rightarrow [m, 0].$$

Так как коллинеации аффинной плоскости сохраняют отношение параллельности, то образ произвольной прямой  $[m, d]$  параллелен данной прямой:

$$\alpha_2([m, d]) \parallel [m, d].$$

Далее:

$$\begin{aligned} (0, d) &\rightarrow (0, d \cdot k); \\ [m, d] &\rightarrow [m, d \cdot k]; \\ (c, T(m, c, d)) &\rightarrow (x \cdot k, T(m, c, d) \cdot k). \end{aligned}$$

Так как коллинеации аффинной плоскости сохраняют отношение инцидентности, то

$$T(m, c, d) \cdot k = T(m, c \cdot k, d \cdot k). \quad (1.1)$$

Равенство а) доказано.

При  $m = 1$  из (1.1) получаем равенство б)

$$(c + d) \cdot k = c \cdot k + d \cdot k. \quad (1.2)$$

При  $d = 0$  из (1.1) получаем равенство с)

$$(m \cdot c) \cdot k = m \cdot (c \cdot k). \quad (1.3)$$

Докажем теперь, что алгебра  $\langle A \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$  является группой.

По аксиоме тернара Холла  $A4$  уравнение  $T(a, x, b) = T(c, x, d)$  при  $a \neq c$  однозначно определяет элемент  $x$  из  $A$ . Положив  $b = 0$  и  $c = 0$ , при  $a \neq 0$  получаем однозначную разрешимость уравнения

$$a \cdot x = d. \quad (1.4)$$

По аксиоме тернара Холла  $A5$  система уравнений

$$\begin{cases} T(x, a, y) = b; \\ T(x, c, y) = d \end{cases}$$

при  $a \neq c$  однозначно определяет пару  $(x, y)$  из  $A \times A$ . Положив  $c = 0$  и  $d = 0$ , при  $a \neq 0$ , получаем систему, однозначно определяющую пару  $(x, y)$ ,

$$\begin{cases} T(x, a, y) = b; \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение

$$a \cdot x = d \quad (1.5)$$

однозначно разрешимо.

Из (1.3) – (1.5) следует, что алгебра  $\langle A \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$  является группой.

Из определения 1 следует, что отображение  $\alpha$  является гомотетией.

Обратно, если тернар Холла  $R = \langle A; T, 0, 1 \rangle$  удовлетворяет условиям

а) – д), то отображение  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\alpha_1: (x, y) \rightarrow (x \cdot k, y \cdot k);$$

$$\alpha_2: [m, d] \rightarrow [m, d \cdot k];$$

$$\alpha_2: [c] \rightarrow [c \cdot k]$$

является гомотетией с центром в точке  $(0, 0)$  аффинной плоскости  $S_R = \langle P, L; I, \parallel \rangle$ , ассоциированной с тернаром Холла  $R$ .

**Теорема 3.** Множество всех гомотетий с центром в точке  $o$  образует группу относительно операции композиции коллинеаций.

Доказательство состоит в проверке аксиом группы для множества всех гомотетий с центром в точке  $o$ .

**Определение 5.** Аффинная плоскость называется  $o$ -транзитивной, если для любых двух точек  $p$  и  $q$ , отличных от  $o$ , таких, что  $p \perp oq$ , существует гомотетия с центром  $o$ , переводящая точку  $p$  в  $q$ .

**Теорема 4.** Аффинная плоскость  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ ,  $o$ -транзитивная для любой точки  $o$  из  $P$ , является плоскостью трансляций.

**Доказательство.** Пусть  $p$  и  $q$  – две различные точки из  $P$ . Выберем произвольную точку  $r$ , не инцидентную прямой  $pq$ .

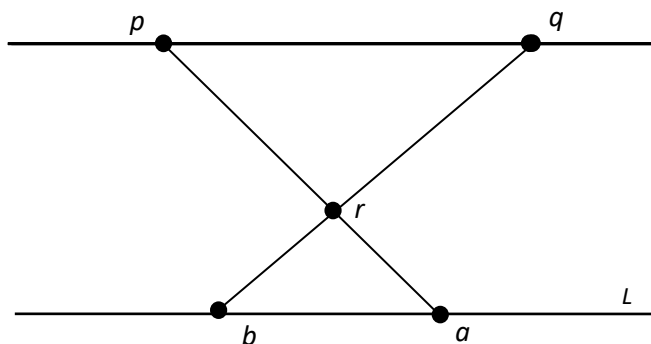


Рис. 1. Композиция гомотетий с центрами  $a$  и  $b$

Пусть  $L$  – прямая плоскости параллельная прямой  $pq$  и  $r \notin L$  (рис. 1). Выберем точки  $a = pr \cap L$  и  $b = qr \cap L$  в качестве центров гомотетий  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Пусть также  $\alpha(p) = r$  и  $\beta(r) = q$ . Тогда

$$(\beta \circ \alpha)(p) = q.$$

Композиция  $\gamma = (\beta \circ \alpha)$  не имеет неподвижных точек. В противном случае для любой точки  $d$  прямая  $d\alpha(d)$  проходила бы через такую точку. В нашем случае это невозможно, ибо  $\gamma(pq) = pq$ ,  $\gamma(L) = L$  и  $pq \parallel L$ ,  $pq \neq L$ .

Таким образом, композиция  $\beta \circ \alpha$  рассматриваемых гомотетий является трансляцией, переводящей точку  $p$  в точку  $q$ , и, следовательно, аффинная плоскость  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$  является плоскостью трансляций.

**Теорема 5.** Тернар Холла, координатизирующий аффинную плоскость  $\langle P, L; I, \parallel \rangle$ ,  $o$ -транзитивную для любой точки  $o$  из  $P$ , удовлетворяет следующим условиям:

- a)  $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ ;
- b) алгебра  $\langle A; +, 0 \rangle$  является абелевой группой;
- c) алгебра  $\langle A \setminus \{0\}; \cdot, 1 \rangle$  является группой;
- d)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;
- e)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Доказательство следует из теорем 1, 2, 4.

## Литература

1. Емельченков Е.П. Тернарные алгебры Холла. I // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XX международной конференции. Вып. 20. Смоленск: СмолГУ, 2019. С. 53-59.
2. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностранной литературы. 1962. 466 с.

**E. P. Emelchenkov, E.I. Goncharov**  
Smolensk State University

## TERNARY HALL ALGEBRAS. II

**Keywords:** *incident structure with parallelism; affine plane, Hall ternar, characteristic of ternar properties by associated affine planes, affine translation planes.*

**Abstract.** *Free ternary Hall algebra is associated with certain affine plane. It is found out what conditions the Hall algebra must satisfy in order for the transformation of the points of the affine plane given by some formulas to be a collineation of this plane.*

*This paper discusses the transformation of points in the plane, a generating homothety associated affine plane.*

**Э.И. Зверович**

*Белорусский государственный университет*

УДК 517.948.32:517.544

## ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ $h$ -КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Ключевые слова:  $h$ -комплексные числа,  $h$ -аналитические функции, аналог уравнений Коши – Римана, характеристики, дробно-линейные функции, групповое свойство, гиперболическое свойство, симметрия относительно гиперболы, сохранение симметрии.

Автор рассматривает имеющие  $\mathcal{D}$ -производные и  $\mathcal{D}$ -дифференцируемые отображения  $f: A \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $A \subset \mathcal{D}$ , где  $\mathcal{D}$  – множество всех  $h$ -комплексных чисел, т.е. чисел вида  $x + jy$ , где  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $j^2 = 1, j \neq \pm 1$ . Такие отображения называются  $h$ -аналитическими функциями. Их вещественная и мнимая части удовлетворяют уравнению колебаний струны. Общее выражение для  $h$ -аналитических функций известно. Одно из свойств таких функций: образы характеристик  $x + y = \text{const}$  являются характеристиками  $u + v = \text{const}$ . Изучаются свойства дробно-линейных  $h$ -аналитических



функций. Устанавливается, например, их групповое свойство, свойство отображать гиперболы на гиперболы и сохранять пары точек, симметричные относительно гипербол.

Через  $\mathbb{D}$  условимся обозначать множество всех  $h$ -комплексных чисел, т.е. чисел вида  $a + jb$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $j^2 = -1$ ,  $j \neq \pm 1$  ( $h$ -число  $j$  условимся называть  $h$ -мнимой единицей).  $h$ -комплексные числа называются также двойными, полукомплексными, гиперболическими квазичислами, расщепленными комплексными числами. Как известно [1–5], такие числа образуют коммутативную и ассоциативную алгебру  $\mathbb{D}$  с делителями нуля, каковыми являются числа вида  $\alpha \pm j\alpha$ , где  $\alpha \in \mathbf{R}$ , и только они. Функции вида  $f : A \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $A \subset \mathbb{D}$ , имеющие  $h$ -производные (в обычном смысле), называются  $h$ -аналитическими. Их теория во многом аналогична теории аналитических функций комплексного переменного.

$h$ -производная двойной функции  $h$ -комплексного переменного в точке  $z_0 \in A$  определяется обычным равенством

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{D}, \quad (1)$$

где  $h \rightarrow 0$ , не принимая значений  $\alpha \pm j\alpha$ , на которые делить нельзя.

Функция  $f$  называется  $\mathbb{D}$ -дифференцируемой в точке  $z_0$ , если существует такое  $\mathbb{D}$ -линейное отображение  $l : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , что

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = l(h) + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (2)$$

Оказывается, что  $\mathbb{D}$ -дифференцируемость равносильна существованию производной  $f'(z_0) \in \mathbb{D}$ , причем дифференциал функции  $f$  в точке  $z_0$  на векторе  $h$  равен

$$Df(z_0)(h) = l(h) = f'(z_0) \cdot h.$$

Положив  $w = u + jv$ ,  $z = x + jy$ , где  $x, y, u, v \in \mathbf{R}$ , перепишем функцию  $w = f(z)$  в виде  $u + jv = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ . Выделив здесь вещественную и мнимую части, запишем эту функцию в виде отображения из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

Положим  $h = h_1 + jh_2$ , где  $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$ . Из существования конечного предела (1) вытекают следующие равенства:

$$f'(z) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{u(x + h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + j \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{v(x + h_1, y) - v(x, y)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{u(x, y + h_2) - u(x, y)}{jh_2} + j \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{v(x, y + h_2) - v(x, y)}{jh_2} = j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приравняв здесь вещественные и мнимые части, получим следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4)$$

которые аналогичны уравнениям Коши – Римана из комплексного анализа. Дифференцируя одно из этих равенств по одной из переменных  $x$ ,  $y$ , а другое – по другой, вычитая одно из полученных равенств из другого, заключаем, что вещественная и мнимая части  $h$ -аналитической функции удовлетворяют уравнению колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Поскольку явный вид общего решения уравнения колебаний струны известен, то легко выписать и явный вид произвольной  $h$ -аналитической функции

$$w = u + jv = [\varphi(x + y) + \psi(x - y)] + j \cdot [\varphi(x + y) - \psi(x - y)], \quad (6)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные функции одного переменного, имеющие производные достаточно высоких порядков.

**Определение.** Характеристиками уравнений (5) называются линии  $x + y = const$  и  $x - y = const$ .

**Теорема 1.** Любая  $h$ -аналитическая функция отображает характеристики  $x + y = const$  в характеристики  $u + v = const$ , а характеристики  $x - y = const$  – в характеристики  $u - v = const$ .

◀ Выделив в (6) вещественную и мнимую части, запишем  $h$ -аналитическую функцию в виде отображения из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{cases} u = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \\ v = \varphi(x + y) - \psi(x - y). \end{cases} \quad (7)$$

Положив здесь  $x - y = a$ , получим

$$\begin{cases} u = \varphi(x + y) + \psi(a), \\ v = \varphi(x + y) - \psi(a). \end{cases} \quad (8)$$

Вычтя из первого равенства второе, получим  $u - v = 2\psi(a)$ . Положив в (7)  $x + y = b$ , получим

$$\begin{cases} u = \varphi(b) + \psi(x - y), \\ v = \varphi(b) - \psi(x - y). \end{cases} \quad (9)$$

Сложив эти равенства, найдем  $u + v = 2\varphi(b)$ . ▶

Простейшими примерами  $h$ -аналитических функций являются дробно-линейные функции. Изучим их подробнее. Сначала рассмотрим целую линейную функцию  $w = Az + B$ , где  $A \neq 0$ . Очевидно, что  $w' = A$ . Положив  $z = x + jy$ ,  $w = u + jv$ ,  $A = \alpha + j\beta$ ,  $B = \gamma + j\delta$ , где

$x, y, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ , запишем функцию  $w = Az + B$  в виде аффинного отображения из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{cases} u = \alpha x + \beta y + \gamma, \\ v = \beta x + \alpha y + \delta. \end{cases} \quad (10)$$

Якобиан этого отображения равен

$$J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2.$$

Таким образом, линейное отображение не вырождается и переводит  $\mathbf{R}^2$  на  $\mathbf{R}^2$  с сохранением ориентации при  $\alpha^2 - \beta^2 > 0$ , с изменением ориентации при  $\alpha^2 - \beta^2 < 0$ , вырождается при  $\alpha^2 = \beta^2$ , отображая при этом всю плоскость  $\mathbf{R}^2$  на характеристику.

**Теорема 2.** *Множество всех невырожденных целых линейных отображений, снабженное операцией композиции отображений, является группой.*

◀ Пусть  $L_1(z) = A_1z + B_1$ ,  $L_2(z) = A_2z + B_2$  — невырожденные линейные отображения. Их композиция

$$L_1(L_2(z)) = A_1 \cdot (A_2z + B_2) + B_1 = A_1A_2z + (A_1B_2 + B_1)$$

является, очевидно, целым линейным отображением, притом невырожденным, так как ни  $A_1$ , ни  $A_2$ , ни  $A_1A_2$  не являются делителями нуля. Единицей служит тождественное отображение  $E(z) \equiv z$ . Обратным к невырожденному отображению  $w = Az + B$  является отображение  $z = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$ . ▶

Уравнение гиперболы, асимптотами которой являются характеристики, имеет вид

$$(w - a)\overline{(w - a)} = r \text{ или } w\bar{w} - a\bar{w} - \bar{a}w + (a\bar{a} - r) = 0, \quad (11)$$

где  $a \in \mathbb{D}$ ,  $r \in \mathbf{R}$ ,  $r \neq 0$ .

**Теорема 3.** *Невырожденные целые линейные функции обладают «гиперболическим» свойством, т.е. отображают гиперболы вида (11) на гиперболы такого же вида.*

◀ Подставим в уравнение  $(w - a)\overline{(w - a)} = r$  функцию  $w = Az + B$ , где  $A \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  и не является делителем нуля. Тогда получим  $(Az + B - a)\overline{(Az + B - a)} - r = 0$ . Это равенство преобразуется к виду

$$A\bar{A}z\bar{z} + A(\overline{B - a})z + \bar{A}(B - a)\bar{z} + (B - a)\overline{(B - a)} - r = 0. \quad (12)$$

Разделив последнее равенство на  $A\bar{A} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , получим уравнение вида (11). ▶

Отображение симметрии  $z^* \leftrightarrow z$  относительно гиперболы  $(z - a)\overline{(z - a)} = r$  определяется равенством  $(z^* - a)\overline{(z - a)} = r$ . Очевидно,

что точки  $z$  и  $z^*$ , симметричные относительно гиперболы, лежат на луче, выходящем из центра этой гиперболы, и расположены по разные стороны от гиперболы. Точки гиперболы и только они симметричны сами себе.

**Теорема 4.** *Невырожденные целые линейные функции обладают свойством сохранения симметричных пар точек.*

◀ Надо показать, что при невырожденном линейном отображении  $w = Az + B$  любая пара точек, симметричных относительно гиперболы вида  $(w-a)\overline{(w-a)} = r$ , переходит на пару точек, симметричных относительно образа этой гиперболы.

Подставив  $w^* = Az^* + B$  в уравнение  $(w^* - a)\overline{(w^* - a)} = r$ , получим

$$A\bar{A}z^*\bar{z} + A(\overline{B-a})z^* + \bar{A}(B-a)\bar{z} + (B-a)\overline{(B-a)} - r = 0.$$

Это равенство показывает, что точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно гиперболы (12). ▶

Переходим к рассмотрению дробно-линейных функций, т.е. функций вида

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad (13)$$

ограничившись только такими функциями, для которых  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$  и не является делителем нуля. Такие функции условимся называть *невырожденными*. При  $C = 0$  невырожденность функции (13) означает, что ни  $A$ , ни  $D$  не являются делителями нуля. Поэтому невырожденные целые линейные функции являются частными видами невырожденных дробно-линейных функций.

**Теорема 5.** *Множество всех невырожденных дробно-линейных функций, снабженное операцией композиции функций, является группой.*

◀ Пусть  $L_1(z) = \frac{A_1z + B_1}{C_1z + D_1}$ ,  $L_2(z) = \frac{A_2z + B_2}{C_2z + D_2}$  – невырожденные дробно-линейные функции. Их композиция равна

$$L_1(L_2(z)) = \frac{A_1 \cdot \left( \frac{A_2z + B_2}{C_2z + D_2} \right) + B_1}{C_1 \cdot \left( \frac{A_2z + B_2}{C_2z + D_2} \right) + D_1} = \frac{(A_1A_2 + B_1C_2)z + (A_1B_2 + B_1D_2)}{(C_1A_2 + D_1C_2)z + (C_1B_2 + D_1D_2)}.$$

Получили дробно-линейную функцию, коэффициенты которой образуются по тому же закону, по которому перемножаются матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей, то полученная в результате композиции дробно-

линейная функция – невырожденная. Кроме того, операция умножения матриц ассоциативна. Нейтральным элементом служит тождественное отображение  $E(z) \equiv z$ . Элементом, обратным к невырожденной функции  $w = \frac{Az + B}{Cz + D}$ , является невырожденная функция  $z = \frac{-Dw + B}{Cw - A}$ . ►

**Теорема 6.** *Невырожденная дробно-линейная функция  $w = \frac{Az + B}{Cz + D}$ , у которой  $C \neq 0$  не является делителем нуля, отображает гиперболы, не проходящие через точку  $z = -\frac{D}{C}$ , на гиперболы.*

(Напомним, что в данной статье речь идет только о равнобочных гиперболах, асимптотами которых являются характеристики. Такие гиперболы являются аналогами окружностей, рассматриваемых в комплексном анализе).

◀ Преобразуем дробно-линейную функцию к виду

$$w = \frac{Az + B}{Cz + D} = \frac{A}{C} - \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}}{C(Cz + D)}. \quad (14)$$

Используя это представление, представим дробно-линейную функцию в виде композиции  $w = L_3 \circ L_2 \circ L_1(z)$  следующих трех отображений:

$$z \mapsto \frac{C(Cz + D)}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}} = t \mapsto \frac{1}{t} = \zeta \mapsto \frac{A}{C} - \zeta = w. \quad (15)$$

Отображения  $L_1$  и  $L_3$  – невырожденные целые линейные. Для них гиперболическое свойство было установлено выше. Осталось установить указанное свойство для отображения  $L_2 : \zeta = \frac{1}{t}$ . С этой целью возьмем уравнение гиперболы в виде  $\zeta\bar{\zeta} - a\bar{\zeta} - \bar{a}\zeta + (a\bar{a} - r) = 0$ . Производя в нем замену  $\zeta = \frac{1}{t}$  и умножая полученное равенство на  $t\bar{t}$ , получим  $1 - at - \bar{a}t + (a\bar{a} - r)t\bar{t} = 0$ . Но последнее уравнение также является уравнением гиперболы при условии  $a\bar{a} - r \neq 0$ , которое является условием того, что точка  $t = 0$  не лежит на этой гиперболе. ►

**Теорема 7.** *Если  $w = \frac{Az + B}{Cz + D}$  – такая невырожденная дробно-линейная функция, у которой  $C \neq 0$  и не является делителем нуля, и такая, что точка  $z_0 = -\frac{D}{C}$  не лежит на гиперболе  $(w - a)(\overline{w - a}) = r$ , то точки, симметричные относительно этой гиперболы, переходят на точки, симметричные относительно ее образа.*

◀ Сделаем преобразование (14). Используя его, представим дробно-линейную функцию в виде композиции трех отображений (15). Отображения  $L_1$  и  $L_3$  – целые линейные, и для них свойство сохранения симметричных пар точек установлено выше. Осталось установить это свойство для отображения  $L_2^{-1}: t = \frac{1}{\zeta}$ . Точки, симметричные относительно гиперболы  $(\zeta - a)\overline{(\zeta - a)} = r$ , связаны равенством  $\zeta^* \bar{\zeta} - a \bar{\zeta} - \bar{a} \zeta^* + (a\bar{a} - r) = 0$ . Производя в этом равенстве замену  $\zeta = \frac{1}{t}$  и умножая полученное равенство на  $t^* \bar{t}$ , получим

$$1 - at^* - \bar{a}t + (a\bar{a} - r)t^* \bar{t} = 0,$$

т.е. точки  $t$  и  $t^*$  симметричны относительно линии  $1 - at - \bar{a}t + (a\bar{a} - r)t\bar{t} = 0$ , которая является гиперболой при условии  $a\bar{a} - r \neq 0$ , т.е. при условии, что точка  $\zeta = 0$  не лежит на гиперболе  $(\zeta - a)\overline{(\zeta - a)} = r$ . ▶

### Литература

1. Ивлев Д.Д. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. 1961. Вып. 6. С. 197-203.
2. Курочкин Ю.А. Простейшие алгебры и геометрии и их применение в физике и астрономии. Минск: Белорусская наука, 2018. С. 134-137.
3. Antonuccio F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics // Wadham College, Oxford OX1 3PN, United Kingdom, 2008.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их механические модели. М.: Наука, 1977.

**E.I. Zverovich**

Belarusian State University

### FRACTIONAL-LINEAR FUNCTIONS OF $h$ -COMPLEX ARGUMENT

**Keywords:** *h-complex numbers, h-analytic functions, characteristics, fractional-linear mappings, analogue of the Cauchy-Riemann equations, group property, symmetry with respect to hyperbolas, preservation of symmetry.*

**Abstract.** *Author consider having  $\mathcal{D}$ - derivative and  $\mathcal{D}$ -differentiable mappings  $f: A \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $A \subset \mathcal{D}$ , where  $\mathcal{D}$  is the set of all h-complex numbers, i.e. numbers shape  $x + jy$ , where  $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $j^2 = 1$ ,  $j \neq \pm 1$ . Such mappings are called h-analytic functions. Theirs real and imaginary parts satisfy the string oscillation equation. The general expression for h-analytic functions is*

*known. One of the properties of such functions: images of characteristics  $x + y = \text{const}$  are characteristics  $u + v = \text{const}$ . Symmetry with respect to hyperbolas is introduced and the property of preservation of symmetric pairs of points under fractional- linear mappings is established.*

**А.М. Зуев**

Смоленский государственный университет

УДК 511

## **О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СУММЫ ЦИФР НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА**

Ключевые слова: *множество натуральных чисел, сумма цифр в десятичной записи натурального числа, классы чисел с одинаковым остатком при делении на 9.*

*В статье изучается функция, сопоставляющая натуральному числу сумму цифр в его десятичной записи. Рассматриваются различные свойства данной функции, приводятся их доказательства. В качестве приложения излагаемой теории решаются некоторые конкретные задачи, связанные с натуральными числами.*

Множество  $N$  натуральных чисел, пополненная нулем, однозначно разбивается на попарно непересекающиеся классы  $N_q$ ,  $q = 0, 1, \dots, 8$ , каждый из которых состоит из всех чисел, дающих при делении на 9 остаток  $q$ . Очевидно,  $N_q = \{q + 9n, n = 0, 1, \dots\}$ .

Обозначим через  $S(n)$  функцию, сопоставляющую натуральному числу  $n$  сумму цифр в его десятичной записи; договоримся также считать, что  $S(0) = 0$ .

Рассмотрим сначала три задачи.

№ 1. Может ли хотя бы для одного числа  $a_n = 47 + 9n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , число  $S(a_n)$  равняться 215?

№ 2. Пусть  $a$  – член прогрессии  $\{a_n = a_0 + 9n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;  $a_0 \in \{0, 1, \dots, 8\}$  Переставим произвольно цифры в десятичной записи числа  $a$ . Верно ли, что полученное число также принадлежит прогрессии  $\{a_n\}$ ?

№ 3. В десятичной записи числа  $a$  32 единицы, остальные нули. Может ли это число быть квадратом натурального числа?

Непосредственное решение этих задач затруднительно. Воспользуемся известным свойством натуральных чисел, которое не входит в школьную программу, но абитуриентам полезно его знать.

**Утверждение 1.** Число  $n$  и сумма его цифр (в десятичной записи) дают при делении на 9 одинаковые остатки.

В наших обозначениях это означает, что разность  $n - S(n)$  делится на 9 и, следовательно, числа  $n$  и  $S(n)$  принадлежат одному и тому же классу  $N_q$ .

Теперь решение поставленных выше задач почти очевидно.

№ 1. Для любого  $n$   $a_n = 47 + 9n = 2 + 9(5 + n) \in N_2$ ,  $215 \in N_8$ . Если бы  $S(a_n)$  равнялось 215, то  $a_n$  и  $S(a_n)$  принадлежали бы разным классам, что невозможно.

Ответ: нет.

№ 2. Пусть  $b$  – число, полученное из  $a$  перестановкой цифр. Очевидно,  $S(b) = S(a)$ , то есть  $S(b)$  и  $S(a)$  в одном и том же классе  $N_q$ . Но  $b$  и  $S(b)$  также принадлежат этому классу, как и  $a$  с  $S(a)$ . Итак,  $b$  лежит в том же классе, что и  $a$ , то есть  $b$  принадлежит заданной прогрессии.

Ответ: да.

№ 3.  $S(a) = 32 \in N_5$ , следовательно,  $a \in N_5$ . Предположим, что  $a = k^2 = (k_0 + 9n)^2 = k_0^2 + 9(2k_0n + 9n^2)$ , где  $k_0 = 0, 1, \dots, 8$ . Но тогда  $k_0^2$  принадлежит одному из классов  $N_0, N_1, N_4, N_7$ , то есть  $a \notin N_5$ . Противоречие.

Ответ: нет.

Класс, которому принадлежит число  $n$ , удобно находить не делением на 9, а последовательным вычислением функции  $S$ . Например,  $n = 234741$ ,  $S(n) = 21$ ,  $S(21) = 3$ , следовательно,  $n \in N_3$ .

Рассмотрим другие свойства функции  $S(n)$ .

Сначала одно очевидное, которое будем неоднократно использовать в дальнейшем.

Всякое натуральное число  $n$ , сумма цифр в десятичной записи которого больше 1, можно представить в виде суммы  $a + b$  натуральных чисел так, что  $S(n) = S(a + b) = S(a) + S(b)$ .

Действительно, если  $n \geq 2$  – цифра, то  $n = a + b$ , где  $a$  и  $b$  – натуральные цифры; если  $n = n_0 \cdot 10^k$ ,  $n_0$  – цифра, то по условию  $n_0 \geq 2$ ,  $n_0 = a + b$ , где  $a$  и  $b$  – натуральные цифры,  $n = a \cdot 10^k + b \cdot 10^k$ . Пусть теперь  $n = \overline{n_0 n_1 n_2 \dots n_k}$ , где существует  $n_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Тогда  $n = \overline{n_0 n_1 \dots n_{i-1} 0 \dots 0} + \overline{n_i n_{i+1} \dots n_k}$ .

**Утверждение 2.** Если для  $d \in N$  выполняется условие:  $d - S(d)$  делится на  $S(9d)$ , то существует такое  $m_0 \in N$ , что  $S(m_0 d) = d$ .

**Доказательство.** Пусть  $d - S(d) = S(9d) \cdot k$ . Если  $k = 0$ , то  $d = S(d)$  и  $m_0 = 1$ . Пусть  $k > 0$ ,  $d = S(d) + S(9d) \cdot k$ ;  $d = \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$ ,  $9d = \overline{b_1 b_2 \dots b_r}$ .

Возьмем  $m = 10 \dots 010 \dots 01 \dots 10 \dots 010 \dots 0$ , где  $k$  единиц, между соседними единицами  $r - 1$  ноль, за последней единицей справа  $p$  нулей. Составим





$$b_1 = a_1.$$

Тогда

$$b_1 + b_{k+1} = a_1 + 9 - a_1 = 9,$$

$$b_2 + b_{k+2} = a_2 + 9 - a_2 = 9, \dots,$$

$$b_{p-1} + b_{k+p-1} = a_{p-1} + 9 - a_{p-1} = 9,$$

$$b_p + b_{k+p} = a_p - 1 + 10 - a_p = 9,$$

$$b_{p+1} = b_{p+2} = \dots = b_k = 9.$$

$$\text{Итак, } S(Ad) = b_1 + b_2 + \dots + b_{k+p} = 9p + 9(k-p) = 9k.$$

Пусть теперь  $a_p = 0, a_{p-1} = 0, \dots, a_s \neq 0$ :

$$d = \overline{a_1 a_2 \dots a_s 00 \dots 0} = \overline{a_1 a_2 \dots a_s} \cdot 10^{p-s}$$

$$Ad = 10^k d - d = 10^k \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_s} \cdot 10^{p-s} - \overline{a_1 a_2 \dots a_s} \cdot 10^{p-s} = 10^{p-s} \cdot B,$$

где  $B = \overline{a_1 a_2 \dots a_s} \cdot 10^k - \overline{a_1 a_2 \dots a_s}$ , где  $a_s \neq 0, k > s$ .

Аналогично убеждаемся, что  $S(B) = 9k$ . Кроме того, очевидно, что  $S(B) = S(B \cdot 10^{p-s}) = S(Ad)$ .

Утверждение 4 показывает, что при  $k \geq p$  значение функции  $S$  на  $Ad$  одно и то же для всех натуральных  $d$  значимости меньшей или равной  $p$  и равно  $S(A) = 9k$ .

**Утверждение 5.** Уравнение  $S(xd) = d$  при любом натуральном  $d$  разрешимо в натуральных числах, то есть в последовательности  $\{nd\}$ ,  $n \in N$  всегда существует элемент, сумма цифр которого (из десятичной записи) равна  $d$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $d \geq 20$ ,  $d = \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$ .

Разность  $d - S(d)$  делится на 9; пусть  $d - S(d) = 9k$ . Если  $d \geq 20$ , то  $k \geq p$ . Возьмем  $k$ -значное число  $A = \overline{99 \dots 9}$ .

Тогда число  $Ad$  в десятичной записи содержит  $k + p$  цифр  $Ad = b_1 b_2 \dots b_{k+p}$ .  $S(Ad) = S(A) = 9k = d - S(d)$ . Пусть  $m = A \cdot 10^p$ .

$$\text{Тогда } S(md) = S(Ad \cdot 10^p) = S(Ad) = S(A) = d - S(d).$$

$$\text{Возьмем } x = m + 1 = A \cdot 10^p + 1.$$

$$\text{Тогда } xd = A \cdot 10^p d + d = \overline{b_1 b_2 \dots b_{k+p} a_1 a_2 \dots a_p};$$

$$S(xd) = (b_1 + b_2 + \dots + b_{k+p}) + (a_1 + a_2 + \dots + a_p) = S(Ad) + S(d) = (d - S(d)) + S(d) = d, \text{ то есть } x - \text{корень уравнения } S(xd) = d.$$

Если  $d < 19$ , то  $k < p$ , и рассмотренное доказательство не проходит. Если  $d < 10$ , то  $x = 1$ ; если  $d = 10$ , можно взять  $x = 19$ :  $S(10x) = S(190) = 10$ ; если  $d = 11$ , можно взять  $x = 55$ :  $S(11 \cdot x) = S(605) = 11$ . Наконец, при  $11 < d < 20$  выполняются условия утверждений 2 или 3.

**Замечание 3.** Решений уравнения  $S(xd) = d$  бесконечно много: если  $S(xd) = d$ , то  $S(x \cdot 10^l d) = d$  для любого  $l \in N$ .

В заключение приведем задачу, иллюстрирующую последнее утверждение.

**Задача.** В арифметической прогрессии  $\{2019n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  найдите число, сумма цифр которого (из десятичной записи) равна 2019.

Решение основано на доказательстве утверждения.

$d = 2019$ ,  $p = 4$ ,  $S(d) = 12$ ,  $d - S(d) = 2007 = 9 \cdot 223$ ,  $k = 223$ . Пусть  $A$  – 223-значное число:  $A = \overline{99\dots9}$ . Положим  $n = A \cdot 10^4 + 1$ , тогда искомое число  $n \cdot d$ , то есть  $(A \cdot 10^4 + 1) \cdot 2019$ .

**A.M. Zuev**

Smolensk State University

## ON SOME PROPERTIES OF SUM OF DIGITS OF A NATURAL NUMBER

**Keywords:** *set of natural numbers, sum of digits in the decimal notation of a natural number, classes of numbers with the same remainder when divided by 9.*

**Abstract.** *The article studies a function that compares the sum of digits in its decimal notation to a natural number. Various properties of this function are considered, proofs are given. As an application of the theory, some specific problems related to natural numbers are solved.*

**В.В. Карачик**

Южно-Уральский государственный университет

УДК 517.956.223+517.575

## О НЕКОТОРЫХ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ключевые слова: *задачи типа Неймана, полигармоническое уравнение, необходимые условия разрешимости, единичный шар, полигармонические функции.*

*В статье исследована разрешимость класса задач типа Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре. Получен набор необходимых условий разрешимости поставленных задач. Найденные условия представляют собой условия*

*ортогональности однородных гармонических полиномов некоторых степеней линейным комбинациям граничных функций с коэффициентами из целочисленного треугольника Неймана.*

**1. Введение.** Одним из классических линейных уравнений в частных производных эллиптического типа высокого порядка является полигармоническое уравнение, а классическими задачами для этого уравнения являются задачи Дирихле (см., например, [1; 2]) и Неймана (см., например, [3; 4; 5]). Условия разрешимости этих задач исследованы в классической теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем уравнений, удовлетворяющих так называемому условию дополнителности.

В работе [6] рассмотрена более общая краевая задача для полигармонического уравнения, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и дано представление ее решения.

В работе [7] также исследованы условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения в шаре с нормальными производными в граничных условиях. Условия разрешимости в этих работах имели вид ортогональности некоторых вектор-функций, зависящих от данных задачи, или равенства рангов специальных матриц высокого порядка. Чтобы установить, при каких граничных условиях конкретная задача такого типа разрешима, необходимо выполнить дополнительно непростые вычисления.

Рассмотренный в настоящей работе класс задач является естественным обобщением классической постановки задачи Неймана для полигармонического уравнения. Поэтому для таких задач хорошо бы иметь их условия разрешимости в легко проверяемом виде. Нахождению множества необходимых условий разрешимости задач типа Неймана и посвящена данная работа.

Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  – единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  – единичная сфера, где  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . В единичном шаре  $S$  рассмотрим следующий класс краевых задач типа Неймана  $\mathcal{N}_k$ , зависящий от параметра  $k \in \mathbb{N}$  для однородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции  $\varphi_i(s)$  при  $i = 1, \dots, m$  определены на  $\partial S$ . Класс задач  $\mathcal{N}_k$  является частным

случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [6]. Задача  $\mathcal{N}_0$  является задачей Дирихле [8], которая безусловно разрешима, а задача  $\mathcal{N}_1$  совпадает с задачей Неймана [4].

Исследования разрешимости различных постановок задач типа Неймана и их обобщений в единичном шаре для бигармонического уравнения (в частности, задач  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$ ) и полигармонического уравнения можно найти в работах [7, 9, 10, 11, 12]. В [13] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных и приведены формулы, позволяющие легко построить полиномиальное решение задачи.

**2. Вспомогательные сведения.** Пусть  $P_m(t) = \sum_{i=0}^m p_i t^i$  – некоторый полином степени  $m$  с действительными коэффициентами  $p_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, m$ . Линейное пространство таких полиномов обозначим  $\mathcal{P}$ . Рассмотрим факториальную степень переменной  $t$  порядка  $i$  в виде  $t^{[i]} = t(t-1)\dots(t-i+1)$ , причем  $t^{[0]} \equiv 1$ . Введем факториальный полином, соответствующий полиному  $P_m(t)$ , равенством  $P_{[m]}(t) = \sum_{i=0}^m p_i t^{[i]}$ . Рассмотрим линейное отображение  $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , задаваемое в виде  $\Phi[P_m(t)] = P_{[m]}(t)$ . В [14, лемма 1] показано, что отображение  $\Phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  – изоморфизм. Пусть  $l \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Рассмотрим полиномы  $H_i^{(l)}(t) = (t-l)(t-2-l)\dots(t-2i+2-l)$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Обозначим их прообразы при изоморфизме  $\Phi$  как  $P_k^{(l)}(t) = \Phi^{-1}[H_i^{(l)}(t)]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , и значит  $H_i^{(l)}(t) = P_{[i]}^{(l)}(t)$ . Будем считать, что  $P_i^{(0)}(t) \equiv P_i(t)$ . Для полиномов  $P_i^{(l)}(t)$  верно равенство [14, лемма 7]  $P_i^{(l)}(t) + 2iP_{i-1}^{(l)}(t) = P_i^{(l-2)}(t)$ ,  $i \geq 2$ , где следует считать, что  $P_0^{(l)}(t) = 1$ ,  $P_1^{(l)}(t) = t-l$ . Кроме того, полиномы  $P_i(t)$  и  $P_i^{(l)}(t)$  удовлетворяют рекуррентным равенствам [14]:

$$P_i(t) + (2i-3)P_{i-1}(t) = t^2 P_{i-2}(t), \quad P_i^{(l)}(t) + (2i-1)P_{i-1}^{(l)}(t) = t^2 P_{i-2}^{(l)}(t), \quad i \geq 2,$$

и  $P_{i+1}(t) = tP_i^{(1)}(t)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Линейную оболочку бесконечной системы полиномов  $\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \dots\}$ , начинающейся с полинома  $P_m^{(l)}(t)$  при  $m \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\mathcal{L}_m^{(l)}$ , т.е.  $\mathcal{L}_m^{(l)} = \text{lin}\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \dots\}$ . Коэффициенты полиномов  $P_i(t)$ ,  $l \in \mathbb{N}$  (у них нет свободных членов) поместим слева направо от 1 до  $i$  в порядке возрастания индекса в  $i$ -ю строку следующего целочисленного треугольника, который назовем треугольником Неймана [15], поскольку он играет важную роль в исследовании задач  $\mathcal{N}_k$ ,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & -1 & 1 \\ & & 3 & -3 & 1 \\ -15 & 15 & -6 & 1 & \\ 105 & -105 & 45 & -10 & 1 \\ & & \dots & & \\ \dots & p_j^{(i)} = p_{j-1}^{(i-1)} + (j-2i+2)p_j^{(i-1)} & \dots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $p_j^{(i)}$  при  $1 \leq j \leq i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  – элемент  $i$ -й строки треугольника Неймана  $\mathbb{P}$ , стоящий на  $j$ -м месте слева и  $p_1^{(1)} = 1$  – начальное условие, а  $p_j^{(i)} = 0$  при  $j > i$  и  $0 \geq j$  – граничные условия для приведенного рекуррентного уравнения. Доказано, что верно равенство

$$p_j^{(i)} = (-1)^{i-j} \binom{2i-j-1}{j-1} \frac{(2i-2j+1)!!}{2i-2j+1}, \quad (4)$$

и установлено, что степень полинома  $P_i(t)$  равна  $i$ , а низшая степень одночленов, входящих в  $P_i(t)$ , равна 1. В силу определений полинома  $P_i(t)$  и факториального многочлена верно равенство

$$P_{[i]}(t) \equiv \sum_{j=1}^i p_j^{(i)} t^{[j]} = (t, -2)_i \equiv t(t-2)\dots(t-2i+2),$$

где  $(a, b)_i = a(a+b)\dots(a+(i-1)b)$ .

**3. Основной результат.** Исследуем необходимые условия разрешимости класса задач  $\mathcal{N}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  для однородного полигармонического уравнения на основании результатов, полученных в [14].

**Теорема.** Пусть функции  $\varphi_i(s)$  из (2) при  $i=1,2,\dots,m$  такие, что решение  $u(x)$  задачи  $\mathcal{N}_k$  для однородного полигармонического уравнения (1) существует и оно такое, что  $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$ . Тогда, при всяком  $l \in \mathbb{N}_0$ , таком, что  $l < k$ , должны быть выполнены следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x &= 0, \quad \lambda = \lambda_0, \dots, \min\{k-l, m\} - 1, \\ \int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x &= 0, \quad i = \max\{2m+l-k, 0\} + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\lambda_0 = [(k-l)/2]$ ,  $H_l(x)$  – произвольный однородный гармонический полином степени  $l$ ,  $p_j^{(i)}$  – коэффициенты полинома  $P_i(t)$  из (3), имеющие вид (4),

$$\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1, \quad \sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1.$$

Число условий (5) при  $l < k$  равно

$$N_{m,k,l} = \min\{k-l-\lambda_0, m\} = \min\{[(k-l+1)/2], m\}.$$

В формулировке теоремы 1 следует иметь в виду следующее общепринятое соглашение для формул с индексами: если в формуле нижняя граница области изменения индекса становится больше верхней границы, то эту формулу не следует принимать в расчет. Например, первая формула в (5) действительна при  $k > l$  и  $[(k-l)/2]+1 \leq m$ , а вторая при  $k > m+l$ .

### Литература

1. Nicolesco M. Les fonctions polyharmoniques, Paris, Hermann ed, 1936.
2. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. Lecture Notes in Mathematics 1991. Berlin: Springer, 2010.
3. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
4. Карачик В.В. Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 1455–1461.
5. Turmetov V.Kh., Ashurov R.R. On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball // Boundary value problems. 2013. No. 162. P. 1–15.
6. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32, № 5. С. 51–58.
7. Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 41–52.
8. Карачик В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1038–1047.
9. Карачик В.В., Торбек Б.Т. О задаче Дирихле-Рикье для бигармонического уравнения // Математические заметки. 2017. Т. 102, № 1. С. 39–51.
10. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Математические труды, 2016. Т. 19, № 2. 86–108.
11. Карачик В.В. Обобщённая третья краевая задача для бигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 761–770.
12. Карачик В.В. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 653–662.
13. Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1149–1170.
14. Карачик В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 533–551.
15. Карачик В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 228–238.
16. Karachik V.V. On some special polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. 2004. V. 132, No. 4. P. 1049–1058.

V.V. Karachik  
South Ural State University

## ON SOME NECESSARY SOLVABILITY CONDITIONS OF THE NEUMAN TYPE PROBLEMS FOR POLYHARMONIC EQUATION

**Keywords:** *Neumann type problems, polyharmonic equation, necessary solvability conditions, unit ball, polyharmonic functions.*

**Abstract.** *In this article, the solvability conditions of a class of Neumann type problems for the homogeneous polyharmonic equation in the unit ball are investigated. A set of necessary conditions for solvability of the considered problems is obtained. The found conditions are the orthogonality conditions between homogeneous harmonic polynomials of the certain degrees and the linear combinations of boundary functions with coefficients from the integer Neumann triangle.*

Э.Г. Кирьяцкий, Е.Э. Кирьяцкий  
*Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса*

УДК 517.54

## ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ В ОДНОМ ИЗ КЛАССОВ НОРМИРОВАННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *аналитическая функция, единичный круг, основная функция, огранд, функционал, оператор.*

*В данной статье рассматривается класс аналитических в единичном круге функций, построенный с помощью специальной нормировки этих функций. В процессе изучения свойств этого класса важную роль играют функции, которые названы основными. Кроме того, вводится и используется понятие огранда – одного из характеристик рассматриваемого класса, а также функционала, определенного на этом классе. Основное внимание уделено оценкам модуля функции, модуля производной и модуля аргумента. Эти оценки являются точными и реализуются основными функциями.*

**Постановка задачи.** В теории нормированных однолистных функций исторически особое место занимали теоремы искажения и оценки маклореновских коэффициентов. Эти вопросы хорошо освещены в работах [1–3]. В данной статье мы ставим аналогичные задачи в классе



аналитических в единичном круге функций, налагая на них другие условия нормировки.

**1. Определения и вспомогательные леммы.** Пусть  $\tilde{A}(E)$  – класс аналитических в единичном круге  $E$  функций  $f(z)$ , нормированных условиями:  $f(z) \neq 0$  в  $E$  и  $f(0) = 1$ . Обозначим

$$\Delta[f(z)] = (1 - |z|^2) \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad f(z) \in \tilde{A}(E),$$

$$\delta_f = \sup_{z \in E} |\Delta[f(z)]|, \quad f(z) \in \tilde{A}(E).$$

Функционал  $\delta_f$  назовем *ограндом* функции  $f(z)$ . Нам понадобятся принадлежащие классу  $\tilde{A}(E)$  функции

$$\Phi_{t,a,b}(z) = \left( \frac{1 - \bar{a}z}{1 - \bar{b}z} \right)^{\frac{t}{b-a}}, \quad \Phi_{t,a,a}(z) = e^{\frac{tz}{1-\bar{a}z}},$$

где  $a, b, t$  – комплексные числа и  $|a| \leq 1$ ,  $|b| \leq 1$ . Кроме того, полагаем  $\Phi_{t,a,b}(0) = 1$ , если  $a \neq b$  и  $\Phi_{t,a,a}(0) = 1$ , если  $a = b$ . Для краткости обозначим  $\Phi_{t,-1,1} = \Phi_t$ . Эти функции назовем *основными функциями*. Отметим некоторые из основных функций:

$$\Phi_{t,-1,0}(z) = (1+z)^t, \quad \Phi_{t,0,1}(z) = \frac{1}{(1-z)^t}, \quad \Phi_{t,0,0}(z) = e^{tz}, \quad \Phi_{t,1,-1}(z) = \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^{\frac{t}{2}}.$$

**Лемма 1.** Для основных функций имеют место формулы

$$\Phi'_{t,a,b}(z) = \left( \frac{1 - \bar{a}z}{1 - \bar{b}z} \right)^{\frac{t}{b-a}} \frac{t}{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{b}z)}, \quad a \neq b,$$

$$\Phi'_{t,a,a}(z) = \frac{t}{(1 - \bar{a}z)} e^{\frac{tz}{1-\bar{a}z}},$$

$$\frac{\Phi'_{t,a,b}(z)}{\Phi_{t,a,b}(z)} = \frac{t}{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{b}z)}, \quad a \neq b,$$

$$\frac{\Phi'_{t,a,a}(z)}{\Phi_{t,a,a}(z)} = \frac{t}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

**Лемма 2.** Верны формулы

$$\Delta[\Phi_{t,a,b}(z)] = \frac{(1 - |z|^2)t}{(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{b}z)} = \frac{t}{(\bar{b} - \bar{a})} \left( \frac{-\bar{a} + \bar{z}}{1 - \bar{a}z} - \frac{-\bar{b} + \bar{z}}{1 - \bar{b}z} \right), \quad a \neq b,$$

$$\Delta[\Phi_{t,a,a}(z)] = \frac{(1 - |z|^2)t}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

**Лемма 3.** Для  $\Delta[\Phi_{t,a,b}(z)]$ , где  $a \neq b$ ,  $|a|=|b|=1$ , справедливы равенства

$$\sup_{z \in E} |\Delta[\Phi_{t,a,b}(z)]| = \frac{2|t|}{|\bar{b} - \bar{a}|},$$

$$\inf_{z \in E} |\Delta[\Phi_{t,a,b}(z)]| = 0.$$

**2. Формулировки и доказательства теорем.** Приступим к оценке модулей.

**Теорема 1.** Если  $f(z) \in \tilde{A}(E)$ , то справедлива оценка

$$|\ln f(z)| \leq \ln \Phi_{\delta_f, -1, 1}(|z|) = \frac{1}{2} \delta_f \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in E. \quad (1)$$

Знак равенства в произвольно взятой точке  $z_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ , где  $0 < r_0 < 1$  и  $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$ , реализуется основными функциями

$$\Phi_{t,a,b}(z), \quad a = e^{-i\gamma_0}, \quad b = e^{i\gamma_0}, \quad t = |t| e^{i\gamma_0}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $f(z) \in \tilde{A}(E)$ . Если  $z = r e^{i\gamma}$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 \leq \gamma < 2\pi$ , то

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} e^{i\gamma}.$$

Поэтому

$$|\ln f(z)| = \left| \int_0^r \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln f(z) \right) dr \right| = \left| \int_0^r \frac{1}{1-r^2} \Delta[f(re^{i\gamma})] dr \right| \leq \int_0^r \frac{1}{1-r^2} |\Delta[f(re^{i\gamma})]| dr.$$

Пользуясь определением огранда  $\delta_f$ , получим

$$\int_0^r \frac{1}{1-r^2} |\Delta[f(re^{i\gamma})]| dr \leq \int_0^r \frac{\delta_f}{1-r^2} dr = \frac{1}{2} \delta_f \ln \frac{1+r}{1-r},$$

и неравенство (1) установлено. Знак равенства в (1) проверяется подстановкой функций (2) в (1) с учетом того, что огранд функций (2) равен  $|t|$ .

**Теорема 2.** Для модуля любой функции  $f(z) \in \tilde{A}(E)$  справедливы неравенства

$$\Phi_{-\delta}(|z|) \leq |f(z)| \leq \Phi_{\delta}(|z|) \quad \forall z \in E. \quad (3)$$

Знаки равенства в (3), когда  $z = z_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ ,  $0 < r_0 < 1$  и  $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$ , реализуются основными функциями

$$\Phi_{t,a,b}(z), \quad t = \pm |t| e^{-i\gamma_0}, \quad a = -e^{i\gamma_0}, \quad b = e^{i\gamma_0}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$|\ln |f(z)|| \leq |\ln f(z)|, \quad \forall z \in E.$$

Отсюда по теореме 1 следует

$$|\ln |f(z)|| \leq \ln \Phi_{\delta_f}(|z|), \quad \forall z \in E,$$

или

$$-\ln \Phi_{\delta_f}(|z|) \leq \ln |f(z)| \leq \ln \Phi_{\delta_f}(|z|), \quad \forall z \in E.$$

Но легко видеть, что

$$-\ln \Phi_{\delta_f}(|z|) = \ln \Phi_{-\delta_f}(|z|).$$

Значит, это последнее двойное неравенство эквивалентно двойному неравенству (3). Знаки равенства проверяются с помощью подстановки функций (4) в (3).

**Теорема 3.** Для модуля аргумента любой функции  $f(z)$ , принадлежащей классу  $\tilde{A}(E)$ , справедлива оценка

$$|\arg f(z)| \leq \ln \Phi_{\delta_f}(|z|) = \frac{\delta_f}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}. \quad \forall z \in E. \quad (5)$$

Знак равенства при  $z = z_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ ,  $0 < r_0 < 1$  и  $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$ , реализуется основными функциями

$$\Phi_{t,a,b}(z), \quad t = \pm |t| e^{-i\gamma_0}, \quad a = -e^{i\gamma_0}, \quad b = e^{i\gamma_0}. \quad (6)$$

**Доказательство.** Согласно теореме 1, имеем двойное неравенство

$$-\frac{\delta_f}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} \leq |\arg f(z)| \leq \frac{\delta_f}{2} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

эквивалентное неравенству (5), указанному в данной теореме. Знак равенства в (5) проверяется с помощью подстановки функций (6) в (5).

**Теорема 4.** Для модуля производной любой функции  $f(z)$ , принадлежащей классу  $\tilde{A}(E)$ , справедливы неравенства

$$0 \leq |f'(z)| \leq \frac{\delta_f}{1-|z|^2} \Phi_{\delta_f}(|z|). \quad \forall z \in E. \quad (7)$$

Знак равенства в левой части (7) реализуется функцией  $f(z) \equiv 1$ , принадлежащей классу  $\tilde{A}(E)$ . В правой части (7) знак равенства в произвольно взятой точке  $z = z_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ , где  $0 < r_0 < 1$  и  $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$ , реализуется основными функциями

$$\Phi_{t,a,b}(z), \quad t = |t| e^{-i\gamma_0}, \quad a = -e^{i\gamma_0}, \quad b = e^{i\gamma_0}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Так как  $f(z) \in \tilde{A}(E)$ , то, согласно определению огранда, имеем неравенства

$$0 \leq |f'(z)| \leq \frac{\delta_f}{1-|z|^2} |f(z)|, \quad \forall z \in E,$$

По теореме 2 имеем

$$|f(z)| \leq \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^{\frac{1}{2}\delta_f}, \quad \forall z \in E.$$

Отсюда следует (7). Ясно, что функция  $f(z) \equiv 1$  принадлежит классу  $\tilde{A}(E)$  и реализует знак равенства в левой части (7). Знак равенства в правой части (7), как легко проверить, реализуется основными функциями (8).

Таким образом, мы полностью выполнили поставленную перед нами задачу об оценке модулей  $|\ln f(z)|$ ,  $|f(z)|$ ,  $|f'(z)|$ ,  $|\arg f(z)|$ . Заметим, что эти оценки в классе  $\tilde{A}(E)$  оказались точными. Можно также доказать, что эти оценки реализуются только основными функциями.

### Литература

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. 557 с.
2. Александров И.А. Доказательство Л. Де Бранжем гипотезы И.И. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сибирский математический журнал. 1987. № 2. С. 7–20.
3. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием // Литовский математический сборник. 1974. Т. XIV, № 1. С. 57–65.

**E.G. Kirjackis, J.E. Kirjackis**  
Vilnius Gediminas Technical University

### ESTIMATIONS MUDULES IN ONE CLASS OF FUNCTIONS NORMALIZED AND ANALYTIC IN THE UNIT DISK

**Keywords:** *analytic function, unit disk, basic function, functional, operator.*

**Abstract.** *This article discusses the class of functions analytic in the unit disk, constructed using a special normalization of these functions. In the process of studying the properties of this class, an important role is played by functions that are called basic. In addition, we introduce and use the concept of ogrand - one of the characteristics of the considered class as well as of the functional defined on this class. We primarily focus on the estimates of the module of the function, the module of the derivative and the module of the argument. These estimates are accurate and are implemented by the basic functions.*

## ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: *разностный оператор, разностно-степенное уравнение, мероморфная функция.*

*Имеется обширная литература, посвященная разностным уравнениям в комплексной области. Хорошо изучено линейное разностное уравнение относительно одной неизвестной функции комплексного переменного. Особое внимание уделяется также системе линейных разностных уравнений относительно одной неизвестной функции. Некоторые частные случаи таких уравнений рассматривались Монтелем. В более общем виде теория линейных разностных уравнений создавалась А. Гельфондом в его известной монографии «Исчисление конечных разностей». В данной работе изучаются свойства системы из трех разностных уравнений, которую мы назвали системой разностно-степенных уравнений, так как в состав разностного уравнения входит натуральная степень неизвестной функции.*

**1. Постановка задачи.** Введем разностный степенной оператор  $\Delta_b^{\alpha, n}$  по формуле

$$\Delta_{\delta}^{h, n} f(z) = f(z + \delta) - hf^n(z)$$

и рассмотрим систему из трех однородных разностных уравнений относительно функции  $f(z)$ :

$$\begin{aligned}\Delta_a^{\lambda, n_1} f(z) &= 0, \\ \Delta_{\beta}^{\mu, n_2} f(z) &= 0, \\ \Delta_{\gamma}^{\nu, n_3} f(z) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\lambda, \mu, \nu, \delta$  – некоторые комплексные числа, а  $n_1, n_2, n_3$  – натуральные числа. В частном случае, когда  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ , система (1) изучалась Монтелем [1] и Гельфондом [2]. Нашей задачей является решение системы (1) при определенных условиях, наложенных на параметры, входящие в состав разностно-степенных уравнений (1). Ясно, что функция, тождественно равная нулю, является решением системы (1). Такое решение и только такое назовем тривиальным.

**Теорема 1.** *Пусть числа  $n_1, n_2, n_3$  не равны одновременно единице. Если имеют место условия*

$$\frac{\ln \lambda}{1-n_1} = \frac{\ln \mu}{1-n_2} = \frac{\ln \nu}{1-n_3} = a, \quad (2)$$

$$\frac{\ln n_1}{\alpha} = \frac{\ln n_2}{\beta} = \frac{\ln n_3}{\gamma} = c, \quad (3)$$

то функции вида

$$h(z) = e^{a+be^{cz}} \quad (4)$$

являются решениями системы (1). Если при этом тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  линейно независима, то функциями вида (4) исчерпываются все нетривиальные мероморфные решения системы (1). Если выполнено условие (2), а условие (3) не имеет места, то при независимых  $\alpha, \beta, \gamma$  система (1) в классе мероморфных функций имеет единственное нетривиальное решение  $f_0(z) = e^a$ .

**Доказательство.** В том, что при выполнении условий (2) и (3) функции вида (4) являются решениями системы (1) нетрудно убедиться непосредственно. Покажем, что, в случае независимых  $\alpha, \beta, \gamma$ , других мероморфных решений система (1) не имеет. Пусть  $f_0(z)$  – нетривиальное мероморфное решение системы (1) и  $f_0(z)$  не является константой. Дифференцируя равенства системы (1), приходим к системе из трех уравнений

$$\begin{aligned} f_0'(z + \alpha) &= \lambda n_1 f_0^{n_1-1}(z) f_0'(z), \\ f_0'(z + \beta) &= \mu n_2 f_0^{n_2-1}(z) f_0'(z), \\ f_0'(z + \gamma) &= \nu n_3 f_0^{n_3-1}(z) f_0'(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$T(z) = \frac{f_0'(z)}{f_0(z)}.$$

Тогда из (2), (3), (5) получим систему

$$\begin{aligned} T(z + \alpha) &= n_1 T(z), \\ T(z + \beta) &= n_2 T(z), \\ T(z + \gamma) &= n_3 T(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$R(z) = \frac{T'(z)}{T(z)}.$$

Тогда из (6) легко получим систему

$$\begin{aligned} R(z + \alpha) &= R(z), \\ R(z + \beta) &= R(z), \\ R(z + \gamma) &= R(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как  $f_0(z)$  – мероморфная функция и не является константой, то  $R(z)$  также есть мероморфная функция. Следовательно, по известной теореме Якоби о периодических функциях, равенства (7) одновременно могут иметь место лишь в случае, если

$$R(z) = \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{f_0'(z)}{f_0(z)} \equiv c, \quad (8)$$

где  $c$  – некоторая постоянная, так как тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  по условию независима. Решая дифференциальное уравнение (8), устанавливаем, что если  $c = 0$ , то функция  $f_0(z)$  имеет вид

$$f_0(z) = e^{b_1 + b_2 z}, \quad b_2 \neq 0. \quad (9)$$

Если же  $c \neq 0$ , то функция  $f_0(z)$  имеет вид

$$f_0(z) = e^{a + be^{cz}}, \quad b \neq 0. \quad (10)$$

Заметим, что  $a, b, b_1, b_2, c$  – неопределенные пока комплексные числа. Допустив в формуле (10)  $b = 0$ , присоединим к множеству возможных решений системы (1) и случай, когда ее решением является некоторая не равная нулю постоянная. При этом условия формулы (9) и (10) исчерпывают все мероморфные функции, которые могли бы быть решениями системы (1). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функции вида (9) могли бы быть решениями системы (1) лишь в том случае, когда  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ , что по условию не имеет места. Подставив функцию вида (10) в систему (1), получим, что при  $b = 0$  должно выполняться условие (2), а при  $b \neq 0$  – условия (2) и (3). Следовательно, если из условий (2) и (3) только первое имеет место, то нетривиальными мероморфными решениями системы (1) являются только функции вида (10) при  $b = 0$ , т.е. система (1) имеет в этом случае единственное нетривиальное решение  $f_0(z) = e^a$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  независима,  $\lambda = \mu = \nu = 1$ , а числа  $n_1, n_2, n_3$  не равны одновременно единице. Если имеет место соотношение (3), то нетривиальными мероморфными решениями системы (1) являются функции  $f_0(z) = e^{be^{cz}}$  и только они.

**Следствие 2.** Пусть тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  независима, а числа  $n_1, n_2, n_3$  не равны одновременно единице. Если соотношение (2) не имеет места, то система (1) имеет только тривиальное решение  $f_0(z) \equiv 0$ .

**Следствие 3.** Если тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  независима, то система (1) не имеет собственно мероморфных решений.

Действительно, как видно из доказательства теоремы, решения системы (1) могут быть только вида (9) или (10).

Введем обозначения:

$$\langle p^n \rangle = \frac{n^{p-1} - 1}{n-1}, \text{ если } n \neq 1 \text{ и } \langle p^n \rangle = p, \text{ если } n = 1.$$

**Теорема 2.** Пусть тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  связана линейным соотношением

$$p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma = 0, \quad (11)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  – не равные одновременно нулю целые числа. Тогда, если система (1) имеет не равное тождественно постоянной мероморфное решение, то одновременно имеют место соотношения

$$\begin{aligned} n_1^{p_1} n_2^{p_2} n_3^{p_3} &= 1, \\ \lambda_1^{g_1} \mu_2^{g_2} \nu_3^{g_3} &= 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \langle p_1^1 \rangle (2 + n_2^{p_2} + n_3^{p_3} + 2n_2^{p_2} n_3^{p_3}), \\ g_2 &= \langle p_2^2 \rangle (2 + n_1^{p_1} + n_3^{p_3} + 2n_1^{p_1} n_3^{p_3}), \\ g_3 &= \langle p_3^3 \rangle (2 + n_1^{p_1} + n_2^{p_2} + 2n_1^{p_1} n_2^{p_2}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда  $p_1, p_2, p_3$  – целые неотрицательные числа. Пусть  $f_0(z)$  – не равное постоянной мероморфное решение системы (1). Тогда, учитывая тождество (11), имеем

$$\begin{aligned} f_0(z) &= f_0(z + p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma) = \lambda f_0^{n_1}(z + (p_1 - 1)\alpha + p_2\beta + p_3\gamma) = \dots = \\ &= \lambda^{1+n_1+n_1^2+\dots+n_1^{p_1-1}} f_0^{n_1^{p_1}}(z + p_2\beta + p_3\gamma) = \dots = \\ &= \lambda^{\langle p_1^{p_1} \rangle} \mu^{\langle p_2^{p_2} \rangle n_1^{p_1}} \nu^{\langle p_3^{p_3} \rangle n_1^{p_1} n_2^{p_2}} f_0^{n_1^{p_1} n_2^{p_2} n_3^{p_3}}(z), \end{aligned}$$

где

$$\langle p_i^{n_i} \rangle = \frac{n_i^{n_i} - 1}{n_i - 1}, \text{ если } n_i \neq 1, \text{ и } \langle p_i^{n_i} \rangle = p_i, \text{ если } n_i = 1.$$

Так как функция  $f_0(z)$  отлична от константы, то отсюда получаем, что

$$n_1^{p_1} n_2^{p_2} n_3^{p_3} = 1, \quad (13)$$

$$\lambda^{\langle p_1^{p_1} \rangle} \mu^{\langle p_2^{p_2} \rangle n_1^{p_1}} \nu^{\langle p_3^{p_3} \rangle n_1^{p_1} n_2^{p_2}} = 1. \quad (14)$$

Действуя аналогично, но не циклически, изменив порядок применения равенств системы (1) из тождества

$$f_0(z) = f_0(z + p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma),$$

можно получить также условие

$$\lambda^{\langle p_1^{p_1} \rangle} \mu^{\langle p_2^{p_2} \rangle n_1^{p_1} n_2^{p_2}} \nu^{\langle p_3^{p_3} \rangle n_1^{p_1}} = 1. \quad (15)$$

Используя (13) – (15), получим формулу



$$\lambda^{\langle p_1^{n_1} \rangle (2+n_2^{p_2} + n_3^{p_3} + 2n_2^{p_2} n_3^{p_3})} \mu^{\langle p_2^{n_2} \rangle (2+n_1^{p_1} + n_3^{p_3} + 2n_1^{p_1} n_3^{p_3})} \nu^{\langle p_3^{n_3} \rangle (2+n_1^{p_1} + n_2^{p_2} + 2n_1^{p_1} n_2^{p_2})} = 1.$$

К тому же результату придем и в том случае, если среди чисел  $p_1, p_2, p_3$  есть отрицательные. Теорема доказана.

**Следствие 4.** Пусть числа  $n_1, n_2, n_3$  не равны одновременно единице, а тройка  $\alpha, \beta, \gamma$  связана линейным соотношением

$$p_1\alpha + p_2\beta + p_3\gamma = 0,$$

где  $p_1, p_2, p_3$  – натуральные числа. Если имеет место соотношение

$$\frac{\ln \lambda}{1-n_1} = \frac{\ln \mu}{1-n_2} = \frac{\ln \nu}{1-n_3} = a, \quad (16)$$

то система (1) имеет, кроме тривиального, единственное мероморфное решение  $f_0(z) = e^a$ . Если соотношение (15) не имеет места, то система (1) не имеет нетривиальных мероморфных решений.

**Следствие 5.** Если система (1) имеет нетривиальное мероморфное решение, то имеет место одно из условий (16) или (12).

### Литература

1. Montel Paul. Sur quelques equations aux differences melies // Ann. Ec. Norm. Paris. 1948. **65**(3). P. 337–353.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

**E.G. Kirjackis, J.E. Kirjackis**  
Vilnius Gediminas Technical University

**Keywords:** difference operator, difference power equations, meromorphic function.

**Abstract.** There is an extensive literature on difference in the complex domain. The linear difference equation for a single unknown function of a complex variable is well studied. Special attention is also paid to the system of linear difference equations for a unknown function. Some particular cases of such equations were considered by P. Montel. In a more general form, the theory of linear difference equations was created by A. Gelfond in his famous monograph «The Calculus of Finite Differences». In this paper, we study the properties of systems of three difference equations, which we called the system of difference equations a natural power of unknown function.

## О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Ключевые слова: задача Дирихле; дифференциальное уравнение, односвязная область, гладкая кривая, единичный круг.

В статье рассматривается краевая задача типа задачи Дирихле для одного дифференциального уравнения эллиптического типа в односвязных областях, лежащих в единичном круге. Установлено, что в случае круговых областей рассматриваемая краевая задача эквивалентна обобщенной (дифференциальной) задаче Римана для аналитических функций комплексного переменного. Получен конструктивный метод решения рассматриваемой краевой задачи в круговых областях и описана полная картина ее разрешимости в указанных областях. В заключение приводится конкретный пример, иллюстрирующий полученные основные теоретические результаты.

**1. Постановка задачи.** Обозначим за  $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$  единичный круг на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , а  $T^+$  – односвязную область, лежащую в круге  $T_1^+$  (см. рис. 1) и ограниченную гладкой замкнутой кривой  $L$ . В области  $T^+$  исследуем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{z} = x - iy$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое

фиксированное неотрицательное целое число, а  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

В свое время первым ученым-математиком, кто занимался исследованием некоторых качественных свойств решений дифференциального уравнения (1), был К.В. Бауэр (K.W. Bauer) [1]. В дальнейшем функциональные свойства решений уравнения (1) изучались многими математиками (см., например, библиографию монографии К.В. Бауэра и С. Рушевича [2]). В частности, было установлено (см., например, [1–2]), что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1) в некоторой односвязной области  $T^+ \subset T_1^+$  можно выразить следующей формулой:

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k g^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где  $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $g^+(z), f^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в области  $T^+$  функции.

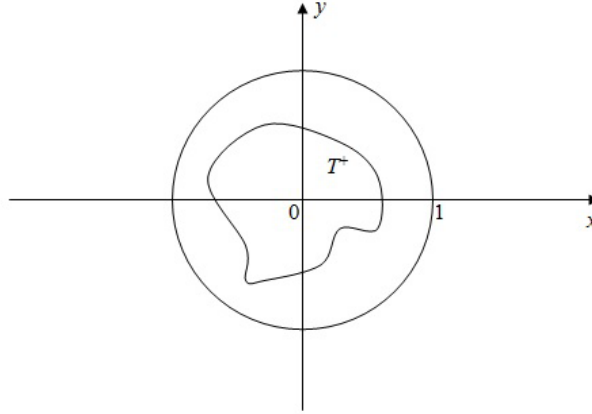


Рис. 1

Без всякого сомнения, если в дифференциальном уравнении вида (1) принять  $n=0$ , то в качестве решений (1) будут выступать гармонические функции в области  $T^+$ . Исходя из этого, далее регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области  $T^+ \subset T_1^+$  для  $n \geq 1$  назовем *обобщенными гармоническими функциями порядка  $n$  в области  $T^+$* . Функцию  $g^+(z)$  обозначим за *первую аналитическую компоненту* обобщенной гармонической функции  $W(z)$ , а  $f^+(z)$  – за *вторую* (данные функции входят в правую часть представления (2)). При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка  $n$  в области  $T^+$  будем обозначать символом  $G_n(T^+)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что обобщенная гармоническая порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) в области  $T^+$  функция  $W(z)$  принадлежит классу  $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , если в представлении (2) аналитические компоненты  $g^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитические функции  $g^+(z), f^+(z)$  непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Далее рассматривается следующая краевая задача.

**Задача  $GД_n$ .** Требуется найти все функции  $W(z)$ , принадлежащие классу  $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$W(t) = h(t), \quad (3)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на контуре  $L$  функция класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера).

Далее для удобства под задачей  $\mathbf{GD}_n$  будем понимать задачу Дирихле для обобщенных гармонических функций порядка  $n$ , а под соответствующей однородной задачей ( $h(t) \equiv 0$ ) – задачу  $\mathbf{GD}_n^0$ .

Главная цель данной статьи состоит в построении конструктивного метода решения задачи  $\mathbf{GD}_n$  в классах  $\mathbf{G}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  в случае, когда  $n=1$  и  $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ , где  $0 < r < 1$ .

**2. О решении задачи  $\mathbf{GD}_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ .** Пусть  $L_r = \{t: |t| = r\}$  – граница круга  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  (см. рис. 2). В силу представления (2) при  $n=1$  и  $T^+ = T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  всякую

обобщенную гармоническую функцию  $W(z)$  из класса  $\mathbf{G}_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{dg^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1-z\bar{z}}g^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2z}{1-z\bar{z}}f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где  $g^+(z), f^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в круге  $T_r^+$  функции, принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ . Учитывая выражение (4) и

соотношение  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , которое выполняется на окружности  $L_r = \{t: |t| = r\}$ ,

краевое условие (3) можно переписать в виде:

$$\frac{dg^+(t)}{dt} + \frac{2r^2}{1-r^2} \frac{1}{t} g^+(t) + \overline{\frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2r^2}{1-r^2} \frac{1}{t} f^+(t)} = h(t), \quad t \in L_r, \quad (5)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на  $L_r$  функция класса  $H(L_r)$ .

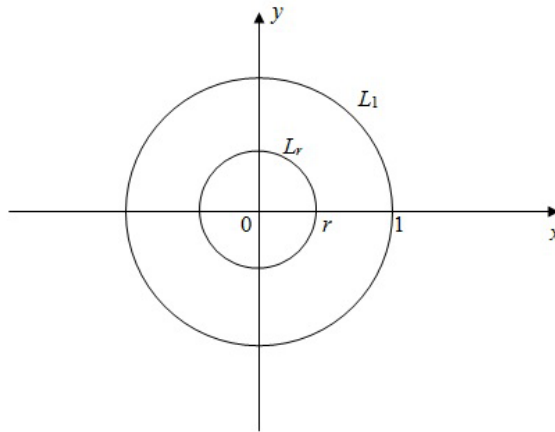


Рис. 2

Затем, рассматривая вспомогательные аналитические в  $T_r^+$  функции

$$\Phi^+(z) = z \frac{dg^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} g^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (6)$$

$$\Psi^+(z) = z \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} f^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (7)$$

перепишем краевое условие (5) следующим образом:

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^2}{r^2} \overline{\Psi^+(t)} + t \cdot h(t), \quad t \in L_r. \quad (8)$$

Наконец, используя принцип симметрии Римана – Шварца (см., например, [7, с. 396]), построим аналитическую в области  $T_r^- = \overline{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$  функцию

$$\Psi^-(z) = \overline{\Psi^+\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^-. \quad (9)$$

Так как в точках окружности  $L_r$  имеет место тождество  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , то верно следующее соотношение («условие симметрии»):

$$\Psi^-(t) = \overline{\Psi^+(t)}, \quad t \in L_r. \quad (10)$$

Учитывая равенство (10), из краевого условия (8) следует

$$\Phi^+(t) = -\frac{t^2}{r^2} \Psi^-(t) + t \cdot h(t), \quad t \in L_r. \quad (11)$$

Однако формула (11) является граничным условием краевой задачи Римана (задачи сопряжения) относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Psi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r$  (см., например, [4, с. 42] или [8, с. 106]).

Ввиду того, что индекс задачи Римана (11) равняется двум ( $\chi = \text{Ind}\left(-\frac{t^2}{r^2}\right) = 2$ ), она безусловно разрешима и, следовательно, общее решение будет иметь вид (см., например, [8, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{r^2} P_2(z), \quad z \in T_r^+, \quad (12)$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{r^2 z^{-2}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h(\tau)}{\tau - z} d\tau + z^{-2} P_2(z), \quad z \in T_r^-, \quad (13)$$

где  $P_2(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2$  – произвольный многочлен второй степени.

Далее, на основании формул (9) и (13) находим аналитическую функцию  $\Psi^+(z)$ :

$$\Psi^+(z) = \overline{\Psi^-\left(\frac{r^2}{z}\right)}, \quad z \in T_r^+. \quad (14)$$

Тогда, в силу равенств (6) и (7), относительно первой и второй аналитических компонент  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  получаем линейные дифференциальные уравнения Эйлера (см., например, [9, с. 136]):

$$z \frac{dg^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} g^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (15)$$

$$z \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2}{1-r^2} f^+(z) = \Psi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (16)$$

где  $\Phi^+(z)$  и  $\Psi^+(z)$  – функции, задаваемые формулами (12) и (14) соответственно.

Нетрудно установить (например, используя метод степенных рядов), что однородные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям (15) и (16), не имеют нетривиальных аналитических решений в круге  $T_r^+$ . Следовательно, в случае их разрешимости, неоднородные уравнения (15) и (16) будут иметь единственные решения.

Предположим, что аналитические в круге  $T_r^+$  функции  $g_1^+(z)$  и  $f_1^+(z)$ , принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , являются решениями неоднородных дифференциальных уравнений (15) и (16) соответственно. Тогда решение поставленной задачи  $\mathbf{GD}_1$  в круге  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  получим, заменив в правой части равенства (4)  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  на функции  $g_1^+(z)$  и  $f_1^+(z)$  соответственно.

Вследствие этого заключаем справедливость следующего предложения.

**Теорема 1.** Пусть  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $0 < r < 1$ . Тогда решение неоднородной задачи Дирихле  $\mathbf{GD}_1$  в классе  $\mathbf{G}_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  сводится к последовательному решению задачи Римана (11) и двух линейных дифференциальных уравнений (15) и (16). Для разрешимости задачи  $\mathbf{GD}_1$  необходимо и достаточно, чтобы дифференциальные уравнения (15) и (16) являлись разрешимыми в классе  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ . При выполнении этих условий общее решение задачи  $\mathbf{GD}_1$  можно представить в виде (4), где  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений (15) и (16).

**Пример.** Пусть в дальнейшем  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Требуется найти все обобщенные гармонические функции первого порядка, принадлежащие классу  $\mathbf{G}_1(T_r^+) \cap H^{(1)}(L_r)$  и удовлетворяющие на  $L_r = \{t: |t| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$  условию

$$W(t) = t^2 + \frac{1}{t}. \quad (17)$$

*Решение.* Поскольку в данном случае  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $h(t) = t^2 + \frac{1}{t}$ , то, согласно формулам (12) и (13), имеем:

$$\Phi^+(z) = z^3 + 1 - 2 \cdot (C_0 + C_1 z + C_2 z^2), \quad z \in T_r^+, \quad (18)$$

$$\Psi^-(z) = -z^{-2} (C_0 + C_1 z + C_2 z^2), \quad z \in T_r^-, \quad (19)$$

где  $C_0, C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные. Следовательно, дифференциальные уравнения (15) и (16) в данном случае принимают вид:

$$z \frac{dg^+(z)}{dz} + 2g^+(z) = z^3 + 1 - 2(C_0 + C_1 z + C_2 z^2), \quad z \in T_r^+, \quad (20)$$

$$z \frac{df^+(z)}{dz} + 2f^+(z) = -(4\overline{C_0} z^2 + 2\overline{C_1} z + \overline{C_2}), \quad z \in T_r^+. \quad (21)$$

Решая дифференциальные уравнения (20) и (21), например, методом степенных рядов, получим

$$g^+(z) = \frac{1-2C_0}{2} - \frac{2}{3} C_1 z - \frac{1}{2} C_2 z^2 + \frac{1}{5} z^3, \quad (22)$$

$$f^+(z) = -\frac{\overline{C_2}}{2} - \frac{2}{3} \overline{C_1} z - \overline{C_0} z^2, \quad (23)$$

где  $C_0, C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные.

Наконец, подставив значения найденных по формулам (22) и (23) функций  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  в правую часть равенства (4), получим решение искомой задачи (17) в виде

$$W(z) = -\frac{4}{3} C_1 - C_2 z + \frac{3}{5} z^2 + \frac{2\overline{z}}{1-z\overline{z}} \left( \frac{1-2C_0}{2} - \frac{2}{3} C_1 z - \frac{1}{2} C_2 z^2 + \frac{1}{5} z^3 \right) - 2C_2 \overline{z} - \frac{2z}{1-z\overline{z}} \left( \frac{C_2}{2} + \frac{2}{3} C_1 \overline{z} + C_0 \overline{z}^2 \right), \quad z \in T_r^+, \quad (24)$$

где  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , а  $C_0, C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные.

### Литература

1. Bauer K.W. Über eine der Differentialgleichung  $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.

2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. 253 p.

3. Heersink R. Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht № 268 (1986).

4. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.

5. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 1(25). С. 402-409.

6. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2018, Vol. 39, No. 1. P. 142-145.

7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 618 с.

8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

9. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

**К.М. Rasulov, T.R. Nagornaya**  
Smolensk State University

### **ABOUT THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION OF ELLIPTIC TYPE**

**Keywords:** *Dirichlet problem, differential equation, simply connected domain, smooth curve, unit circle.*

**Abstract.** *The article deals with a boundary value problem of the Dirichlet type problem for a single differential equation of elliptic type in simply connected domains lying in the unit circle.*

*It is established that in the case of circular domains the considered boundary value problem is equivalent to the generalized (differential) Riemann problem for analytic functions of a complex variable. A constructive method is obtained for solving the considered boundary value problem in circular domains and a complete picture of its solvability in the indicated domains is described. In conclusion, a specific example is given illustrating the main theoretical results obtained.*

**К.В. Осипян, К.М. Расулов**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

### **О ЗАДАЧЕ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РОДА $n$**

**Ключевые слова:** *квазигармоническая функция  $n$ -рода, краевая задача карлемановского типа, дифференциальное уравнение, односвязная область, единичный круг.*

*В данной работе приводится вариант постановки краевой задачи карлемановского типа в классах квазигармонических функций в*



произвольных односвязных областях, являющейся естественным обобщением известной краевой задачи типа Карлемана для аналитических функций. Кроме того, в статье разработан конструктивный алгоритм решения поставленной краевой задачи в классах квазигармонических функций первого рода в единичном круге. Основной теоретический результат проиллюстрирован на конкретном примере.

**1. Постановка задачи.** Обозначим через  $T^+$  конечную односвязную область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченную простым гладким замкнутым контуром Ляпунова  $L$ , а  $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Напомним [1–3], что квазигармоническими функциями рода  $n$  в области  $T^+$  называются функции, определяемые по формуле

$$W(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \quad (1)$$

где

$$A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}, \quad (2)$$

а  $\varphi^+(z)$  – аналитическая функция в области  $T^+$ , которая называется аналитической компонентой квазигармонической функции  $W(z)$ .

В дальнейшем будем считать, что функция  $W(z)$  вида (1) относится к классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , если в правой части (1) аналитическая компонента  $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  (см. также [1–2]).

Рассматривается следующая задача: найти все функции  $W(z)$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на контуре  $L$  условию

$$W^+[\alpha(t)] = G(t) \overline{W^+(t)} + g(t), \quad (3)$$

где  $W^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L} W(z)$ ;  $\alpha(t)$  – прямой сдвиг контура, для которого выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \quad (4)$$

а  $G(t)$  и  $g(t)$  – заданные на контуре  $L$  функции, удовлетворяющие условию Гёльдера совместно с производными включительно до порядка  $n$  (т.е.  $G(t)g(t) \in H^{(n)}(L)$ ), причем  $G(t) \neq 0$ ,  $\alpha'(t) \neq 0$  и  $\alpha'(t) \in H(L)$ .

Сформулированную задачу можно определить как задачу типа Карлемана для квазигармонических функций рода  $n$  в области  $T^+$  или как задачу « $GK_n$ ».

В силу (1)-(2) краевое условие (3) можно представить так:

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\overline{\alpha(t)}}{1 + \alpha(t)\overline{\alpha(t)}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1 + t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} + g(t), t \in L. \quad (5)$$

Отметим, что равенство (5) является краевым условием дифференциальной краевой задачи типа Карлемана относительно аналитической в области  $T^+$  функции  $\varphi^+(z)$  [4, с. 332]. Отсюда можно заключить, что задача « $GK_n$ » представляет собой неформальную модель дифференциальной задачи типа Карлемана для аналитических функций.

Известно, что задачи типа (5), как правило, решаются методом интегральных уравнений [4–5]. Однако указанный метод не дает возможности установить точную картину разрешимости и, соответственно, изучить вопросы устойчивости решений дифференциальных краевых задач типа Карлемана.

Следовательно, важнейшей задачей в теории краевых задач комплексного анализа является поиск более «тонких» методов решения краевых задач типа (5), которые позволили бы проводить более точное и полное их исследование.

Ниже приводится конструктивный метод решения задачи « $GK_n$ » при  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ .

**2. Метод решения задачи « $GK_1$ » в единичном круге.** Пусть  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $L = \{t: |t| = 1\}$  – граница круга  $T^+$ . Так как при  $n=1$  представление (2) принимает вид

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \varphi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (6)$$

где  $\varphi^+(z)$  – голоморфная (аналитическая) в круге  $T^+$  функция, принадлежащая классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , то решения задачи  $GK_1$  будем искать в виде (6).

Поскольку на контуре  $L = \{t: |t| = 1\}$  имеем  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , то в рассматриваемом случае граничное условие (3) можно представить как:

$$\frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} - \frac{1}{\alpha(t)} \varphi^+[\alpha(t)] = G(t) \left\{ \frac{d\varphi^+(t)}{dt} - t \cdot \varphi^+(t) \right\} + g(t), \quad t \in L. \quad (7)$$

Вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую функцию

$$\Phi^+(z) = z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \varphi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (8)$$

граничное условие (7) представим в виде

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t) \overline{\Phi^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L. \quad (9)$$

где  $G_1(t) = t \cdot \alpha(t)G(t)$ ,  $g_1(t) = \alpha(t)g(t)$ . Здесь отметим, что (9) представляет собой граничное условие задачи типа Карлемана относительно аналитической функции  $\Phi^+(z)$  [6, с. 172].

Допустим, что задача типа Карлемана (9) разрешима и определено ее общее решение  $\Phi^+(z)$ . В этом случае (с учетом (8)) для нахождения аналитической компоненты  $\varphi^+(z)$  искомой квазигармонической функции  $W(z)$  нужно решить в классе  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  линейное дифференциальное уравнение Эйлера вида

$$z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} - \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (10)$$

где  $\Phi^+(z)$  – общее решение задачи типа Карлемана (9).

Нетрудно проверить (см. также [1, с. 162]), что при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} \frac{d\Phi^+(0)}{dz} = 0, \\ \left| \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz + \frac{\Phi^+(z)}{z} \right| \leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}}, \\ \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{d\Phi^+(z)}{dz} \right| \leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz$  – фиксированная первообразная функции  $\Phi^+(z)$  в круге  $T^+$ , а  $r = |z|$ ;  $M_k, \alpha_k$  ( $k = 1, 2$ ) – некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \alpha_k \leq 1$ , решение дифференциального уравнения Эйлера (10), принадлежащее классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , можно задавать формулой:

$$\varphi^+(z) = z \left( C + \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz \right), \quad (12)$$

где  $C$  – произвольная комплексная постоянная.

Наконец, подставив в правую часть равенства (6) вместо  $\varphi^+(z)$  функцию, задаваемую формулой (12), получим общее решение искомой задачи « $GK_1$ ».

В результате проведенных выше рассуждений можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема.** *Решение задачи « $GK_1$ » в классе квазигармонических функций 1-го рода в единичном круге  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  сводится к*

последовательному решению краевой задачи типа Карлемана (9) и линейного дифференциального уравнения Эйлера (10); задача «ГК<sub>1</sub>» разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача типа Карлемана (9) и для ее решений выполняются условия (11).

**Пример.** Требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  первого рода, относящиеся к классу  $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , где  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ ,  $L = \{t: |t| = 1\}$ , и удовлетворяющие следующему граничному условию:

$$W^+[\alpha(t)] = -t^2 \overline{W^+(t)} - it, \quad (13)$$

здесь  $\alpha(t) = -t$ .

*Решение.* Так как всякая функция класса  $\mathcal{Q}_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  представляется формулой (6), то в данном случае граничное условие (9) примет вид:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = t^4 \overline{\Phi^+(t)} + it^2. \quad (14)$$

Поскольку  $G_1(t) = t^4$ ,  $g_1(t) = it^2$  и  $\chi = \text{Ind } G_1(t) = \text{Ind } t^4 = 4$ , задача типа Карлемана (14) разрешима и ее общее решение можно представить в виде:

$$\Phi^+(z) = \beta_0 z^2 + \beta_1 (z - z^3) + \beta_2 (iz + iz^3) + \beta_3 (1 + z^4) + \beta_4 (i - iz^4) + iz^2, \quad (15)$$

где  $\beta_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные действительные постоянные [6, с. 186].

Легко проверить, что для того, чтобы функция (15) удовлетворяла условиям (11), достаточно потребовать выполнение условия:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . При выполнении этого условия функция (15) примет вид:

$$\Phi^+(z) = \beta_0 z^2 + \beta_3 (1 + z^4) + \beta_4 (i - iz^4) + iz^2. \quad (16)$$

С учетом (16) из формулы (12) получим

$$\varphi^+(z) = \beta_3 + i\beta_4 + (C + \beta_0 + i)z + \frac{1}{3}(\beta_3 - i\beta_4)z^3, \quad (17)$$

где  $C = p + iq$  – произвольная комплексная постоянная, а  $\beta_k$  ( $k = 0, 3, 4$ ) – произвольные действительные постоянные.

Теперь, подставив в правую часть (6) вместо  $\varphi^+(z)$  функцию (17), получим решение искомой задачи (13):

$$W(z) = C + \beta_0 + i + (\beta_3 - i\beta_4)z^2 - \frac{2\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \left\{ \beta_3 + i\beta_4 + (C + \beta_0 + i)z + \frac{1}{3}(\beta_3 - i\beta_4)z^3 \right\}.$$

Таким образом, общее решение данной граничной задачи (13) линейно зависит от пяти произвольных действительных постоянных  $p, q, \beta_0, \beta_3, \beta_4$ .

## Литература

1. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 1(25). С. 402-409.
3. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, No. 1. P. 142-145.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.

**K.V. Osipyan, K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

### ON THE PROBLEM OF CARLEMAN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS OF THE GENUS $n$

**Keywords:** *quasiharmonic function of the genus  $n$ , boundary value problem of Carleman type, differential equation, simply connected domain, unit circle.*

**Abstract.** *The paper presents a statement of the boundary value problem of Carleman type in the classes of quasiharmonic functions of the genus  $n$  in random simply connected domains, which is a natural generalization of the well-known boundary value problem of Carleman type task for analytic functions. In addition, the paper developed a constructive algorithm for solving the boundary value problem in the classes of quasiharmonic functions of the first type in unit circle. The main theoretical results are illustrated with a concrete example.*

**Н.Р. Перельман**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

### ОБ ОДНОМ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Ключевые слова: *трехэлементная краевая задача, обратный сдвиг Карлемана, бианалитическая функция, уравнение типа Фредгольма.*

В статье рассматривается вторая основная трехэлементная задача типа Карлемана в классе функций, бианалитических внутри контура и непрерывно продолжимых на контур в смысле Гёльдера вместе со своими частными производными первого порядка. В качестве контура выбрана единичная окружность. Приведена подробная постановка задачи, даны определения невырожденного и исключительного случаев данной задачи. Описаны ранее полученные результаты, а также изложен основной результат по рассматриваемому исключительному случаю задачи, который состоит в равносильности исходной задачи четырем уравнениям типа Фредгольма второго рода с некоторыми дополнительными условиями разрешимости.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ ,  $L = \{t: |t| = 1\}$ ,  $T^- = C \setminus (T^+ \cup L)$ , где  $C$  – расширенная комплексная плоскость переменного  $z = x + iy$ .

Напомним, что бианалитическая в  $T^+$  функция  $F(z)$  (решение уравнения  $\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} = 0$  в  $T^+$ , где  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  – дифференциальный оператор Коши – Римана) принадлежит классу  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , если она является непрерывно продолжимой на контур  $L$  вместе со своими частными производными первого порядка, при этом граничные значения и функции, и ее производных должны удовлетворять условию Гёльдера.

В монографии К.М. Расулова (см. [1, с. 288]) была сформулирована следующая трехэлементная краевая задача типа Карлемана.

Требуется найти все бианалитические функции  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  класса  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , удовлетворяющие на  $L$  следующим условиям:

$$F^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)F^+(t) + G_{12}(t)\overline{F^+(t)} + g_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = G_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+} + G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n_+}} + (-1)g_2(t), \quad (2)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n_+}$  – производная по внутренней нормали к  $L$ , а  $G_{kj}(t), g_k(t)$

( $k = 1, 2; j = 1, 2$ ) – заданные на  $L$  функции класса  $H^{(1)}(L)$ ,  $\alpha(t)$  – сдвиг контура  $L$ , удовлетворяющий условию Карлемана  $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ , и такой, что  $\alpha'(t) \neq 0, \alpha'(t) \in H(L)$ .

Здесь в краевом условии (2) множитель  $(-1)$  при  $g_2(t)$  введён для удобства в дальнейших обозначениях.

Сдвиг  $\alpha(t)$ , вообще говоря, может быть как прямым, так и обратным, но в данной работе для определенности будем рассматривать только случай обратного сдвига, то есть сдвига, меняющего ориентацию контура  $L$ . Таким сдвигом для  $L$  (единичной окружности) может служить, например, функция  $\alpha(t) = 1/t$ .

Следуя статье [2], назовем сформулированную задачу *второй основной задачей типа Карлемана для бианалитических функций* или, короче, *задачей  $K_{2,2}$* .

**2. О решении задачи  $K_{2,2}$  в единичном круге.** Как показано в работах [3–4], задача  $K_{2,2}$  эквивалентна векторно-матричной задаче, из-за вырожденности которой она не подчиняется общей теории векторно-матричных задач и требует разработки отдельных методов решения.

Так как (см. [2–4]) в точках единичной окружности

$$\frac{\partial}{\partial n_+} = -t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad t' = it; \quad \bar{t} = \frac{1}{t}, t \in L,$$

то краевые условия (1) и (2) можно привести к виду:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + b_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + h_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где  $a_k(t) = t^{-1}\alpha(t)G_{k1}(t)$ ,  $b_k(t) = t\alpha(t)G_{k2}(t)$ ,  $h_k(t) = \alpha(t)g_k(t)$ ;

$$\Phi_1^+(z) = z\varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad (4)$$

$$\Phi_2^+(z) = z^2 \frac{d\varphi_0(z)}{dz} + z \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \varphi_1(z). \quad (5)$$

Задачи вида (3) при каждом фиксированном значении параметра  $k$  представляют собой *трехэлементную одностороннюю краевую задачу типа Карлемана для аналитических функций* в круге, подробное решение которой в случае обратного сдвига изложено, например, в [4].

В [2] показано, что при условии разрешимости задач (3) получить решение исходной задачи  $K_{2,2}$  можно по формулам:

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z),$$

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_1^+(z) - \Phi_2^+(z)}{z} + \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} \right),$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2} \left( \Phi_1^+(z) + \Phi_2^+(z) - z \frac{d\Phi_1^+(z)}{dz} \right).$$

При этом для того, чтобы решение задачи  $K_{2,2}$  находилось в классе  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a_{1,0} - a_{2,0} = 0, \quad (6)$$

где  $a_{k,m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m \Phi_k^+(0)}{dz^m}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $m = 0$ .

Как показано в [2], каждая трехэлементная задача вида (3) (при фиксированном значении параметра  $k$ ) может быть представлена в виде

$$A_k(t)\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + H_k(t), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(t) &= 1 - G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)}, \\ B_k(t) &= t^2 \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)} \right\}, \\ H_k(t) &= t \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \right\}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, целесообразно рассматривать следующие случаи:

1) либо выполняются условия (*вырожденный случай*)

$$A_k(t) \neq 0, B_k(t) \neq 0, H_k(t) \neq 0, t \in L, k = 1, 2;$$

2) либо выполняются условия (*невырожденный случай*)

$$A_k(t) \equiv 0, B_k(t) \equiv 0, H_k(t) \equiv 0, t \in L, k = 1, 2; \quad (8)$$

3) либо выполняются условия (*первый полувыврожденный случай*)

$$A_1(t) \neq 0, B_1(t) \neq 0, H_1(t) \neq 0,$$

$$A_2(t) \equiv 0, B_2(t) \equiv 0, H_2(t) \equiv 0, t \in L,$$

4) либо выполняются условия (*второй полувыврожденный случай*)

$$A_1(t) \equiv 0, B_1(t) \equiv 0, H_1(t) \equiv 0,$$

$$A_2(t) \neq 0, B_2(t) \neq 0, H_2(t) \neq 0, t \in L,$$

Вырожденный случай, который сводит задачу  $K_{2,2}$  к решению двух хорошо изученных задач (7), подробно рассмотрен в [2].

В данной статье остановимся на невырожденном случае.

Известно (см., например, [5, с. 296]), что всюду на контуре  $L$  выполняется одно из следующих неравенств

$$|a_k(t)| > |b_k(t)|, \quad |a_k(t)| < |b_k(t)|, \quad k = 1, 2.$$

Для определенности всюду в дальнейшем будем рассматривать случай, когда  $a_k(t) \neq 0$  на  $L$  (случай  $b_k(t) \neq 0$  на  $L$  исследуется совершенно аналогично).

Известно (см., например, [4], [5, с. 142]), что для исследования трехэлементной задачи в невырожденном случае представляют интерес следующие три основных подслучая:

а)  $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0;$

б)  $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0, \quad t \in L;$

в) когда выражение  $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$  обращается в нуль в отдельных точках контура  $L$  (например, при следующих параметрах:

$$\alpha(t) = \frac{1}{t}, \quad a_k(t) = t^2 - 2, \quad b_k(t) = \sqrt{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \text{ и } h_k(t) \equiv 0).$$

Подслучаи а) и б) подробно исследованы в работе [4].

Остановимся на подслучае в).



Будем называть задачу  $K_{2,2}$ , для которой выполняются условия данного подслучая, *второй основной трехэлементной односторонней задачей типа Карлемана в исключительном случае.*

В силу условий невырожденности (8) в тех точках  $t_i \in L$ , где  $a_k[\alpha(t_i)] \cdot a_k(t_i) - 1 = 0$ , будем иметь  $b_k(t_i) = 0$ . Последнее условие может выполняться для различных функций  $b_k(t)$ , но мы остановимся на конкретном, хотя и достаточно общем виде этой функции.

Пусть в краевом условии (3) функция  $b_k(t)$ ,  $k = 1, 2$  (при каждом фиксированном  $k$ ) имеет вид:

$$b_k(t) = \tilde{b}_k(t) \prod_{j_k=1}^{v_k} (t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}}, \quad t, \beta_{j_k} \in L, \quad (9)$$

где  $\tilde{b}_k(t) \in H(L)$  и  $\tilde{b}_k(t) \neq 0$  на  $L$ ;  $\beta_{j_k}$  ( $j_k = 1, 2, \dots, v_k$ ) – некоторые точки на  $L$  (нули функции  $b_k(t)$  на  $L$ ), а  $\rho_{j_k}$  ( $j_k = 1, 2, \dots, v_k$ ) – кратности нулей  $\beta_{j_k}$ .

При исследовании задачи  $K_{2,2}$ , для которой выполняется (9), был получен следующий основной результат, базирующийся на решении задачи типа Карлемана в исключительном случае для аналитических функций (см. [6]).

**Теорема 1.** Пусть в краевых условиях (1) – (2) задачи  $K_{2,2}$   $\alpha(t)$  – обратный сдвиг контура  $L$ ,  $G_{k1}(t) \neq 0$ , коэффициенты задачи удовлетворяют условиям невырожденности (8) и выполняются равенства (9).

Тогда решение задачи  $K_{2,2}$  в классе  $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  при  $\chi_k^* = \text{Ind} \left( -\frac{\tilde{b}_k(t)}{a_k(t)} \right) \geq 0$  равносильно четырем уравнениям типа Фредгольма следующего вида:

$$(T_m \phi_m)(t) = \phi_m(t) + \int_L D_m(t, \tau) \phi_m(\tau) d\tau + \overline{\int_L R_m(t, \tau) \phi_m(\tau) d\tau} = r_m(t),$$

$$m = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\phi_m(t)$  – неизвестная функция,  $D_m(t, \tau), R_m(t, \tau), r_m(t)$  определенным образом выражаются через коэффициенты исходной задачи, причем  $R_2(t, \tau) = R_4(t, \tau) \equiv 0$ ; для решений которых выполняются условия (6).

Если же  $\chi_k^* = \text{Ind} \left( -\frac{\tilde{b}_k(t)}{a_k(t)} \right) < 0$ , то добавляется  $-\chi_k^* - 1$  условий разрешимости (см. [6]), и все многочлены с произвольными коэффициентами, входящие в состав ядер и правых частей уравнений типа Фредгольма полагаются тождественно равными нулю.

## Литература

1. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
2. Расулов К.М., Титов О. А. Об исследовании второй основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям: межвузовский сборник научных трудов / Смоленский гос. пед. ун-т. Смоленск, 2004. Вып. 5. С. 66-77.
3. Перельман Н.Р. Решение второй трехэлементной задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7, № 1. С. 15-24.
4. Перельман Н.Р. Трехэлементные односторонние краевые задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических и бианалитических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Смоленск, 2017. 130 с.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.
6. Перельман Н. Р., Расулов К.М. Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестник Брянского госуниверситета. 2012. № 4 (2). С. 46-53.

**N.R. Perelman**

Smolensk State University

### **ON ONE EXCEPTIONAL CASE OF THE SECOND MAIN THREE-ELEMENT CARLEMAN TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR BIANALYTIC FUNCTIONS IN A CIRCLE**

**Keywords:** *three-element boundary value problem, reverse shift Carleman, bianalytic function, Fredholm type equation.*

**Abstract.** *The article deals with the second main three-element Carleman type problem in the class of functions that are bianalytic inside a contour and continuously extendable to a contour in the sense of Hölder together with their first-order partial derivatives. The unit circle is selected as the contour. A detailed statement of the problem is given, definitions of the non-degenerate and exceptional cases of this problem are given. The previously obtained results are described, as well as the main result for the considered exceptional case of the problem is presented, which consists in the equivalence of the original problem to four Fredholm type equations of the second kind with some additional solvability conditions.*

## **НОВЫЙ ПОДХОД К ПОИСКУ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИКЕ И ТЕОРИИ ИГР**

Ключевые слова: *точки равновесия Нэша, метод покоординатного спуска, интеграл Стеклова, точка некооперативного равновесия, точки гомеостаза, интегральное усреднение.*

*Статья посвящена разработке численных методов нахождения точек равновесия в модели, функций ущерба, потерь, убытка, которые описываются выпуклыми (каждая по своей переменной) функциями. Такие модели можно найти в медицине, экономике, теории игр и биологии. Знание точек равновесия важно для нашей жизни, поскольку все сложные структуры, такие как высокоразвитый живой организм, наше общество, а также мультиконкурентные организации в экономике, биологии и теории игр, стремятся к ним.*

*Делается вывод о необходимости применения новых методов для нахождения точек равновесия по Нэшу в негладком случае, а также для получения множества всех таких точек с целью его анализа и выбора наиболее оптимальных решений.*

*Чтобы свести более сложный случай с негладкими функциями, описывающими состояние каждого элемента системы как ущерб, убыток или прибыль, к случаю с гладкими функциями, используются усредненные интегралы Стеклова, которые превращают негладкие функции в гладкие и для которых ранее разработанные численные методы могут быть использованы для нахождения точек равновесия. Важно, чтобы оптимальные точки полученных гладких функций находились вблизи оптимальных точек исходных функций. В процессе оптимизации диаметры множеств  $D_k$ , по которым происходит усреднение, уменьшаются.*

*Построен численный метод нахождения точек равновесия в более общем негладком случае. Доказана сходимость всех предельных точек к точкам равновесия. Построенные методы можно разделить на методы координатного и градиентного спуска. Приведены правила согласованного уменьшения шагов  $\lambda_k$  оптимизации и диаметров  $d(D_k)$  множеств  $D_k$ . Показана необходимость использования усреднения и замены координат при поиске точек равновесия.*

**Введение.** Многие процессы в организме взаимосвязаны и стремятся к некоторому состоянию равновесия, выход из этого

состояния ведет к ухудшению самочувствия: резкому увеличению температуры, давления, уровня холестерина в крови и так далее. С возрастом состояние равновесия меняется. Такое равновесие в медицине называется гомеостазом. По определению, гомеостаз – саморегуляция, способность открытой системы сохранять постоянство своего внутреннего состояния посредством скоординированных реакций, направленных на поддержание динамического равновесия [1].

Пусть физическое состояние организма описывается  $m$  функциями  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ...,  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , зависящими от  $m$  параметров  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Тогда равновесное состояние организма – это такое состояние  $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m$ , для которого изменение одного из параметров, например  $x^*_j$ , ведет к увеличению соответствующей функций  $f_j(\cdot)$ , то есть

$$f_j(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_j, \dots, x^*_m) \leq f_j(x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_{j-1}, x_j, x^*_{j+1}, \dots, x^*_m). \quad (1)$$

В экономике равновесные состояния были введены Дж. Нэшем. В 1950–1953 годах им были опубликованы статьи и доказаны теоремы о существовании при определенных условиях ситуации равновесия [10–14].

Хорошо известно, что в природе все живые существа находятся в равновесии. Стоит только исчезнуть или резко уменьшиться в количестве какому-либо виду животных или насекомых, как это пагубно сказывается на состоянии других видов.

Для биофабрикации искусственных тканеподобных образований с заданными биологическими свойствами с применением технологии саморазвивающихся эндотелиальных капиллярных сетей (Проекты РФФИ № 94-04-13544 «Структурный анализ микрососудистых бифуркаций» и № 96-04-50991 «Клеточная и тканевая инженерия эндотелия (формирование в культуре эндотелия *in vitro* функционирующих саморазвивающихся капиллярных сетей)» (1994–1998 гг.), проект Фонда Сколково «Универсальная платформа "Франкенштейн" для биофабрикации искусственных тканей и органов» [Заявка № 35719 (2015-2019)], научн. рук. проф. В.А. Глотов) мы имеем дело со сложной открытой кибернетической системой, требующей специальных алгоритмов управления. Сюда входит оптимизация управления такими параметрами среды, как pH, pCO<sub>2</sub>, pO<sub>2</sub>, pK<sup>+</sup>, pCa<sup>+</sup>, T°С, давление, скорость потоков питательной среды, другими специальными показателями (бактериальное, грибковое, вирусное загрязнение среды). Состояние, которое мы стремимся найти, есть точка гомеостаза или, иначе говоря, точка равновесия в рассматриваемой биологической системе.

Проблема нахождения точки (состояния) равновесия в медицине, экономике и биологии тесно связана с теорией игр. Аналогично предыдущему определяется равновесное состояние в теории игр и экономике. Рассмотрим некоторую бескоалиционную игру из  $m$  лиц. Если игроки не образуют кооперацию, то на стратегии друг друга они повлиять не могут. Игрок  $i$  выбирает чистую стратегию  $x_i$  из выпуклого компактного множества  $D_i$ .

Образуем вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , называемый мультистратегией, составленный из чистых стратегий  $x_i \in S_i$ , принадлежащий компактному множеству  $S_i$ . Считаем, что вектор  $x$  принадлежит выпуклому компактному множеству  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m \in \mathbb{R}^m$ , составленному из декартова произведения выпуклых компактных множеств  $S_i$ ,  $i \in 1:m$ . Все игроки выбирают стратегии независимо друг от друга. Здесь и далее  $\mathbb{R}^m$  –  $m$ -мерное евклидово пространство.

**Определение 1.** Мультистратегия  $x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m) \in S$  в некооперативной игре  $m$  лиц называется некооперативным равновесием, если для каждого  $j \in 1:m$  и любого  $x_j \in S_j$  выполняется неравенство (1).

Определения равновесного состояния в медицине, экономике и теории игр подобны друг другу [1], [10–14]. В 1950 году Дж. Нэш доказал следующую теорему.

**Теорема 1** [10]. Пусть для любого  $i \in 1:m$  множества  $D_i$  выпуклые компакты и функции  $f_i(\cdot)$  – выпуклые по  $x_i$ . Тогда в некооперативной игре с  $m$  лицами существует ситуация равновесия.

Из определения состояния равновесия понятно, что для его определения надо применять методы покоординатного спуска, поскольку, как следует из написанного выше неравенства (1), точка  $x_i^*$ ,  $i \in 1:m$ , является точкой локального минимума вдоль  $i$ -й координаты.

Целью работы явилась разработка численных методов нахождения точек равновесия в модели, функции потерь каждого из объектов (субъектов) которой описываются выпуклыми функциями.

**Методика.** Опишем метод поиска состояния равновесия при условии, что функции  $f_i(x_{-i}, x_i): S \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ , выпуклые по  $x_i$ . В общем случае  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , – липшицевые, недифференцируемые функции. Обозначим через  $f'_{i,x_i}(\cdot)$  производную по переменной  $x_i$  функции  $f_i(\cdot)$ . Будем считать, что для выпуклого компактного множества  $S$  для любого  $i \in 1:m$  верно включение  $\{x \in \mathbb{R}^m \mid f_i(x) < f_i(x_0)\} \subset \text{int } S$ , где  $x_0$  – начальная точка. (Здесь  $\text{int } S$  – внутренность множества  $S$ ). Это, очевидно, выполняется для коэрцитивных функций  $f_i(\cdot)$  и достаточно большого по диаметру выпуклого компактного множества  $S$ . В общем случае для данного предположения множество  $S$  может быть всем пространством  $\mathbb{R}^m$ .

Введем субдифференциал функции  $f_i(\cdot)$  по переменной  $x_i$ . По

определению

$$\partial_{x_i} f_i(x) = \{w_i \in \mathbb{R} \mid w = (w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m, \\ (w, \alpha e_i) = \alpha w_i \leq f_i(x + \alpha e_i) - f_i(x) \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Здесь  $(w, e_i)$  – скалярное произведение векторов  $w, e_i$ , которое, очевидно, есть  $i$ -я координата вектора  $w$ . Дадим определение полунепрерывности сверху (ПН.СВ) многозначного отображения (МО) в точке [3, 5].

**Определение 2.** МО  $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$  называется ПН.СВ в точке  $y$ , если для любых последовательностей  $\{y_k\}$  и  $\{w_k\}$ ,  $w_k \in \partial_{x_i} f_i(y_k)$ , для которых  $y_k \rightarrow y$ ,  $w_k \rightarrow w$  при  $k \rightarrow \infty$ , следует включение  $w \in \partial_{x_i} f_i(y)$ . Можно доказать [3], [5] следующую лемму.

**Лемма 1.** Субдифференциальное отображение  $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$  ПН.СВ в любой точке  $x_i \in \text{int } S_i$ .

Под коэрцитивной функцией  $\varphi(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  понимают такую функцию, что для любых  $x, g \in \mathbb{R}^m$  верно предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x + \alpha g)}{\alpha} = +\infty.$$

К коэрцитивным функциям относятся, например, сильно выпуклые функции [2,3]. Пусть найдена  $k$ -ая точка  $z_k \in \mathbb{R}^m$  оптимизационного процесса. Найдем точку  $z_{k+1}$ . Процесс будет состоять из  $m$  шагов. Положим в качестве координатных векторов следующие векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

**Алгоритм поиска точки равновесия схожий с методом покоординатного спуска.** Метод покоординатного спуска для недифференцируемой функции, как известно [2], не сходится к точке минимума. Поэтому  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , заменяют на  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , которые строятся следующим образом

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f_i(x+y) dy, \quad i \in 1:m, \quad (2)$$

где  $D$  – произвольное выпуклое компактное множество,  $0 \in \text{int } D$ ,  $\mu(D) > 0$  – мера Лебега множества  $D$ . Как доказывается [6],  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , – непрерывно дифференцируемые по  $x$  функции. Одно из свойств функций  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1:m$ , заключается в том, что, как и функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , они выпуклые каждая по своей переменной  $x_i$ , что можно доказать по аналогии с тем, как это делалось в статье [6] при доказательстве выпуклости функции  $\varphi_i(\cdot)$  по переменным  $x_i$ ,  $i \in 1:m$ , если функция  $f_i(\cdot)$  выпуклая по переменным  $x_i$ ,  $i \in 1:m$ .

Применение поочередного покоординатного спуска для функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , может давать расходящуюся последовательность, когда расстояния между точками, получаемыми при оптимизации на каждом

шаге, неограниченно увеличиваются. Также возможен случай, когда получающиеся точки зацикливаются. Приводятся примеры на этот счет.

Для сходимости получившейся последовательности точек требуется применять усреднение и замену координат с заменного порядка покоординатной оптимизации. Нетрудно показать, что при условии коэрцитивности функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , также коэрцитивные.

### Метод покоординатного спуска поиска точек равновесия по Нэшу

Шаг 1. Рассмотрим прямую  $y_1(\alpha) = z_k + \alpha e_1$ ,  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ , и найдем  $\alpha_1$  такое, что  $\varphi_1(y_1(\alpha_1)) = \min_{y_1(\alpha) \in S} \varphi_1(y_1(\alpha))$ . Такое  $\alpha_1$  будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ . Полагаем  $z_{k+1} = y_1(\alpha_1)$ .

Шаг 2. Рассмотрим прямую  $y_2(\alpha) = z_k + \alpha e_2$ ,  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ , и найдем  $\alpha_2$  такое, что  $\varphi_2(y_2(\alpha_2)) = \min_{y_2(\alpha) \in S} \varphi_2(y_2(\alpha))$ . Такое  $\alpha_2$  будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ . Полагаем  $z_{k+2} = y_2(\alpha_2)$ .

Шаг 3. И так далее до  $m$ -ого шага.

Шаг  $m$ . Рассмотрим прямую  $y_m(\alpha) = z_k + \alpha e_m$ ,  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ , и найдем  $\alpha_m$  такое, что  $\varphi_m(y_m(\alpha_m)) = \min_{y_m(\alpha) \in S} \varphi_m(y_m(\alpha))$ . Такое  $\alpha_m$  будет существовать в силу сделанного предположения насчет коэрцитивности функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ . Полагаем  $z_{k+m} = y_m(\alpha_m)$  и возвращаемся к шагу 1.

Возможна ситуация, что описанный метод зацикливается. Например, если для дифференцируемых функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$ , кривые  $f'_{i, x_i}(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , есть, например,  $x_2 = x_1$ ,  $x_2 = -x_1$ , то  $y_{2m}(\alpha_{2m}) = y_1(\alpha_1)$ . В этом случае надо сделать  $2m$  шагов согласно данному методу и применить усреднение

$$z_{m+1} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} y_i(\alpha_i).$$

Также возможен случай, когда для последовательности  $\{z_k\}$ , построенной согласно методу покоординатного спуска, расстояние между точками неограниченно увеличивается при  $k \rightarrow \infty$ . Такую последовательность  $\{z_k\}$  будем называть расходящейся. Приведем пример на этот счет.

**Пример.** Пусть заданы две дифференцируемые выпуклые функции  $f_1(\cdot), f_2(\cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть также линии минимумов этих функций по переменным  $x_1$  и  $x_2$  соответственно при фиксированной оставшейся переменной, т.е. линии  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , определяемые равенствами  $\Pi_i = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f'_{i, x_i}(x) = 0\}$ , для  $i = 1, 2$  есть соответственно прямые  $x_2 = 1/3 x_1$ ,  $x_2 = 1/2 x_1$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , проходящие в первой и третьей четвертях и пересекающиеся под острым углом. Тогда



оптимизационный процесс, построенный согласно алгоритму 1, для любой из первой четверти начальной точки, находящейся внутри области, определяемой острым углом, будет давать последовательность точек  $\{z_k\}$ , получающуюся пересечением в процессе оптимизации горизонтальными прямыми  $x_2=c_2$ , где  $c_2$  – константа, прямой  $x_2=1/3 x_1$  и вертикальными прямыми  $x_1=c_1$ , где  $c_1$  – константа, прямой  $x_2=1/2 x_1$ . Легко видно, что последовательность  $\{z_k\}$  и ее произвольная выпуклая комбинация будут расходиться и не будут сходиться к точке равновесия по Нэшу, которая в данном случае есть точка пересечения прямых  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , – начало координат.

Для того чтобы получить последовательность  $\{z_k\}$ , сходящуюся к точке равновесия по Нэшу, надо помимо вычисления выпуклой комбинации (усреднения) применять преобразование координат, а именно: замену переменных, когда, например, переменную  $x_1$  заменяют переменной  $x_2$ , а переменную  $x_2$  – переменной  $x_1$ . Также надо вместо оптимизации по переменной  $x_1$  делать на первом шаге оптимизацию по переменной  $x_2$ .

**Определение 3.** Назовем  $\varepsilon(D)$  точкой равновесия функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , такую точку  $x_\varepsilon^*$ , для которой множеству  $x_\varepsilon^* + D$  принадлежит точка равновесия  $v^* = (v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_m)$  функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , по переменной  $x_i$ . т.е.  $f_i(v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_m) \leq f_i(v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_{i-1}, x_i, v^*_{i+1}, \dots, v^*_m) \quad \forall x_i \in S_i$ .

Функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , – гладкие, выпуклые по  $x_i$  [6]. Поэтому для них выполняются условия теоремы Нэша. Прежде всего заметим, что для гладких функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , метод покоординатного спуска вместе операциями усреднения и замены переменных дает последовательность точек  $\{z_k\}$ , любая предельная точка которой есть точка равновесия функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ . Благодаря методу усреднения и замены координат в процессе поиска точки равновесия мы получаем последовательность точек, которые будут стремиться к точкам пересечения поверхностей  $\Pi_i$ ,  $i \in 1: m$ , определяемых равенствами  $\varphi'_{i,x_i}(\cdot) = 0$ , которые в свою очередь есть точки равновесия для функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ .

**Лемма 2** [7]. *Любая предельная точка  $z^*$  последовательности  $\{z_k\}$  является  $\varepsilon(D)$  точкой равновесия функции  $f_i(\cdot)$  по переменной  $x_i$ ,  $i \in 1: m$ .*

В [7] описан метод, показывающий, как получить точки равновесия для функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1: m$ , из  $\varepsilon(D)$  точек равновесия функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ . Обозначим через  $u_k$   $\varepsilon(D)$  точки равновесия функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , вычисленных согласно (2) для  $D = D_k$ . Уменьшаем диаметр множества  $D_k$ , по которому идет интегрирование, т.е.  $\text{diam}(D_k) = d(D_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . В итоге получаем последовательность точек  $\{u_k\}$ .



**Теорема 2 [7].** Любая предельная точка  $u^*$  последовательности  $\{u_k\}$ , полученная применением шагов 1 и 2, является точкой равновесия по Нэшу функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ .

Недостатком описанного метода является то, что для получения предельной точки  $u^*$  последовательности  $\{u_k\}$  надо построить каждую точку  $u_k$  для постоянного множества  $D_k$ . При увеличении  $k$  диаметры множеств  $D_k$  устремляем к нулю. При поиске точки  $u_k$  применяем методы одномерной оптимизации для функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , по переменным  $x_i$  соответственно. Надо так изменить метод поиска точек  $u^*$ , чтобы уменьшение диаметров множеств  $D_k$  происходило в процессе оптимизации соразмерно с уменьшением шага  $\lambda_k$ , что и сделаем далее.

Основное отличие дифференцируемого (гладкого) случая от недифференцируемого (негладкого) случая заключается в том, что в разложении для негладких функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ ,  $f_i(x + \alpha e_i) = f_i(x) + (f'_{i,x_i}(x) \alpha e_i) + \bar{o}_{i,x}(\alpha)$ ,  $\bar{o}_{i,x}(\cdot)$  не являются равномерно бесконечно малыми функциями по  $x$ . При замене функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , на функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , мы приходим к гладкому случаю, так как функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , для фиксированного множества  $D$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями. В разложении  $\varphi_i(x + \alpha e_i) = \varphi_i(x) + (\varphi'_{i,x_i}(x) \alpha e_i) + o_{i,x}(\alpha)$ ,  $o_{i,x}(\cdot)$  – равномерно бесконечно малые функции, зависящие от выбранного множества  $D$ . В [6] показано, что при выборе множества  $D$  в виде шара или квадрата, т.е. для  $D$  равномерно вытянутого по всем направлениям, производная  $\varphi'_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , липшицева с константой Липшица  $L_i/d(D)$ , где  $L_i$  – константа Липшица функции  $f_i(\cdot)$  по переменной  $x_i$ ,  $d(D)$  – диаметр множества  $D$ . Запишем систему неравенств

$$|o_{i,x}(\alpha)| = |\varphi_i(x + \alpha e_i) - \varphi_i(x) - (\varphi'_{i,x_i}(x), \alpha e_i)| \leq \alpha_k \|\varphi'_{i,x}(\xi) - \varphi'_{i,x}(x)\| \leq \alpha L_i/d(D) \|\xi - x\| \leq \alpha^2 L_i/d(D).$$

Здесь  $\xi$  принадлежит отрезку  $[x, x + \alpha e_i]$ . Отсюда  $|o_{i,x}(\alpha)/\alpha| \leq \alpha L_i/d(D)$ . Следовательно, если в процессе поиска точек равновесия по Нэшу мы будем сжимать множество  $D_k$  таким образом, чтобы для шага  $\lambda_k$  оптимизационного процесса и диаметра  $d(D_k)$  выполнялся предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k/d(D_k) = 0, \quad (3)$$

то  $o_{i,x}(\cdot)$  будут равномерно бесконечно малыми для любого шага  $k$ . Если для  $\lambda_k$  и  $d(D_k)$  выполняется равенство (3), то будем говорить о согласованном уменьшении шага  $\lambda_k$  и диаметра  $d(D_k)$ .

**Модифицированный метод поиска точки равновесия с применением функций  $\varphi_i(\cdot)$**

Шаг 1. Выбираем множество  $D_k$  в виде  $m$ -мерного шара или куба. Применяем описанный выше алгоритм поиска точки равновесия для дифференцируемых функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , вычисленных по формуле (2).

Шаг 2. Если последовательность  $\{z_k\}$  ограничена, но имеет координаты  $x_i$ , не монотонные при выполнении  $2m$  шагов метода покоординатного спуска для дифференцируемых функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , то находим среднюю точку получившихся точек  $u_i$ ,  $i \in 1:2m$ , и полагаем

$$z_{m+1} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} u_i.$$

Если последовательность  $\{z_k\}$  такая, что расстояние между точками  $z_k$  увеличивается, то производим перестановку переменных у функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , с последующей перестановкой порядка оптимизации по соответствующим переменным.

Если для некоторой последовательности  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow \infty$  выполняется неравенство

$$\lambda_k / d(D_k) < \varepsilon_k, \quad (4)$$

где  $\lambda_k$  длина  $k$ -ого шага, то уменьшаем диаметр множества  $D_k$  таким образом, чтобы в итоге левая часть неравенства (4) стремилась к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Полагаем  $k = k+1$  и переходим к шагу 1. В итоге получаем последовательность точек  $\{z_k\}$ .

**Теорема 3.** Любая предельная точка  $z^*$  последовательности  $\{z_k\}$ , полученной применением шагов 1 и 2 метода покоординатного спуска для непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , является точкой равновесия по Нэшу игре с функциями потерь  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ .

**Доказательство.** Доказательство подобно доказательству теоремы 1 [7]. Согласно этой теореме и описанию метода покоординатного спуска

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi'_{i,x_i}(z_k)\| = 0$$

для любого  $i \in 1:m$ . В противном случае какая-то из функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , была бы неограниченной, так как все  $o_{ik}(\cdot)$  в разложении функций  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , равномерно бесконечно малые по  $k$  ( $k$  – номер шага). Отсюда получаем включение  $0 \in \partial_{x_i} f_i(z^* + y_i(D_k)) + B_{\delta_k}^m(0)$ , где  $y_i(D_k) \in D_k$ ,  $B_{\delta_k}^m(0)$  –  $m$ -мерный шар в  $R^m$  с центром в нуле и радиусом  $\delta_k$ . Так как диаметры  $d(D_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то из ПН.СВ отображения  $\partial_{x_i} f_i(\cdot)$  следует включение  $0 \in \partial_{x_i} f_i(z^*)$  для всех  $i \in 1:m$ . Но последнее и означает, что  $z^*$  – точка равновесия функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , по координатам  $x_i$ ,  $i \in 1:m$ , соответственно, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Если функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , недифференцируемые, то градиентные методы, упомянутые выше, могут не сходиться [2]. Будем считать функции  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , липшицевыми с константами  $L_i$  соответственно по совокупности переменных  $x_i$ ,  $i \in 1:m$ . Заменяем  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , на функции  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , определяемые формулами

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi_i(x+y) dy,$$

где функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , и множество  $D$  определены выше (2). Тогда, поскольку  $\varphi_i(\cdot)$  – липшицева [6], то согласно предыдущему будем иметь:

$$\Phi'_i(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi'_i(x+y) dy.$$

Доказано, что функции  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , имеют липшицевую вторую производную [6]. В случае, когда  $D$  есть шар или куб в  $R^m$ , коэффициент Липшица функции  $\Phi''_i(\cdot)$  равен  $L'_i = \frac{2L_i}{d^2(D)}$ , где  $d(D)$  – как и ранее, диаметр множества  $D$ . Поэтому для функций  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , можно применять градиентные методы поиска точек равновесия по Нэшу. В процессе оптимизации мы устремляем диаметры шара или куба  $D_k$  к нулю, чтобы для длины шага  $\lambda_k$  и диаметра  $d(D_k)$ , который стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , выполнялось неравенство

$$\lambda_k / d^2(D_k) < \varepsilon_k \quad (5)$$

для некоторой последовательности  $\{\varepsilon_k\}$  при условии, что  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Неравенство (5) гарантирует, как и выше (теорема 3), что любая предельная точка последовательности, полученной градиентным методом, использующим функции  $\Phi'_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , и вторые производные  $\Phi''_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ , будет точкой равновесия по Нэшу функций  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in 1:m$ .

**Алгоритм (градиентный метод с применением функций  $\Phi_i(\cdot)$ )**

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\Phi_i(\cdot)$ ,  $i = 1:m$ , когда  $D$  есть шар или куб, вычисляем вектор  $\Theta(x)$  и матрицу  $\Theta'(x)$ :

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \Phi'_{1,x_1}(x) \\ \Phi'_{2,x_2}(x) \\ \dots \\ \Phi'_{m,x_m}(x) \end{pmatrix},$$

$$\Theta'(x) = \begin{pmatrix} \Phi''_{1,x_1,x_1}(x) & \Phi''_{1,x_1,x_2}(x) & \dots & \Phi''_{1,x_1,x_m}(x) \\ \Phi''_{2,x_2,x_1}(x) & \Phi''_{2,x_2,x_2}(x) & \dots & \Phi''_{2,x_2,x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi''_{m,x_m,x_1}(x) & \Phi''_{m,x_m,x_2}(x) & \dots & \Phi''_{m,x_m,x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Вектор  $\Delta z_k = -(\Theta'(z_k))^{-1} \Theta(z_k)$  определяет направление, вдоль которого надо производить поиск решения на  $k$ -м шаге. На каждом шаге  $k$  производим одномерную оптимизацию [8] по  $t \in R$ : находим такое  $t_k$ , для которого  $\|\Theta(z_k + t_k \Delta z_k)\| \leq \delta_k$ ,  $\delta_k \rightarrow +0$ . Если для некоторой последовательности  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow \infty$ , выполняется неравенство (5), где  $\lambda_k$  длина  $k$ -го шага, то уменьшаем диаметр множества  $D_k$  и полагаем  $z_{k+1} = z_k + t_k \Delta z_k$ . Процесс повторяем до тех пор, пока  $\|\Theta(z_k)\| \leq$

$\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – наперед заданное произвольно малое, положительное число. Возьмем последовательность множеств  $\{D_s\}$  с непустой внутреннейностью, диаметры  $d(D_s)$  которых стремятся к нулю при увеличении  $s$ . Пусть

$$D_s = B_{r_s}^n(0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq r_s\}$$

для  $r_s \rightarrow +0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Введем для  $i \in 1 : m$  последовательность функций

$$\varphi_{i,s}(x) = \frac{1}{\mu(D_s)} \int_{D_s} f_i(x+y) dy, \quad \Phi_{i,s}(x) = \frac{1}{\mu(D_s)} \int_{D_s} \varphi_{i,s}(x+y) dy.$$

Строим функции  $\Theta_s(\cdot)$  для функций  $\Phi_{i,s}(\cdot)$ , как это описано выше. Пусть для матрицы вторых смешанных производных функции  $\Phi_{i,s}(\cdot)$  выполняется неравенство  $\|\Phi''_{i,s}(\cdot)\| \leq L_s$ . В [6] доказано, что в качестве  $L_s$  может быть взята константа  $L_s = \frac{L}{d(D_s)}$ , где  $L = \max_{i \in 1:m} L_i$ . Пусть также  $\|\Theta'_s(\cdot)\| \leq L_s$ . Определим вектор-функцию  $\tilde{Q}_s(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  как функцию от  $y$ :  $\tilde{\Theta}_s(y,x) = \Theta_s(y) + 2L_s(y-x)$ . Тогда для матрицы  $\tilde{\Theta}'_s(\cdot)$  имеют место неравенства

$$L_s \|z\|^2 \leq (\tilde{\Theta}'_s(x,x)z, z) \leq 3L_s \|z\|^2 \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (6)$$

Построим градиентный метод поиска корней уравнения  $\Theta_s(x) = 0$  с использованием функции  $\tilde{\Theta}_s(x) = 0$  и с одновременным согласованным уменьшением в процессе оптимизации диаметра множества  $D_s$  и шага оптимизации  $\lambda_k$ .

### Описание градиентного метода поиска точек равновесия по Нэшу с использованием функций $\Phi_{i,s}(\cdot)$

Пусть точка  $x_k$  на  $k$ -м шаге уже построена. Построим точку  $x_{k+1}$ . Положим по определению  $\tilde{Q}_{s,k}(\cdot) = \tilde{Q}_s(\cdot, x_k)$ . Зависимость  $s$  от  $k$  будем записывать в виде  $s=s(k)$ . Вектор  $g_k = -\left(\tilde{Q}'_{s(k),k}(x_k)\right)^{-1} \tilde{Q}_{s(k),k}(x_k)$  определяет направление, вдоль которого надо производить поиск решения на  $k$ -ом шаге. На каждом шаге  $k$  находим  $g_k$  и производим одномерную оптимизацию [7] по  $t \in \mathbb{R}$ . Находим такое  $t_k$ , для которого  $\|\tilde{Q}_{s(k),k}(x_k + t_k \Delta x_k)\| \leq \varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow +0$ . После нахождения  $t_k$  переходим к шагу  $k+1$ . Полагаем  $x_{k+1} = x_k + t_k \Delta x_k$ . Будем предполагать, что, начиная для достаточно больших  $k$ , мы попадаем в малую окрестность точек равновесия по Нэшу, где процесс идет с полным шагом, т.е. для  $t_k = 1$ . Если для всех  $k$  выполняется неравенство (5) для некоторой последовательности  $\{\varepsilon_k\}$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то уменьшаем диаметр множества  $D_k$  и увеличиваем  $s$ . Для производной  $\tilde{Q}'_{s(k),k}(x_k)$  для всех  $s, k$  выполняется неравенство (6). Вначале докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{s(k),k}(x_k) = 0 \quad (7)$$

и последовательность  $\{x_k\}$  имеет предельную точку  $x^*$ . Имеем разложение функции  $\tilde{Q}_{s(k),k}(\cdot)$  в ряд в окрестности точки  $x_k$

$$\tilde{Q}_{s(k),k}(x_{k+1}) = \tilde{Q}_{s(k),k}(x_k) + \tilde{Q}'_{s(k),k}(x_k)\Delta x_k + o_{s(k),k}(\Delta x_k).$$

При подстановке  $\Delta x_k = - \left( \tilde{Q}'_{s(k),k}(x_k) \right)^{-1} \tilde{Q}_{s(k),k}(x_k)$  в это разложение получим

$$\tilde{Q}_{s(k),k}(x_{k+1}) = o_{s(k),k}(\Delta x_k). \quad (8)$$

Покажем, что  $o_{s(k),k}(\cdot)$  равномерно по  $k$  бесконечно малая функция. Аналогично разложению выше имеем разложение

$$\Theta_s(x_{k+1}) = \Theta_s(x_k) + \Theta'_s(x_k)\Delta x_k + o_{s(k),k}(\Delta x_k).$$

Воспользовавшись теоремой о средней точке для  $\Theta_s(\cdot)$  и липшицевостью функции  $\Theta'_s(\cdot)$  с константой Липшица  $2L/d^2(D_k)$ , получим оценку сверху

$$\|o_{s(k),k}(\Delta x_k)\| \leq 2L \|\Delta x_k\|^2 / d^2(D_k).$$

Поэтому, если в процессе оптимизации

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta x_k\| / d^2(D_{s(k)}) = 0,$$

то отсюда следует равномерная бесконечная малость по  $s = s(k)$  и  $k$  функции  $o_{s(k),k}(\cdot)$ . Но мы организуем оптимизационный процесс именно таким образом, чтобы предельное равенство (3) выполнялось. Из (3) следует предельное равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{s(k)} \Delta x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} L \Delta x_k / d(D_{s(k)}) = 0.$$

Отсюда и из (8) следует равенство (7). Так как выполняется (3), то  $\|\Delta x_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и последовательность  $\{x_k\}$  имеет предельные точки  $x^*$ . Аналогично ранее приведенным рассуждениям (теорема 3) из ПН.СВ субдифференциального отображения Кларка и равенства (8) следует, что последовательность точек  $\{x_k\}$  имеет предельную точку  $x^*$ , в которой  $0 \in \partial_{x_i} f_i(x^*)$  для всех  $i \in 1 : m$ , т.е. точка  $x^*$  является точкой равновесия по Нэшу. Все сказанное верно, если мы попадаем в малую окрестность точки равновесия по Нэшу. Для того чтобы это случилось, надо применять метод покоординатного спуска, а в случае необходимости применять метод усреднения и замену переменных, которые гарантируют, что точки  $\{x_k\}$  не будут зацикливаться и расходиться. Таким образом доказана теорема.

**Теорема 4.** Для начальной точки из достаточно малой окрестности точек равновесия при выполнении неравенства (5) любая предельная точка градиентного метода является точкой равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре с липшицевыми, выпуклыми по переменной  $x_i$  функциями потерь  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in m$ .

Описанный градиентный метод называют также модифицированным методом Ньютона. Нетрудно показать, что при выполнении условия согласования (5) существует мажорантная функция Канторовича [9] для любого шага  $k$ , с помощью которой оценивается

величина шага и скорость сходимости метода, т.е. в теореме 4 можно говорить не о сходимости подпоследовательности к предельной точке, а о сходимости всей последовательности  $\{x_k\}$ .

### Литература

1. Гомеостаз / под ред. П.Д. Горизонтова. М.: Медицина. 1981. 576 с.
2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М: Наука, 1972. 368 с.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. Жуковский В.И., Макаркина Т.В., Бельских Ю.А. Существование точек равновесия по Бержу // Таврический вестник математики и информатики. 2018. Т. 38, № 1. С.7-16.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
6. Прудников И.М.  $C^2(D)$  интегральные аппроксимации негладких функций, сохраняющие  $\varepsilon(D)$  точки локальных экстремумов. // Труды Института математики и механики. УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 159-169.
7. Прудников И.М. Точки гомеостаза и способы их нахождения I // Вестник Смоленской государственной медицинской академии. 2018. Т. 17, № 4. С. 22-29.
8. Мурга О.К. Численные методы оптимизации: учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004. 59 с.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М: Наука, 1984. 752 с.
10. Nash J.F. Equilibrium points in n-person games // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1950. Vol. 36. P. 48-49.
11. Nash J.F. The bargaining problem // Econometrics. 1950. Vol. 18. P. 155-162.
12. Nash J.F. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. P. 286-295.
13. Nash J.F. Two-person cooperative games // Econometrics. 1953. Vol. 21. P. 128-140.
14. Berge C. Theory generale des jeux a n personnes. Paris: Gauthier Villar, 1957. 114 с.

**I.M. Prudnikov**

Smolensk State Medical University

### THE NEW APPROACH FOR FINDING THE EQUILIBRIUM POINTS IN ECONOMICS AND GAME THEORY

**Keywords:** *the equilibrium points by Nash, the method of coordinate and gradient descent, the Steklov integral, the noncooperative equilibrium points, the homeostasis points*

**Abstract.** *The purpose of this work was the development of numerical methods for finding equilibrium points in the model, damage, loss or income functions of the objects of which are described by convex functions. Such models can be found in medicine, economics, game theory, and biology. Knowledge of the equilibrium points is important for our life, since all*



*complex structures, such as any highly developed living organism, our society and also multi-competitive organizations in economics, biology and game theory strive for them.*

*It is concluded that it is necessary to apply new methods for finding Nash equilibrium points in the nonsmooth case, as well as to obtain the set of all such points in order to analyze it and select the most optimal solutions.*

*To reduce a more complicated case with nonsmooth functions describing the state of each element of the system as damage, loss or profit, to a case with smooth functions the Steklov average integrals are used that turn nonsmooth functions into smooth ones, for which previously developed numerical methods can be used for finding equilibrium points. It is important that the optimal points of the smooth functions were close to the optimal points of the initial functions at advance given distance. In the process of optimization, the diameters of the sets  $D_k$ , which the averaging takes place over, are decreased.*

*A numerical method for finding the equilibrium points in the more general non-smooth case is constructed. The convergence of all limit points to the equilibrium points is proved. The constructed methods can be divided into coordinate and gradients descent methods. There are given the rules for corresponding decrease of the steps  $\lambda_k$  and the diameters  $d(D_k)$  of the set  $D_k$  during optimization. During finding for the equilibrium points averaging and replacements of the coordinates are used.*

**К.М. Расулов**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.968.23

### **КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

*Ключевые слова: краевая задача, задача типа Дирихле, обобщенная аналитическая функция, дифференциальное уравнение Эйлера, единичная окружность.*

*В статье рассматривается краевая задача типа задачи Дирихле для одного дифференциального уравнения эллиптического типа в*

односвязных областях. Установлено, что в случае круговых областей рассматриваемая краевая задача эквивалентна обобщенной (дифференциальной) задаче Римана для аналитических функций комплексного переменного. Получен конструктивный метод решения рассматриваемой краевой задачи в круговых областях и описана полная картина ее разрешимости в указанных областях.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где  $z = x + iy$  – комплексная переменная,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $n$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое

число, а  $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$  – неизвестная функция.

Насколько нам известно, впервые на некоторые качественные свойства решений дифференциального уравнения (1) обратил внимание К.В. Бауэр (K.W. Bauer) в работе [1]. Более подробно функциональные свойства решений уравнения (1) изложены в монографии К.В. Бауэра и С. Рушевича [2]. Например, в произвольной односвязной области  $T$  общее решение уравнения (1) представимо в виде (см., например, [2]):

$$W(z) = (1+z\bar{z})^{n+1} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[ \frac{g(z)}{(1+z\bar{z})^{n+1}} \right] + \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} \left[ \frac{f(z)}{(1+z\bar{z})^{n+1}} \right] \right\}, \quad z \in T, \quad (2)$$

где  $g(z), f(z)$  – аналитические (голоморфные) в области  $T$  функции.

Далее, следуя [3], в качестве *обобщенных аналитических функций порядка  $n$*  в области  $T$  будем считать функции, задаваемые формулой (2). Функцию  $g^+(z)$  обозначим за *первую аналитическую компоненту* обобщенной аналитической функции  $W(z)$ , а  $f^+(z)$  – за *вторую* (данные функции входят в правую часть представления (2)). При этом класс всех обобщенных аналитических функций порядка  $n$  в области  $T$  будем обозначать символом  $GA_n(T)$ .

Обозначим за  $T^+$  конечную односвязную область на плоскости переменного  $z = x + iy$ , ограниченную простым замкнутым гладким контуром  $L$ .

В дальнейшем через  $GA_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  будем обозначать класс обобщенных аналитических функций, чьи аналитические компоненты  $g(z), f(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ , т.е. аналитические функции  $g(z), f(z)$  в правой части (2) непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на



контур  $L$  вместе со своими производными до порядка  $m$  включительно (здесь  $m$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Перейдем к рассмотрению следующей граничной задачи Дирихле.

**Задача  $D_n$ .** Требуется найти все функции  $W(z)$ , принадлежащие классу  $GA_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$W(t) = h(t), \quad (3)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на контуре  $L$  функция класса  $H(L)$  (т.е. удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера).

Далее в случае  $h(t) \equiv 0$  задачу  $D_n$  будем обозначать символом  $D_n^0$ .

Если в формуле (2) положить  $f(z) \equiv 0$ , то решения дифференциального уравнения (1) будем именовать квазигармоническими функциями рода  $n$  (см., например, монографию автора [4] и имеющуюся там библиографию). Искомая задача  $D_n$  в классах квазигармонических функций в круговых областях была подробно исследована в работах автора [5–6]. Главная цель настоящей работы заключается в разработке конструктивного метода решения задачи  $D_n$  в классах  $GA_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$  в случае, когда  $n=1$ ,  $m=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$ .

**2. Метод решения задачи  $D_n$  в случае, когда  $n=1$ ,  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  и  $L = \{t: |t| = 1\}$ .** Ввиду формулы (2) при  $n=1$  и  $T^+ = \{z: |z| < 1\}$  всякую обобщенную аналитическую функцию  $W(z)$  из класса  $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  можно задавать так:

$$W(z) = \frac{dg^+(z)}{dz} - \frac{2\bar{z}}{1+z\bar{z}} g^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} - \frac{2z}{1+z\bar{z}} \overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (4)$$

где  $g^+(z), f^+(z)$  – аналитические (голоморфные) в круге  $T^+$  функции, принадлежащие классу  $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ . Следовательно, с учетом (4) и того, что на окружности  $L = \{t: |t| = 1\}$  выполняется соотношение  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ , в

данном случае краевое условие (3) можно записать в виде

$$\frac{dg^+(t)}{dt} - \frac{1}{t} g^+(t) + \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} - t \cdot \overline{f^+(t)} = h(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

где  $h(t) = a(t) + ib(t)$  – заданная на  $L$  функция класса  $H(L)$ .

В дальнейшем обозначим через  $T^-$  дополнение замкнутого единичного круга  $T^+ \cup L$  до расширенной комплексной плоскости, т.е.  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Введем в рассмотрение вспомогательную аналитическую в  $T^-$  функцию  $f^-(z)$ , связанную с  $f^+(z)$  по формуле

$$f^-(z) = \overline{f^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad z \in T^-. \quad (6)$$

Нетрудно проверить (см. также, например, [4, с. 40]), что граничные значения функций  $f^-(z)$ ,  $f^+(z)$  и их производных первого порядка на  $L = \{t : |t| = 1\}$  связаны следующими соотношениями:

$$\overline{f^+(t)} = f^-(t), \quad \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} = -t^2 \frac{df^-(t)}{dt}, \quad t \in L. \quad (7)$$

В силу (7) краевое условие (5) можно переписать так:

$$t \frac{dg^+(t)}{dt} - g^+(t) = t^2 \left( t \cdot \frac{df^-(t)}{dt} + f^-(t) \right) + t \cdot h(t), \quad t \in L. \quad (8)$$

Наконец, если ввести в рассмотрение следующие две вспомогательные аналитические функции

$$\Phi^+(z) = z \frac{dg^+(z)}{dz} - g^+(z), \quad z \in T^+, \quad \text{и} \quad \Phi^-(z) = z \frac{df^-(z)}{dz} + f^-(z), \quad z \in T^-, \quad (9)$$

то равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\Phi^+(t) = t^2 \Phi^-(t) + t \cdot h(t), \quad t \in L. \quad (10)$$

Однако, равенство (10) есть граничное условие задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  (см., например, [4, с. 42] или [7, с. 106]).

Так как индекс задачи Римана (10)  $\chi = \text{Ind}_L(t^2) = 2$ , следовательно, она безусловно разрешима и ее общее решение можно представить в виде формул (см., например, [7, с. 112]):

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_2(z), \quad z \in T^+, \quad (11)$$

$$\Phi^-(z) = \frac{z^{-2}}{2\pi i} \int_L \frac{\tau h(\tau)}{\tau - z} d\tau + z^{-2} P_2(z), \quad z \in T^-, \quad (12)$$

где  $P_2(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2$  – произвольный многочлен второй степени над полем комплексных чисел.

Далее, в силу равенств (9), относительно неизвестных пока функций  $g^+(z)$  и  $f^-(z)$  получаем следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера:

$$z \frac{dg^+(z)}{dz} - g^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T^+, \quad (13)$$

$$z \frac{df^-(z)}{dz} + f^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (14)$$

где  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  – функции, определяемые по формулам (11) и (12) соответственно.

Очевидно, что  $Az$ , где в роли  $A$  выступает произвольная комплексная постоянная, задает общее решение однородного дифференциального уравнения, которое соответствует уравнению (13). В свою очередь, одно из частных решений неоднородного дифференциального уравнения (13) вычислим, т.е.:

$$g_1^+(z) = Q_1^+(z)z, \quad (15)$$

где  $Q_1^+(z)$  – некоторая мероморфная в круге  $T^+$  функция комплексной переменной  $z$ , для которой аналитическим решением дифференциального уравнения, выраженного формулой (13), в круге является выражение, находящееся в правой части равенства (15). Более того, данное решение непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на окружность  $L$  вместе со своей производной первого порядка. Подставляя данную функцию (15) в уравнение (13), получим

$$\frac{dQ_1^+(z)}{dz} = \frac{\Phi^+(z)}{z^2}, \quad z \in T^+. \quad (16)$$

Для того чтобы функция  $C_1^+(z)$  являлась мероморфной в круге  $T^+$ , исходя из равенства (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{d\Phi^+(0)}{dz} = 0. \quad (17)$$

Однако учитывая (11), равенство (17) можно переписать в виде:

$$\int_L \frac{h(t)}{t} dt + C_1 = 0. \quad (18)$$

**Замечание 1.** Заметим, что если зафиксировать значение произвольной постоянной  $C_1$  (например,  $C_1 = -\int_L \frac{h(t)}{t} dt$ ), то условие (18) будет представлять собой верное тождество. Таким образом, при выполнении условия (18), проинтегрировав выражение (16), получаем

$$Q_1(z) = \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz, \quad (19)$$

$\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz$  – фиксированная первообразная функции  $\frac{\Phi^+(z)}{z^2}$  в круге  $T^+$ .

Вследствие этого частное решение неоднородного дифференциального уравнения Эйлера, заданное формулой (13), а также с учетом равенств (15) и (18) примет вид:

$$g_1^+(z) = z \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz, \quad z \in T^+. \quad (20)$$

Исходя из определения 1, решение задачи Дирихле  $D_1$  должно принадлежать классу  $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ , т.е. функция (20) должна быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающейся на контур  $L$  вместе со своими производными первого порядка. Однако, согласно известной теореме Харди и Литтльвуда (см., например, [8, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, выполнение следующих неравенств в круге  $T^+$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \int \frac{g_1^+(z)}{z^2} dz + \frac{g_1^+(z)}{z} \right| &\leq \frac{M_1}{(1-r)^{1-\alpha_1}}, \\ \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{dg_1^+(z)}{dz} \right| &\leq \frac{M_2}{(1-r)^{1-\alpha_2}}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где  $r = |z|$ ;  $M_k, \alpha_k$  ( $k = 1, 2$ ) – некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \alpha_k \leq 1$ .

Предположим, что условия (21) выполняются. Тогда всевозможные в круге  $T^+$  решения дифференциального уравнения (13), являющиеся аналитическими функциями, задаются формулой

$$g^+(z) = Az + z \int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz, \quad z \in T^+, \quad (22)$$

где  $A$  – произвольная комплексная постоянная, а  $\int \frac{\Phi^+(z)}{z^2} dz$  – фиксированная первообразная функции  $\frac{\Phi^+(z)}{z^2}$  в круге  $T^+$ .

**Замечание 2.** Важно отметить, что функцию  $\Phi^+(z)$ , определяемую формулой (11), можно задавать в виде суммы следующего степенного ряда:

$$\Phi^+(z) = (C_0 + A_0) + (C_1 + A_1)z + (C_2 + A_2)z^2 + A_3z^3 + \dots + A_nz^n + \dots, \quad z \in T^+, \quad (23)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h(\tau)}{\tau^n} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

С учетом замечаний 1 и 2 формулу (22) можно переписать так:

$$g^+(z) = -(C_0 + A_0) + Az + (C_2 + A_2)z^2 + \frac{1}{2}A_3z^3 + \dots + \frac{1}{n-1}A_nz^n + \dots, \quad z \in T^+. \quad (25)$$

Затем получаем решение дифференциального уравнения (14). Так как в виде  $\frac{B}{z}$ , где  $B$  – произвольная комплексная постоянная, задается общее решение однородного дифференциального уравнения,

соответствующего неоднородному уравнению (14), то частное решение неоднородного уравнения (14) будем искать следующим образом:

$$f_1^-(z) = \frac{Q_1^-(z)}{z}, \quad (26)$$

где  $Q_1^-(z)$  – некоторая мероморфная в области  $T^-$  функция комплексной переменной  $z$ , для которой выражение  $\frac{Q_1^-(z)}{z}$  есть аналитическое решение дифференциального уравнения (14) в этой области. Подставив функцию (26) в левую часть дифференциального уравнения (14), будем иметь:

$$\frac{dQ_1^-(z)}{dz} = \Phi^-(z), \quad z \in T^-, \quad (27)$$

т.е. функция  $Q_1^-(z)$  должна быть первообразной для  $\Phi^-(z)$  в области  $T^-$ . В силу формулы (12) разложение функции  $\Phi^-(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид:

$$\Phi^-(z) = C_2 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_0}{z^2} + \frac{B_1}{z^3} + \dots + \frac{B_n}{z^{n+2}} + \dots, \quad z \in T^-, \quad (28)$$

где  $C_0, C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные, а

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^n h(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Следовательно, для того чтобы функция  $Q_1^-(z)$ , определяемая как первообразная функции  $\Phi^-(z)$ , была мероморфной в области  $T^-$ , необходимо и достаточно, чтобы в разложении (28) коэффициент  $C_1$  обращался в нуль. Но, с учетом замечания 1, условие  $C_1 = 0$  равносильно следующему равенству:

$$\int_L \frac{h(t)}{t} dt = 0. \quad (30)$$

В случае, когда выполняется условие (30), общее решение неоднородного дифференциального уравнения (14), аналитическое в области  $T^-$ , примет вид:

$$f^-(z) = \frac{B}{z} + z^{-1} \int \Phi^-(z) dz, \quad z \in T^-, \quad (31)$$

где  $B$  – произвольная комплексная постоянная, а  $\int \Phi^-(z) dz$  – фиксированная первообразная функции  $\Phi^-(z)$  в области  $T^-$ .

**Замечание 3.** Отметим, что в силу разложения (28) и условия  $C_1 = 0$  функцию  $f^-(z)$ , определяемую формулой (31), можно задавать в виде суммы следующего ряда:

$$f^-(z) = C_2 + \frac{B}{z} - \frac{C_0}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{B_1}{z^3} - \frac{1}{3} \frac{B_2}{z^4} - \dots - \frac{1}{n+1} \frac{B_n}{z^{n+2}} - \dots, \quad z \in T^-, \quad (32)$$

где  $C_0, C_2, B$  – произвольные комплексные постоянные, а  $B_n$  определяются по формулам (29).

Наконец, с учетом формул (6) и (32), находим вторую аналитическую компоненту  $f^+(z)$  искомой обобщенной аналитической функции:

$$f^+(z) = \overline{f^-\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{C_2} + \overline{B}z - \overline{C_0}z^2 - \frac{1}{2}\overline{B_1}z^3 - \dots - \frac{1}{n+1}\overline{B_n}z^{n+2} + \dots, \quad z \in T^+. \quad (33)$$

Нетрудно проверить, что равенствам (7) удовлетворяют граничные значения функций (32) и (33) на  $L = \{t : |t| = 1\}$ . Таким образом, в качестве аналитических компонент исходной обобщенной аналитической функции  $W(z)$  можно принять  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$ , которые задаются формулами (25) и (33) соответственно. Итак, все решения краевой задачи  $D_1$  в круге  $T^+$  задаются формулой (4), где  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  функции, определяемые по формулам (25) и (33) соответственно.

Вследствие изложенного выше, заключаем справедливость следующего предложения.

**Теорема.** Пусть  $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ . Тогда для разрешимости неоднородной задачи Дирихле  $D_1$  в классе  $GA_1(T^+) \cap H^{(1)}(L)$  необходимо и достаточно выполнение условий (21) и (30) относительно функции  $h(t)$ . Если данные условия выполняются, то общее решение задачи  $D_1$  представимо в виде (4), где  $g^+(z)$  и  $f^+(z)$  являются аналитическими в  $T^+$  функциями, которые задаются соотношениями (25) и (33) соответственно, причем общее решение задачи  $D_1$  линейно зависит от четырех произвольных комплексных постоянных  $C_0, C_2, A$  и  $B$ .

### Литература

1. Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung  $(1+z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$  zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. 1965. Schriften 23.
2. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. 253 p.
3. Heersink R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Berich. 1986. № 268.

4. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.

5. Расулов К.М. О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 1(25). С. 402-409.

6. Rasulov K.M. On the Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Boundary Value Problem for Quasiharmonic Functions in a Non-Unit Disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, No. 1. P. 142-145.

7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

8. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

**K.M. Rasulov**  
Smolensk State University

## **BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DIRICHLET TYPE FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS OF THE FIRST KIND**

**Keywords:** *boundary value problem, Dirichlet-type boundary value problem, generalized analytic function, Euler's differential equation, unit circumference.*

**Abstract.** *The article deals with a boundary value problem of the type of the Dirichlet problem for an elliptic-type differential equation in simply connected domains. It is established that in the case of circular domains the considered boundary value problem is equivalent to the generalized (differential) Riemann problem for analytic functions of a complex variable. A constructive solution method was obtained for the considered problem in circular domains. The complete picture of solvability in the indicated areas is described.*

**К.М. Расулов, Т.И. Тимофеева**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## **НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО РОДА**

**Ключевые слова:** *краевая задача, неоднородная задача типа Гильберта, квазигармоническая функция, дифференциальное уравнение.*

*В работе исследуется неоднородная граничная задача Гильберта в классах квазигармонических функций. Устанавливается основная причина неустойчивости решений рассматриваемой задачи по*

отношению к малым изменениям радиуса рассматриваемой круговой области.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в конечной односвязной области  $T^+$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , которая ограничена простым замкнутым контуром Ляпунова  $L$ , следующую задачу  $\Gamma_n$ : «требуется найти все квазигармонические функции  $W(z)$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ), принадлежащие классу  $Q_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(\tau)}W(\tau)\} = q(\tau), \quad \tau \in L, \quad (1)$$

где  $h(\tau) = a(\tau) + ib(\tau)$ ,  $q(\tau)$  – заданные на  $L$  функции класса  $H(L)$  (Гельдера), причем  $h(\tau) \neq 0$ » [1–2].

Следуя терминологии, изложенной в работе авторов [2], поставленная задача (1) называется задачей Гильберта для квазигармонических функций рода  $n$ .

В работе [1] был разработан явный способ построения общего решения  $\Gamma_n$ , когда носителем краевого выступает окружность  $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$ . Также в работе авторов [2] построена картина разрешимости однородной задачи  $\Gamma_n^0$  ( $q(\tau) \equiv 0$ ) в произвольных круговых областях  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$  при  $n = 2$ .

Основной целью настоящей заметки является исследование решений неоднородной краевой задачи  $\Gamma_n$  при малых изменениях носителя краевых условий в случае, когда  $n = 2$  и носителем краевых условий служит окружность  $L_r = \{t: |t| = r, r > 0\}$ .

**2. О решении неоднородной задачи  $\Gamma_2$  в случае, когда**

$$T_r = \{z: |z| < r\}.$$

В случае  $n = 2$  искомую квазигармоническую функцию  $W(z)$  можно представлять в виде (см., например, [1–3]):

$$W(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6z}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{z}{1+z\bar{z}} \right)^2 \varphi^+(z), \quad (2)$$

где  $\varphi^+(z) \in A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  – аналитическая компонента функции  $W(z)$ . Поэтому в рассматриваемом случае будем искать решения задачи  $\Gamma_2$  в виде (2). С учетом (2) краевое условие (1) можно переписать так:



$$\operatorname{Re} \left( t^{-2} \overline{h(t)} \left( t^2 \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} - t \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(t) \right) \right) = q(t), t \in L_r. \quad (3)$$

В свою очередь (3) относительно аналитической функции  $\varphi^+(z)$  представляет собой краевое условие обобщенной (дифференциальной) граничной задачи Гильберта (см., например, [3, с. 345]). Из результатов работы [1] следует, что дифференциальную задачу Гильберта (3) в круговых областях можно решить эффективно, введя в рассмотрение аналитическую в круге  $T_r^+$  функцию

$$\Psi(z) = z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z), z \in T_r^+, \quad (4)$$

где  $\varphi^+(z)$  – аналитическая компонента искомой квазигармонической функции  $W(z)$ . Тогда, с учетом (4), обобщенную задачу Гильберта (3) сводим к обычной задаче Гильберта относительно аналитической в круге  $T_r^+$  функции  $\Psi(z)$ :

$$\operatorname{Re} \{ \overline{h_2(t)} \Psi^+(t) \} = q(t), t \in L_r, \quad (5)$$

где  $\Psi^+(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Psi(z)$ .

Если вспомогательная задача Гильберта относительно аналитической в  $T_r^+$  функции  $\Psi(z)$  вида (5) неразрешима, то исходная краевая задача  $\Gamma_2$  также неразрешима.

Предположим теперь, задача (5) разрешима и уже найдено ее общее решение  $\Psi(z)$  (см., например, [1, с. 282]). Тогда на основании равенства (4) составляем относительно неизвестной аналитической в круге  $T_r^+$  функции  $\varphi^+(z)$  неоднородное линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ) Эйлера (см., например, [4, с. 136])

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = \Psi(z), z \in T_r^+, \quad (6)$$

где  $\Psi(z)$  – общее решение вспомогательной задачи Гильберта (5).

Рассмотрим отдельно случаи  $r = 1$  и  $r \neq 1$ .

Пусть  $r = 1$ . Тогда уравнение (6) примет вид:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 3\varphi^+(z) = \Psi(z), z \in T_1^+. \quad (7)$$

Нетрудно проверить (см. также [1]), что общее решение однородного уравнения Эйлера, соответствующего уравнению (7), можно задавать в виде

$$\varphi_{o.o}^+(z) = C_1 z + C_2 z^3, \quad (8)$$

где  $C_1 = a_1 + ib_1, C_2 = a_2 + ib_2$  – произвольные комплексные постоянные.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (7), как установлено в [1], можно задать как:

$$\varphi_{\text{ч.н.}}^+(z) = -\frac{1}{2}z \int z^{-2}\Psi(z)dz + \frac{1}{2}z^3 \int z^{-4}\Psi(z)dz, \quad (9)$$

где  $\int z^{-2}\Psi(z)dz$  и  $\int z^{-4}\Psi(z)dz$  – фиксированные первообразные функций  $z^{-2}\Psi(z)$  и  $z^{-4}\Psi(z)$  в единичном круге  $T_1^+$ .

Так как задача рассматривается в классе  $Q_2(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ , то общее решение однородного уравнения Эйлера  $\varphi_{\text{о.о.}}^+(z)$  должно быть непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающимся на окружность  $L_1 = \{t: |t| = 1\}$  вместе со своими производными до 2-го порядка включительно. Из теоремы Харди и Литтльвуда (см., например, [5, с. 397]) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге  $T_1^+ = \{z: |z| < 1\}$  выполнялись неравенства вида:

$$\left| \frac{d^k \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)}{dz^k} \right| \leq \frac{M_k}{(1-\rho)^{1-\delta_k}}, k = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где  $\rho = |z|$ ;  $M_k, \delta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – некоторые положительные постоянные, и при этом  $0 < \delta_k \leq 1$ . Но в силу формулы (9), условия (10) можно переписать так:

$$\begin{cases} \Psi'(0) = 0, \\ \Psi''(0) = 0, \\ \left| -\frac{1}{2} \int z^{-2}\Psi(z)dz + \frac{3}{2}z^2 \int z^{-4}\Psi(z)dz \right| \leq \frac{M_1}{(1-\rho)^{1-\delta_1}}, \\ |3z \int z^{-4}\Psi(z)dz + z^{-2}\Psi(z)| \leq \frac{M_2}{(1-\rho)^{1-\delta_2}}, \\ |3 \int z^{-4}\Psi(z)dz + z^{-3}\Psi(z) + z^{-2}\Psi'(z)| \leq \frac{M_3}{(1-\rho)^{1-\delta_3}}. \end{cases} \quad (11)$$

При выполнении условий (11), общее решение дифференциального уравнения (6), принадлежащее классу  $A(T_1^+) \cap H^{(2)}(L_1)$ , находим по формуле

$$\varphi^+(z) = C_1z + C_2z^3 - \frac{1}{2}z \int z^{-2}\Psi(z)dz + \frac{1}{2}z^3 \int z^{-4}\Psi(z)dz, \quad (12)$$

где  $C_1 = a_1 + ib_1, C_2 = a_2 + ib_2$  – произвольные комплексные постоянные, а  $\int z^{-2}\Psi(z)dz$  и  $\int z^{-4}\Psi(z)dz$  – фиксированные первообразные соответственно функций  $z^{-2}\Psi(z)$  и  $z^{-4}\Psi(z)$  в единичном круге  $T_1^+$ .

Наконец, с учетом (12) из (2) находим общее решение исходной задачи  $\Gamma_2$  в случае  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}
W(z) = & \left( 6C_2 z + 3z \int z^{-4} \Psi(z) dz + \Psi(z) \right) - \frac{6z}{1+z\bar{z}} \left( C_1 + 3C_2 z^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \int z^{-2} \Psi(z) dz + \frac{3}{2} z^2 \int z^{-4} \Psi(z) dz \right) + 12 \left( \frac{z}{1+z\bar{z}} \right)^2 \left( C_1 z + C_2 z^3 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} z \int z^{-2} \Psi(z) dz + \frac{1}{2} z^3 \int z^{-4} \Psi(z) dz \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть теперь  $r \neq 1$ . При  $r \neq 1$  общее решение ОДУ Эйлера, соответствующего уравнению (6), можно задавать так (см., например, [2]):

$$\varphi_{o.o}^+(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ C_3 z^2, & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \end{cases} \tag{14}$$

где  $C_3 = a_3 + ib_3$  – произвольная комплексная постоянная.

Будем предполагать, что в классе  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  неоднородное уравнение (6) разрешимо и уже найдено его частное решение  $\varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)$ . Теперь, используя (14), запишем общее решение неоднородного уравнения (6) в случае  $r \neq 1$ :

$$\varphi_{o.n.}^+(z) = \begin{cases} \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z), & \text{если } r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ C_3 z^2 + \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z), & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \end{cases} \tag{15}$$

где  $C_3 = a_3 + ib_3$  – произвольная комплексная постоянная.

Наконец, подставив в правую часть формулы (2) вместо  $\varphi^+(z)$  функцию  $\varphi_{o.n.}^+(z)$ , найденную по формуле (15), получим общее решение исходной задачи  $\Gamma_2$  при  $r \neq 1$ :

$$W(z) = \begin{cases} \frac{d^2 \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)}{dz^2} - \frac{6z}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)}{dz} + 12 \left( \frac{z}{1+z\bar{z}} \right)^2 \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z), & \text{если } r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ C_3 + \frac{d^2 \varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)}{dz^2} - \frac{6z}{1+z\bar{z}} \left( \frac{d\varphi_{\text{ч.н.}}^+(z)}{dz} + 2C_3 z \right) + & \\ + 12 \left( \frac{z}{1+z\bar{z}} \right)^2 (\varphi_{\text{ч.н.}}^+(z) + C_3 z^2), & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \end{cases} \tag{16}$$

где  $C_3 = a_3 + ib_3$  – произвольная комплексная постоянная.

На основании изложенного выше следует справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** Неоднородная краевая задача  $\Gamma_2$  для квазигармонических функций второго рода в круговых областях решается последовательным рассмотрением обычной задачи Гильберта (5) для аналитических в круге функций и НЛДУ Эйлера второго порядка вида

(6). При этом решения задачи  $G_2$  неустойчивы по отношению к малым изменениям радиуса рассматриваемой круговой области.

### Литература

1. Расулов К.М. Краевая задача Гильберта в классах квазигармонических функций в круге // Известия СмолГУ. 2014. № 4(28). С. 331–338.
2. Расулов К.М., Тимофеева Т.И. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2016. Т. 8, № 4. С. 33–40.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
5. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.

**К.М. Rasulov, T.I. Timofeeva**  
Smolensk State University

## INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HILBERT TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS OF THE SECOND KIND

**Keywords:** *boundary value problem, Hilbert-type boundary value problem, quasiharmonic function, differential equation, cyclic domain.*

**Abstract.** *The article proposed a constructive method for solving the boundary value problem of the type of the Hilbert problem in classes of quasiharmonic functions of the second kind. It is stated that solutions of the boundary value problem of Hilbert type in the classes of quasiharmonic functions of a second kind are unstable about small changes in the carrier of the boundary conditions. In particular, it is proved that the main reason for the instability of solutions of the Hilbert boundary value problem are the singularities of the solution of the Euler differential equation.*

**К.М. Расулов, Ш.С. Ханкишиева**  
Смоленский государственный университет

УДК 517.968.23

## О ЯВНОМ РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Ключевые слова: *краевая задача типа Римана, кусочно квазигармоническая функция, явное решение, дифференциальное уравнение Эйлера, круговые области.*

В работе излагается конструктивный алгоритм явного решения неоднородной краевой задачи типа задачи Римана для кусочно квазигармонических функций второго рода в круговых. Установлено, что в круговых областях рассматриваемая краевая задача редуцируется к последовательному решению обычной задачи Римана (задачи сопряжения) в классах аналитических функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка. Кроме того, установлено, что картина разрешимости краевой задачи типа Римана для квазигармонических функций неустойчива по отношению к малым изменениям радиуса рассматриваемой круговой области, причем причиной этой неустойчивости является неустойчивость решений вспомогательного линейного дифференциального уравнения Эйлера второго порядка.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $T^+$  – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , ограниченная замкнутым гладким контуром  $L$ , а  $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$ .

Известно (см., например, [1]), что в общем случае неоднородная краевая задача типа Римана в классах кусочно квазигармонических функций рода  $n$  (кратко, **задача  $R_n$** ) формулируется следующим образом: *требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно квазигармонические функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  рода  $n$  ( $n \geq 1$ ) с линией скачков  $L$ , принадлежащие классу  $\mathcal{Q}_n(T^\pm) \cap H^{(n)}(L)$  и удовлетворяющие на  $L$  условию*

$$W^+(t) = G(t)W^-(t) + g(t), \quad (1)$$

где  $G(t)$ ,  $g(t)$  – заданные на  $L$  комплексные функции, причем  $G(t) \neq 0$  на  $L$ .

В дальнейшем, следуя [1], соответствующую  $R_n$  однородную задачу ( $g(t) \equiv 0$ ) будем называть **задачей  $R_n^0$** , а целое число  $\chi = \text{Ind}G(t)$  назовем **индексом** краевой задачи  $R_n$ .

Поскольку (см., например, [1–3]) всякая кусочно квазигармоническая функция рода  $n$  с линией скачков  $L$  задается формулой

$$W(z) = \begin{cases} W^+(z), & z \in T^+, \\ W^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \quad (2)$$

где  $W^+(z)$  и  $W^-(z)$  определяются соответственно в виде

$$W^+(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} \quad (3)$$

$$W^-(z) = \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(z)}{dz^k}, \quad (4)$$

(здесь  $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$ , а  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  – аналитические соответственно в областях  $T^+$  и  $T^-$  функции, называемые *аналитическими компонентами* квазигармонической функции  $W(z)$ ), то краевое условие (1) (с учетом (3) и (4)) можно переписать так:

$$\sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^n A_k^n \left( \frac{\bar{t}}{1+t\bar{t}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + g(t), t \in L. \quad (5)$$

Но равенство (5) есть краевое условие *обобщенной (дифференциальной) краевой задачи* типа Римана относительно кусочно аналитической функции  $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$  (см., например, [3–5]). Следовательно, задача  $R_n$  является неформальной моделью дифференциальной задачи типа Римана для аналитических функций.

Как известно (см., например, [4–5]), до сих пор основным методом решения дифференциальной задачи Римана вида (5) в классах аналитических функций является метод интегральных уравнений. Однако метод интегральных уравнений не позволяет полностью исследовать картину разрешимости рассматриваемой задачи, а также устанавливать устойчивость (или неустойчивость) решений рассматриваемой задачи по отношению к малым изменениям коэффициентов краевых условий или носителя краевых условий.

В силу сказанного выше актуальной проблемой теории обобщенных (дифференциальных) краевых задач комплексного анализа становится разработка новых методов решения таких задач, позволяющих более детальное и точное исследование их картин разрешимости.

В дальнейшем будем говорить, что краевая задача  $R_n$  допускает *явное решение*, если ее общее решение удастся построить, используя только формулы Ф.Д. Гахова для решения обычной скалярной задачи Римана для аналитических функций (см., например, [4, с. 111]), а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений Эйлера, коэффициенты которых могут быть выписаны в явном виде (в квадратурах).

Ранее в ряде работ авторов (см. например, [1–2]) было установлено, что в случае круговых областей задача  $R_n$  допускает решение в явном

виде. Основной целью настоящей работы является полное изложение явного метода решения неоднородной задачи  $R_n$  в круговых областях, а также установление основной причины неустойчивости решений рассматриваемой краевой задачи по отношению к малым изменениям носителя краевых условий. Ради краткости изложения задача  $R_n$  исследуется в случае  $n=2$ , т.е. в классе кусочно квазигармонических функций второго рода.

**2. О явном решении неоднородной задачи  $R_2$  в круговых областях.** Пусть  $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$ ,  $L_r = \{t: |t| = r\}$ ,  $T_r^- = \overline{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$ .

Так как при  $n=2$  формулы (3) и (4) принимают соответственно следующий вид

$$W^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^+(z), \quad (6)$$

$$W^-(z) = \frac{d^2\varphi^-(z)}{dz^2} - \frac{6\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + 12\left(\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)^2 \varphi^-(z), \quad (7)$$

где  $\varphi^\pm(z) \in A(T_r^\pm) \cap H^2(L_r)$ , то решения  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  краевой задачи  $R_2$  будем искать в виде (6) и (7).

Поскольку в точках окружности  $L_r = \{t: |t| = r\}$  выполняется соотношение  $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ , то с учетом (6) и (7) краевое условие (1) при  $n=2$  можно переписать так:

$$\begin{aligned} & t^2 \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - t \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(t) = \\ & = G(t) \left( t^2 \frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} - t \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(t)}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(t) \right) = g_1(t), \quad t \in L_r, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $g_1(t) = t^{-2}g(t)$ .

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную кусочно аналитическую функцию  $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$  с линией скачков  $L_r = \{t: |t| = r\}$ , где

$$\Phi^\pm(z) = z^2 \frac{d^2\varphi^\pm(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^\pm(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^\pm(z), \quad z \in T_r^\pm, \quad (9)$$

а  $\varphi^\pm(z)$  – аналитические компоненты искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z)$ , равенство (8) можно записать в виде

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g_1(t), \quad t \in L_r, \quad (10)$$

где  $\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t \in L_r} \Phi^\pm(z)$ .

Таким образом, относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции  $\Psi(z) = \{\Psi^+(z), \Psi^-(z)\}$  получили обычную краевую задачу Римана (10) (см., например, [6, с. 106]).

Хорошо известно (см., например, [6, с. 110]), что если индекс  $\chi = \text{Ind}G(t) \geq 0$ , то неоднородная задача Римана (10) безусловно разрешима и её общее решение можно задавать формулой:

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\chi(z)], \quad z \notin L_r, \quad (11)$$

т.е.

$$\Phi^+(z) = X^+(z)[\Psi^+(z) + P_\chi(z)], \quad z \in T_r^+, \quad (12)$$

$$\Phi^-(z) = X^-(z)[\Psi^-(z) + P_\chi(z)], \quad z \in T_r^-, \quad (13)$$

где  $X^+(z) = \exp\{\gamma^+(z)\}$ ,  $X^-(z) = z^{-\chi} \exp\{\gamma^-(z)\}$ ,

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \gamma^+(z), & z \in T_r^+, \\ \gamma^-(z), & z \in T_r^-, \end{cases}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau) \tau - z} d\tau = \begin{cases} \Psi^+(z), & z \in T_r^+, \\ \Psi^-(z), & z \in T_r^-, \end{cases}$$

а  $P_\chi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_\chi z^\chi$  – произвольный многочлен степени не выше  $\chi$  с комплексными коэффициентами.

Если же  $\chi = \text{Ind}G(t) < 0$ , то задача Римана (10) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются  $-\chi - 1$  условий разрешимости вида

$$\int_L \frac{g_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi - 1, \quad (14)$$

причем при выполнении условий (14), единственное решение неоднородной задачи Римана (10) также можно задавать формулами (12) и (13), где нужно положить  $P_\chi(z) \equiv 0$ .

Предположим, что задача Римана (10) разрешима и уже найдено ее общее решение по формулам (12) и (13). Тогда в силу формул (9) относительно аналитических компонент  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  искомой кусочно квазигармонической функции  $W(z) = \{W^+(z), W^-(z)\}$  получаем следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера 2-го порядка:

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (15)$$

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^-(z)}{dz^2} - z \frac{6r^2}{1+r^2} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2} \varphi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T_r^-. \quad (16)$$



Далее рассмотрим отдельно два случая:  $r = 1$  и  $r \neq 1$ .

Пусть  $r = 1$ . Тогда (15) и (16) соответственно принимают вид:

$$z^2 \frac{d^2 \Phi^+(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\Phi^+(z)}{dz} + 3\Phi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \quad (17)$$

$$z^2 \frac{d^2 \Phi^-(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\Phi^-(z)}{dz} + 3\Phi^-(z) = \Phi^-(z), \quad z \in T_1^-. \quad (18)$$

Непосредственная проверка (см. также [1] или [6, с. 136]) показывает, что общее решение однородного уравнения Эйлера, соответствующего уравнению (17), можно задавать в виде

$$\Phi_{o.o.}^+(z) = C_1 z + C_2 z^3, \quad z \in T_1^+, \quad (19)$$

где  $C_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – произвольные комплексные постоянные. Далее, методом вариации произвольных постоянных нетрудно установить, что для разрешимости неоднородного уравнения Эйлера (17) в классе функций  $A(T_1^+) \cap H^{(2)}(L_1)$  в силу теоремы Харди и Литтльвуда (см., например, [7, с. 397]) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi^+(0)}{dz} = 0, \quad \frac{d^3 \Phi^+(0)}{dz^3} = 0, \\ \left| -\frac{1}{2} \int z^{-2} \Phi^+(z) dz + \frac{3}{2} z^2 \int z^{-4} \Phi^+(z) dz \right| \leq \frac{M_1}{(1-\rho)^{1-\delta_1}}, \\ \left| z^{-2} \Phi^+(z) + 3z \int z^{-4} \Phi^+(z) dz \right| \leq \frac{M_2}{(1-\rho)^{1-\delta_2}}, \\ \left| z^{-3} \Phi^+(z) + z^{-2} \frac{d\Phi^+(z)}{dz} + 3 \int z^{-4} \Phi^+(z) dz \right| \leq \frac{M_3}{(1-\rho)^{1-\delta_3}}, \end{array} \right. \quad (20)$$

где  $\rho = |z|$ ;  $M_k, \delta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – некоторые положительные постоянные, причем  $0 < \delta_k \leq 1$ . При выполнении условий (20) общее решение неоднородного уравнения Эйлера (17), принадлежащее классу  $A(T_1^+) \cap H^{(2)}(L_1)$ , можно задавать в виде

$$\Phi^+(z) = C_1 z + C_2 z^3 - \frac{1}{2} z \int z^{-2} \Phi^+(z) dz + \frac{1}{2} z^3 \int z^{-4} \Phi^+(z) dz, \quad z \in T_1^+, \quad (21)$$

где  $C_k = \alpha_k + i\beta_k$  ( $k = 1, 2$ ) – произвольные комплексные постоянные, а  $\int z^{-2} \Phi^+(z) dz, \int z^{-4} \Phi^+(z) dz$  – фиксированные первообразные соответственно функций  $z^{-2} \Phi^+(z)$  и  $z^{-4} \Phi^+(z)$  в единичном круге  $T_1^+$ .

Далее заметим, что если сделать замену переменной

$$z = \frac{1}{\zeta}, \quad (22)$$

где  $\zeta = \xi + i\eta$ , и учесть формулы (см. также [8, с. 222])

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^-(z)}{dz} &= \frac{d\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = -\zeta^2 \frac{d\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta}, \\ \frac{d^2\varphi^-(z)}{dz^2} &= \frac{d^2\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta^2} \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 + \frac{d\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta} \frac{d^2\zeta}{dz^2} = \zeta^4 \frac{d^2\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{d\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta}, \end{aligned} \quad (23)$$

то дифференциальное уравнение (18) примет вид:

$$\zeta^2 \frac{d^2\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta^2} + 5\zeta \frac{d\tilde{\varphi}^+(\zeta)}{d\zeta} + 3\tilde{\varphi}^+(\zeta) = \tilde{\Phi}^+(\zeta), \quad \zeta \in T_1^+; \quad (24)$$

здесь приняты обозначения:  $\tilde{\varphi}^+(\zeta) = \varphi^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  и  $\tilde{\Phi}^+(\zeta) = \Phi^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ .

Используя метод степенных рядов нетрудно установить (см. также [1–2]), что однородное дифференциальное уравнение Эйлера, соответствующего уравнению (24), не имеет (нетривиальных) решений в круге  $T_1^+$ . Кроме того, методом степенных рядов нетрудно проверить, что неоднородное дифференциальное уравнение Эйлера (24) безусловно разрешимо и его решение можно получить в виде суммы следующего степенного ряда

$$\tilde{\varphi}^+(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+1)(m+3)} \zeta^m, \quad \zeta \in T_1^+, \quad (25)$$

где  $b_0, b_1, \dots$  – коэффициенты разложения аналитической функции  $\tilde{\Phi}^+(\zeta)$  в круге  $T_1^+$ :

$$\tilde{\Phi}^+(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_n\zeta^n + \dots, \quad \zeta \in T_1^+. \quad (26)$$

Теперь, после обратной замены  $\zeta = \frac{1}{z}$ , из (25) можно получить решение дифференциального уравнения (18) в виде

$$\varphi^-(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+1)(m+3)} \frac{1}{z^m}, \quad z \in T_1^-. \quad (27)$$

Наконец, подставив в правые части формул (6) и (7) вместо  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  их значения, найденные по формулам (21) и (27) соответственно, получим общее решение исходной задачи  $\mathbf{R}_2$  при  $r = 1$ .

Исследуем далее дифференциальное уравнение Эйлера (15) в случае  $r \neq 1$ . В этом случае общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (15), можно задавать так (см. также [2]):

$$\varphi_{o.o.}^+(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ C_3 z^2, & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \end{cases} \quad z \in T_r^+, \quad (28)$$

где  $C_3 = \alpha_3 + i\beta_3$  – произвольная комплексная постоянная.

Теперь предположим, что неоднородное дифференциальное уравнение Эйлера (15) разрешимо в классе  $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$  и уже найдено его частное решение  $\varphi_{ч.н.}^+(z)$ . Тогда в силу (28) общее решение неоднородного уравнения (15) при  $r \neq 1$  можно найти в виде:

$$\varphi_{o.н.}^+(z) = \begin{cases} \varphi_{ч.н.}^+(z), & \text{если } r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ C_3 z^2 + \varphi_{ч.н.}^+(z), & \text{если } r = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \end{cases} \quad (29)$$

где  $C_3 = \alpha_3 + i\beta_3$  – произвольная комплексная постоянная.

Используя метод степенных рядов нетрудно установить, что однородное дифференциальное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению Эйлера (16), при  $r \neq 1$  не имеет нетривиальных решений, принадлежащих классу  $A(T_r^-) \cap H^{(2)}(L_r)$ . Следовательно, в случае разрешимости неоднородного уравнения (16) его частное решение  $\varphi_{ч.н.}^-(z)$  однозначно выражается через  $\Phi^-(z)$ .

Далее, подставив в правые части формул (6) и (7) вместо  $\varphi^+(z)$  и  $\varphi^-(z)$  функции  $\varphi_{o.н.}^+(z)$  и  $\varphi_{ч.н.}^-(z)$  соответственно, получим общее решение исходной задачи  $\mathbf{R}_2$  при  $r \neq 1$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Решение неоднородной краевой задачи  $\mathbf{R}_2$  для квазигармонических функций второго рода в круговых областях сводится к последовательному решению обычной задачи Римана (10) в классе аналитических в круге функций и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера второго порядка (15) и (16). При этом картина разрешимости задачи  $\mathbf{R}_2$  неустойчива по отношению к малым изменениям радиуса рассматриваемой круговой области.*

**Замечание 1.** Как видно из формул (19) и (28), основной причиной неустойчивости картины разрешимости краевой задачи  $\mathbf{R}_2$  в круговых областях является неустойчивость решений однородного линейного дифференциального уравнения Эйлера

$$z^2 \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} - 3z \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 3\varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+, \quad (30)$$

по отношению к малым изменениям радиуса  $r$  рассматриваемой круговой области.

## Литература

1. Расулов К.М. Об одном методе решения краевой задачи типа Римана в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге // Известия СмолГУ, 2015. № 2/1. С. 159-167.
2. Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С. О неустойчивости решений однородной краевой задачи Римана для квазигармонических функций третьего рода в круговых областях // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX междунар. научной конф. Смоленск, 2018. Вып. 19. С. 313-321.
3. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
6. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
8. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории функций. М.-Л., 1950. 436 с.

**K.M. Rasulov, Sh.S. Khankishieva**  
Smolensk State University

### **ON THE EXPRESS SOLUTION OF THE HETEROGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE FOR QUASIHARMONIC FUNCTIONS IN CIRCULAR DOMAINS**

**Keywords:** *the boundary value problem of Riemann type, piecewise quasiharmonic function, explicit solution, differential equation of Euler, circular domains.*

**Abstract.** *The article presents a constructive algorithm for explicitly solving an inhomogeneous boundary value problem of the Riemann type for piecewise quasi-harmonic functions of the second kind in circular ones. It has been established that in circular domains the considered boundary value problem is reduced to the sequential solution of the ordinary Riemann problem (conjugation problem) in classes of analytic functions and two second-order linear differential Euler equations. In addition, it was found that the picture of the solvability of the Riemann-type boundary value problem for quasi-harmonic functions is unstable with respect to small changes in the radius of the circular area under consideration, and the instability of solutions of the second-order auxiliary linear differential equation is the cause of this instability.*

## ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЦИОНАЛЬНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ДЖЕКSONА И ЕГО АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ

Ключевые слова: ряд Фурье – Чебышёва, частичные суммы, средние Фейера, сингулярный интеграл Джексона, асимптотические оценки, асимптотическое поведение, точные константы.

*Настоящая работа посвящена исследованию приближения функции  $|x|^s$ ,  $s > 0$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой рациональных дробей Чебышёва – Маркова. Во введении авторы приводят основные результаты, относящиеся к исследованию аппроксимативных свойств сингулярного интеграла Джексона в полиномиальном и рациональном случаях, а также цитируют ранее известные работы по теме приближения функции  $|x|^s$ ,  $s > 0$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Далее рассмотрена одна система рациональных дробей Чебышёва – Маркова, указываются её основные свойства и устанавливается взаимосвязь между рациональным сингулярным интегралом Джексона и частичными суммами ряда Фурье по исследуемой системе. В основной части статьи решается задача приближения функции  $|x|^s$ ,  $s \in (0, 2)$  рациональным сингулярным интегралом Джексона. В частности, устанавливается оценка отклонения в зависимости от положения точки  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$ , равномерная оценка отклонения на отрезке  $[-1, 1]$  и её асимптотическое выражение при  $n \rightarrow \infty$ . В заключительной части статьи находится оптимальное значение параметра, при котором обеспечивается наибольшая скорость приближения исследуемой функции рациональным сингулярным интегралом Джексона. В качестве следствия приводится наилучшая оценка погрешности приближения функции  $|x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  в приближении исследуемым сингулярным интегралом Джексона.*

**Введение.** В своей книге [1] Д. Джексон (Dunham Jackson) для решения задачи аппроксимации  $2\pi$ -периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица тригонометрическими полиномами, вводит конструкцию представляющую собой тригонометрический полином степени не выше  $2n-2$ . Позже эта конструкция получила название *сингулярного интеграла Джексона*, ядро интеграла – *ядром Джексона*. Сингулярный интеграл Джексона,

построенный на основании классической тригонометрической системы, к настоящему времени достаточно хорошо изучен и нашёл широкое применение при решении практических задач [2–3]. Г.П. Сафроновой [4] исследован сингулярный интеграл Джексона как метод суммирования рядов Фурье с треугольной матрицей специального вида. В частности, были найдены в явном виде коэффициенты суммирования. Таким образом, сингулярный интеграл Джексона естественно связать с соответствующей ортогональной системой и рядами Фурье.

Задача аппроксимации функции  $|x|$  на отрезке  $[-1,1]$  ведет свою богатую историю с начала XX века, когда полиномиальная аппроксимация этого примера негладкой функции затронула интересы А. Лебега, Д. Джексона и С.Н. Бернштейна [11]. Этой проблеме посвящено множество работ. Новый импульс в данном направлении придала работа Д. Ньюмена [12] о рациональной аппроксимации функции  $|x|$  на отрезке  $[-1,1]$ . Этот результат уточнялся во многих работах (см. например, [13–14]) и окончательно был получен Г. Шталем [15]. Изучение приближений функции  $|x|^s$ ,  $s > 0$  также берет свое начало с работы С.Н. Бернштейна [16]. К настоящему времени имеется достаточно большое число исследований, посвящённых как наилучшим приближениям этой функции (см. например, [17–20]), так и конкретным методам приближений (см. например, [21–22]).

В [23] нами изучалось приближение функции  $|x|^s$ ,  $0 < s < 2$  на отрезке  $[-1,1]$  посредством сингулярного интеграла Джексона, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, являющегося полиномом степени не выше  $4n$ . В работе была найдена оценка погрешности приближения в зависимости от положения точки  $x$  на отрезке, а также равномерная асимптотически точная оценка погрешности приближения.

Настоящая работа посвящена исследованию приближений функции  $|x|^s$ ,  $0 < s < 2$  на отрезке посредством рационального сингулярного интеграла Джексона. В частности, найдено оптимальное значение параметра, при котором обеспечивается наилучшая скорость приближения этим аппаратом. Полученные результаты иллюстрируются на примере функции  $|x|$ .

Напомним основные сведения об одной системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова. Как известно [24], алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова на отрезке  $[-1,1]$  с двумя комплексно-сопряженными полюсами имеет вид

$$M_n(x) = \cos n \arccos x \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}, \quad x \in [-1,1], a \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

и при  $a = 0$  представляет собой классический полином Чебышёва первого рода. Система рациональных дробей  $M_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  является ортогональной на отрезке  $[-1,1]$  с весом

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,$$

то есть

$$\int_{-1}^1 M_n(x) M_m(x) \rho(x, a) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \\ \pi/2, & m = n, \quad m, n = 1, 2, \dots \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Функции  $f(x)$ , абсолютно суммируемой с весом  $\rho(x, a)$  на отрезке  $[-1; 1]$ , поставим в соответствие ряд Фурье по системе рациональных функций Чебышёва-Маркова

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n M_n(x), \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \rho(x, a) f(x) M_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1 [25].** Для частичных сумм ряда Фурье при условии четности функции  $f$  справедливо представление

$$s_{2n}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin[(2n+1)\varphi(u, v)]}{\sin \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u, \quad (1)$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_u^v \lambda(y) dy, \quad \lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \quad \alpha \in [0, 1), \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a}, \quad (2)$$

причем оператор  $s_{2n} : f \rightarrow \mathbb{R}_{2n}(a)$ , где  $\mathbb{R}_{2n}(a)$  – множество рациональных функций вида  $p_{2n}(x)/(1+a^2x^2)^n$ ,  $p_{2n}(x) \in P_{2n}$  и является точным на константах.

Аппроксимативные свойства частичных сумм (1) исследованы нами в [25].

Сингулярным интегралом Джексона на основании ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова чётной функции  $f \in C[-1, 1]$  будем называть выражение вида

$$U_{4n}(x, f) = \frac{1}{\gamma_n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) G_{4n}(u, v) \lambda(v) dv, \quad x = \cos u, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где

$$G_{4n}(u, v) = \frac{\sin^4[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^4 \varphi(u, v)}, \quad \gamma_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G_{4n}(u, v) \lambda(y) dy,$$

$\varphi(u, v)$  и  $\lambda(y)$  определены в соотношении (2).

Нетрудно убедиться, что оператор  $U_{4n}$  обладает следующими свойствами:

1)  $U_{4n} : f \rightarrow \mathfrak{R}_{4n}(a)$ , где  $\mathfrak{R}_{4n}(a)$  – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_{4n}(x)}{(1+a^2x^2)^{2n}}, \quad a \geq 0,$$

$p_{4n}(x)$  – некоторый многочлен степени не выше  $4n$  с коэффициентами, зависящими от функции  $f$ ;

2) для константы Джексона  $\gamma_n$  справедливо равенство

$$\gamma_n = \frac{\pi}{3}(n+1)(2(n+1)^2 + 1), \quad n = 0, 1, \dots; \quad (4)$$

3) является точным на константах.

Приведем еще один результат в этом направлении. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** Для сингулярного интеграла Джексона  $U_{4n}(f, x)$  справедливо представление

$$U_{4n}(f, x) = \frac{1}{\pi\gamma_n\lambda^2(u)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^4[(n+1)\varphi(u, v)]}{\sin^4(v-u)} \frac{dv}{\lambda(v)}, \quad x = \cos u.$$

**Замечание 1.** Положив в последнем представлении значение  $\alpha = 0$ , получим

$$U_{4n}(f, x) = \frac{3}{\pi(n+1)(2(n+1)^2 + 1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v) \frac{\sin^4[(n+1)(v-u)]}{\sin^4(v-u)} dv.$$

То есть, переходя к полиномиальному случаю, функция  $U_{4n}(f, x)$  представляет собой классический сингулярный интеграл Джексона, соответствующий системе полиномов Чебышёва первого рода при условии четности функции  $f$ . Аппроксимативные свойства последнего изучались нами в [23].

Как и в полиномиальном случае (см. [23]), имеет место представление рационального сингулярного интеграла Джексона в виде линейной комбинации частичных сумм рядов Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова, а именно справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Для сингулярного интеграла Джексона (3) при  $x \in [-1, 1]$  имеет место представление

$$U_{4n}(x, f) = \frac{\pi}{2\gamma_n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} [-3k^2 + (4n+1)k + 2(n+1)] S_{2k}(x, f) + \sum_{k=0}^n [(n+1-k)^2 + (n+1-k)] S_{2n+2k}(x, f) \right],$$

где  $s_{2k}(f, x)$  – частичные суммы ряда Фурье (1),  $\gamma_n$  – константа Джексона, определяемая в лемме 1.

**2. Оценка приближения функции  $|x|^s, 0 < s < 2, x \in [-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона.** Изучим приближение функции  $|x|^s, 0 < s < 2$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона (3). С этой целью положим

$$\delta_{4n}(x, \alpha) = |x|^s - U_{4n}(|x|^s, x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \delta_{4n}(\alpha) = \left\| |x|^s - U_{4n}(|x|^s, x) \right\|_{C[-1, 1]}. \quad (5)$$

Следующая теорема устанавливает оценку величины  $\delta_{4n}(x, \alpha)$  в зависимости от положения точки  $x \in [-1, 1]$ :



**Теорема 3.** Для оценки погрешности приближения функции  $|x|^s, 0 < s < 2$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона  $U_{4n}(|x|^s, x)$  справедливо соотношение

$$|\delta_{4n}(x, \alpha)| \leq \frac{1}{2^{s-2} \gamma_n} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \sqrt{\frac{1+2\alpha^2 \cos 2u + \alpha^4}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}} K_{4n}(t, \alpha) dt, \quad x = \cos u, x \in [-1, 1], \quad (6)$$

где  $\gamma_n$  – константа Джексона из (4),

$$K_{4n}(t, \alpha) = \frac{(n+1)(1-|\chi_2(t)|) - 3|\chi_1(t)| + 4|\chi_{n+2}(t)| - |\chi_{2n+3}(t)|}{(1-|\chi_1(t)|)^3}, \quad \chi_n(t) = \left( \frac{t^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 t^2} \right)^n, \quad \alpha \in [0, 1).$$

**Доказательство.** Рассмотрим разность (5). Воспользуемся представлением сингулярного интеграла Джексона из теоремы 2. С учетом точности  $U_{4n}(f, x)$  для единицы в (5) приходим к соотношению

$$\delta_{4n}(x, \alpha) = \frac{\pi}{2\gamma_n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} [-3k^2 + (4n+1)k + 2(n+1)] \varepsilon_{2k}^{(s)}(x, f) + \sum_{k=0}^n [(n+1-k)^2 + (n+1-k)] \varepsilon_{2n+2k}^{(s)}(x, f) \right], \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{2k}^{(s)}(x, \alpha), k = 0, \dots, 2n$  – погрешность приближения функции  $|x|^s, s \in (0, 2)$  частичными суммами ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова. Известно, что для  $\varepsilon_{2k}^{(s)}(x, \alpha), k = 0, \dots, 2n$  при  $-1 \leq x \leq 1$  справедливо соотношение

$$\varepsilon_{2n}^{(s)}(x, \alpha) = \frac{(-1)^n}{2^{s-2} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+2\alpha^2 \cos 2u + \alpha^4}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}} \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \cos \psi_n(x, t, \alpha) \chi_n(t) dt,$$

где

$$\psi_n(x, t, \alpha) = \arg \frac{\xi^2 + \alpha^2}{1+t^2 \xi^2} + n \arg \frac{\xi^2 + \alpha^2}{1+\alpha^2 \xi^2}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u,$$

$\chi_n(t)$  определена в формулировке теоремы. Подставив последнее соотношение в (7), находим, что

$$\delta_{4n}(x, \alpha) = \frac{1}{2^{s-1} \gamma_n} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+2\alpha^2 \cos 2u + \alpha^4}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}} \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \times \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_{2k} \cos \psi_k(x, t, \alpha) \chi_k(t) + \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} a_{2n+2k} \cos \psi_{n+k}(x, t, \alpha) \chi_{n+k}(t) \right] dt, \quad (8)$$

где

$$a_{2k} = -3k^2 + (4n+1)k + 2(n+1), \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$a_{2n+2k} = (n+1-k)^2 + (n+1-k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Из (8) с учётом положительности коэффициентов  $a_{2k}, k = 0, \dots, 2n$  приходим к оценке

$$|\delta_{4n}(x, \alpha)| \leq \frac{1}{2^{s-1} \gamma_n} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \sqrt{\frac{1+2\alpha^2 \cos 2u + \alpha^4}{1+2t^2 \cos 2u + t^4}} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} |\chi_k(t)| + \sum_{k=0}^n a_{2n+2k} |\chi_{n+k}(t)| \right] dt.$$

Выполняя некоторые преобразования выражения в квадратных скобках, получим

$$\left[ \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} |\chi_k(t)| + \sum_{k=0}^n a_{2n+2k} |\chi_{n+k}(t)| \right] = 2K_{4n}(t, \alpha),$$

где  $K_{4n}(t, \alpha)$  определяется в формулировке теоремы. Последнее доказывает теорему 3.

**Замечание 2.** Ограничение на параметр  $s \in (0, 2)$  объясняется подынтегральной функцией (6). В самом деле, при  $0 < s \leq 1$  интеграл справа в (6) существует, при  $1 < s < 2$  также существует как несобственный. При  $s \geq 2$  интеграл в (6) расходится.

Дальнейшим этапом наших исследований является нахождение равномерной оценки величины  $\delta_{4n}(x, \alpha)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Для приближения функции  $|x|^s, 0 < s < 2$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона  $U_{4n}(|x|^s, x)$  имеет место равномерная оценка

$$\delta_{4n}(\alpha) \leq \delta_{4n}^*(\alpha), \quad (9)$$

где

$$\delta_{4n}^*(\alpha) = \frac{1}{2^{s-2} \gamma_n} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| [I_1(\alpha, n) + I_2(\alpha, n)], \quad (10)$$

$$I_1(\alpha, n) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^3} \int_{\alpha}^1 (1 - t^2)^{s-4} t^{1-s} (1 - \alpha^2 t^2)^2 [(n+1)(1 - \chi_2(t)) - 3\chi_1(t) + 4\chi_{n+2}(t) - \chi_{2n+3}(t)] dt,$$

$$I_2(\alpha, n) = \frac{1 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^3} \int_0^{\alpha} \frac{(1 - t^2)^s t^{1-s} (1 - \alpha^2 t^2)^2}{(1 + t^2)^4} [(n+1)(1 - \chi_2^-(t)) - 3\chi_1^-(t) + 4\chi_{n+2}^-(t) - \chi_{2n+3}^-(t)] dt,$$

$$\chi_n^-(t) = \left( \frac{\alpha^2 - t^2}{1 - \alpha^2 t^2} \right)^n = (-1)^n \chi_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Исследуем интеграл справа в оценке (6). Учитывая, что  $\cos 2u = 2x^2 - 1$ , найдём

$$|\delta_{4n}(x, \alpha)| \leq \frac{1 - \alpha^2}{2^{s-2} \gamma_n} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^{s-1} t^{1-s}}{1 - \alpha^2 t^2} \sqrt{\frac{1 + A^2 x^2}{1 + T^2 x^2}} K_{4n}(t, \alpha) dt,$$

где  $A = 2\alpha / (1 - \alpha^2), T = 2t / (1 - t^2)$ . Рассмотрим функцию переменного  $x$ :

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{1 + A^2 x^2}{1 + T^2 x^2}}.$$

Поскольку

$$\gamma'(x) = \frac{x(A^2 - T^2)}{\sqrt{(1 + A^2 x^2)(1 + T^2 x^2)^3}},$$

то при  $0 < t < \alpha$  функция  $\gamma(x)$  возрастает, а значит, достигает максимального значения при  $x=1$ , что соответствует значению параметра  $u=0$ . В то же время при  $\alpha < t < 1$  функция  $\gamma(x)$  убывает и, значит, максимальное её значение будет уже при  $x=0$ , что

соответствует  $u = \pi/2$ . Разбивая интеграл в (6) на два интеграла по промежуткам  $[0, \alpha]$  и  $[\alpha, 1]$ , применяя затем рассуждения, приведенные выше, к каждому из них и раскрывая соответствующим образом знаки модуля в  $K_{4n}(t, \alpha)$ , придём к оценке (9), тем самым докажем теорему 4.

**3. Асимптотика равномерной оценки погрешности приближения.** Нашей задачей на этом этапе исследования будет нахождение асимптотики при  $n \rightarrow \infty$  правой части выражения (10). С этой целью в интегралах  $I_1(\alpha, n)$  и  $I_2(\alpha, n)$  выполним замену переменного интегрирования по формуле  $t^2 = (1-u)/(1+u)$ ,  $dt = -du / ((1+u)\sqrt{1-u^2})$ . Тогда

$$\delta_{4n}^*(\alpha) = \frac{1}{4\gamma_n} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \left[ \beta I_1(\alpha, n) + \frac{1}{\beta^3} I_2(\alpha, n) \right] \right|, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \quad \beta \in (0, 1],$$

где,

$$I_1(\alpha, n) = \int_0^\beta \left[ (n+1) \left( 1 - \left( \frac{\beta-u}{\beta+u} \right)^2 \right) - 3 \frac{\beta-u}{\beta+u} + 4 \left( \frac{\beta-u}{\beta+u} \right)^{n+2} - \left( \frac{\beta-u}{\beta+u} \right)^{2n+3} \right] \frac{(\beta+u)^2 u^{s-4}}{(1-u^2)^{s/2}} du,$$

$$I_2(\alpha, n) = \int_\beta^1 \left[ (n+1) \left( 1 - \left( \frac{u-\beta}{\beta+u} \right)^2 \right) - 3 \frac{u-\beta}{\beta+u} + 4 \left( \frac{u-\beta}{\beta+u} \right)^{n+2} - \left( \frac{u-\beta}{\beta+u} \right)^{2n+3} \right] \frac{(\beta+u)^2 u^s}{(1-u^2)^{s/2}} du.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Для равномерной оценки погрешности приближения функции  $|x|^s$ ,  $s \in (0, 2)$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона (3) при  $n \rightarrow \infty$  имеют место асимптотические формулы:

$$1) \delta_{4n}^*(\alpha) = \frac{3}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{2(n+1)} \right)^s \frac{4\Gamma(s)(2^{1-s}-1)}{(1-s)(2-s)(3-s)} + \frac{\mu(\beta, s)}{2(\beta(n+1))^2} \right] + v_{4n}^{(s)}(\beta) \right|, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (11)$$

при  $s \in (0, 1) \cup (1, 2)$ ,

$$2) \delta_{4n}^*(\alpha) = \frac{3}{\pi} \left[ \frac{\beta \ln 2}{n+1} + \frac{\arccos \beta + \sqrt{1-\beta^2} \beta}{4(\beta(n+1))^2} \right] + v_{4n}^{(1)}(\beta), \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (12)$$

при  $s = 1$ , где:

$$v_{4n}^{(s)}(\beta) = \begin{cases} O\left(\frac{\beta}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{(\beta(n+1))^{4-s/2} e^{2\beta(n+1)}}\right), & s \in (0, 1) \cup (1, 2), \\ O\left(\frac{\beta \ln(n+1)}{(n+1)^2}\right) + O\left(\frac{1}{(\beta(n+1))^{7/2} e^{2\beta(n+1)}}\right), & s = 1, \end{cases}$$

$$\mu(\beta, s) = \int_0^{\arccos \beta} \cos^{s+1} \theta \sin^{1-s} \theta d\theta,$$

$\Gamma(s)$  – гамма-функция Эйлера.

**Доказательство.** Доказательству теоремы 5 предпшлём две леммы, которые описывают асимптотическое поведение интегралов  $I_1(\alpha, n)$  и  $I_2(\alpha, n)$ . Так, для интеграла  $I_1(\alpha, n)$  имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.** При  $n \rightarrow \infty$  и  $s \in (0, 2)$  справедливо асимптотическое тождество

$$I_1(\alpha, n) \sim \begin{cases} 8(n+1)^2 \ln 2 + O((n+1) \ln(n+1)), s = 1, \\ \frac{4\beta^{s-1}\Gamma(s)(n+1)^{3-s}(2^{3-s} - 4)}{2^{s-1}(1-s)(2-s)(3-s)} + O((n+1)^2), s \neq 1, \end{cases} \quad (13)$$

**Доказательство.** Заметим, что асимптотическое поведение интеграла в  $I_1(\alpha, n)$  при  $n \rightarrow \infty$  определяется поведением подынтегральной функции в сколь угодно малой окрестности значения  $u = 0$ . Отсюда заключаем, что

$$\frac{(\beta + u)^2}{(1 - u^2)^{s/2}} \sim \beta^2, \quad u \rightarrow 0.$$

Учитывая, что  $(\beta - u)/(\beta + u) \sim \exp(-2u/\beta)$ ,  $u/\beta \rightarrow 0$ , будем иметь

$$I_1(\alpha, n) \sim \beta^2 \int_0^\beta u^{s-4} \left[ (n+1) - 3e^{-\frac{2u}{\beta}} - (n+1)e^{-\frac{4u}{\beta}} + 4e^{-\frac{2(n+2)u}{\beta}} - e^{-\frac{2(2n+3)u}{\beta}} \right] du, \quad n \rightarrow \infty.$$

В последнем интеграле выполним замену переменного интегрирования по формуле  $u/\beta = t$ . Тогда

$$I_1(\alpha, n) \sim \beta^{s-1} \int_0^1 t^{s-4} \left[ (n+1) - 3e^{-2t} - (n+1)e^{-4t} + 4e^{-2(n+2)t} - e^{-2(2n+3)t} \right] dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следуя методике, предложенной в [26] и [27], для нахождения асимптотики последнего интеграла при  $n \rightarrow \infty$  выполним три раза дифференцирование по параметру  $n$ . Будем иметь

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} \sim \beta^{s-1} \int_0^1 t^{s-4} \left[ 1 - e^{-4t} - 8te^{-2(n+2)t} + 4te^{-2(2n+3)t} \right] dt, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial^2 I_1(\alpha, n)}{\partial n^2} \sim 16\beta^{s-1} \int_0^1 t^{s-2} \left[ e^{-2(n+2)t} - e^{-2(2n+3)t} \right] dt, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial^3 I_1(\alpha, n)}{\partial n^3} \sim 16\beta^{s-1} \left[ 4 \int_0^1 t^{s-1} e^{-2(2n+3)t} dt - 2 \int_0^1 t^{s-1} e^{-2(n+2)t} dt \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

В первом и втором интегралах, находящихся в квадратных скобках последнего выражения, выполним соответственно замены  $2(2n+3)t \sim t$  и  $2(n+2)t \sim t$ .

Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^3 I_1(\alpha, n)}{\partial n^3} \sim 16\beta^{s-1} \left[ \frac{4}{2^s(2n+3)^s} \int_0^{2(2n+3)} t^{s-1} e^{-t} dt - \frac{2}{2^s(n+2)^s} \int_0^{2(n+2)} t^{s-1} e^{-t} dt \right] \sim \frac{16\beta^{s-1}\Gamma(s)}{2^{s-1}} \left[ \frac{2}{(2n+3)^s} - \frac{1}{(n+2)^s} \right].$$

Теперь для того, чтобы вернуться к асимптотике интеграла  $I_1(\alpha, n)$ , необходимо в последнем соотношении провести три раза интегрирование. Для выполнения указанной процедуры будем различать случаи  $s = 1$  и  $s \neq 1$ . Имеем

$$\frac{\partial^2 I_1(\alpha, n)}{\partial n^2} \sim \frac{16\beta^{s-1}\Gamma(s)}{2^{s-1}} \begin{cases} \ln(2n+3) - \ln(n+2), s=1, \\ \frac{(2n+3)^{1-s}}{1-s} - \frac{(n+2)^{1-s}}{1-s}, s \neq 1, \end{cases} + C_1,$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $n$

$$\frac{\partial I_1(\alpha, n)}{\partial n} \sim \frac{16\beta^{s-1}\Gamma(s)}{2^{s-1}} \begin{cases} n \ln(2n+3) - n \ln(n+2) + O(\ln(n+1)), s=1, \\ \frac{(2n+3)^{2-s}}{2(1-s)(2-s)} - \frac{(n+2)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}, s \neq 1, \end{cases} + C_1 n + C_2.$$

И, наконец,

$$I_1(\alpha, n) \sim \frac{16\beta^{s-1}\Gamma(s)}{2^{s-1}} \begin{cases} \frac{1}{2}(n+1)^2 \ln 2 + O((n+1)\ln(n+1)), s=1, \\ \frac{(2n+3)^{3-s} - 4(n+2)^{3-s}}{4(1-s)(2-s)(3-s)} + O((n+1)^2), s \neq 1, \end{cases}.$$

Учитывая, что при  $n \rightarrow \infty$  будет

$$(2n+3)^{3-s} - 4(n+2)^{3-s} = (n+1)^{3-s} (2^{3-s} - 4) + O((n+1)^{2-s}),$$

для того, чтобы прийти к (13) в последнем асимптотическом соотношении, для  $I_1(\alpha, n)$  достаточно выполнить несложные преобразования. Лемма 2 доказана.

**Замечание 3.** В соотношении (13) к представлению при  $s=1$  можно прийти из представления при  $s \neq 1$  предельным переходом при  $s \rightarrow 1$ .

Займёмся теперь интегралом  $I_2(\alpha, n)$ . Для него имеет место лемма 3.

**Лемма 3.** В условиях леммы 2 при  $n \rightarrow \infty$  и  $s \in (0, 2)$  справедливо асимптотическое равенство

$$I_2(\alpha, n) \sim \begin{cases} 2\beta(n+1) \left( \arccos \beta + \beta \sqrt{1-\beta^2} \right) + \frac{2(1-\beta^2)^{3/2}}{e^{2\beta(n+1)}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta(n+1)}} + o(1), s=1, \\ 4\beta(n+1)\mu_1(\beta, s) - 3\mu_2(\beta, s) - s\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) \frac{(1-\beta^2)^{2-s/2}}{(\beta(n+2))^{1-s/2} e^{2\beta(n+1)}}, s \neq 1, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\Gamma(s)$  – гамма-функция Эйлера,  $\mu_1(\beta, s)$ ,  $\mu_2(\beta, s)$  – величины, зависящие от  $\beta$  и  $s$  и не зависящие от  $n$ .

**Доказательство.** В интеграле  $I_2(\alpha, n)$  положим  $u = \cos \theta$ . Тогда

$$I_2(\alpha, n) = 4\beta(n+1)J_1(\beta, n) - 3J_2(\beta, n) + 4J_3(\beta, n) - J_4(\beta, n), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(\beta, n) &= \int_0^{\arccos \beta} \cos^{s+1} \theta \sin^{1-s} \theta d\theta, \\ J_2(\beta, n) &= \int_0^{\arccos \beta} (\cos^2 \theta - \beta^2) \cos^s \theta \sin^{1-s} \theta d\theta, \\ J_3(\beta, n) &= \int_0^{\arccos \beta} \left( \frac{\cos \theta - \beta}{\cos \theta + \beta} \right)^{n+2} (\cos \theta + \beta)^2 \cos^s \theta \sin^{1-s} \theta d\theta, \\ J_4(\beta, n) &= \int_0^{\arccos \beta} \left( \frac{\cos \theta - \beta}{\cos \theta + \beta} \right)^{2n+3} (\cos \theta + \beta)^2 \cos^s \theta \sin^{1-s} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Интегралы  $J_1(\beta, n)$  и  $J_2(\beta, n)$  не зависят от  $n$  и существуют при условиях на  $\beta$  и  $s$ . Обозначим их соответственно  $\mu_1(\beta, s)$  и  $\mu_2(\beta, s)$ . Для исследования асимптотики интегралов  $J_3(\beta, n)$  и  $J_4(\beta, n)$  воспользуемся методом Лапласа [26–27]. Реализуя идею метода, перепишем интеграл  $J_3(\beta, n)$  в виде

$$J_3(\beta, n) = \int_0^{\arccos \beta} \exp[(n+2)S(\theta)] (\cos \theta + \beta)^2 \cos^s \theta \sin^{1-s} \theta d\theta,$$

где  $S(\theta) = \ln[(\cos \theta - \beta) / (\cos \theta + \beta)]$ ,  $0 < \beta < 1$ . Функция  $S(\theta)$  убывает на отрезке  $[0, \arccos \beta]$  поскольку  $S'(\theta) = -2\beta \sin \theta / (\cos^2 \theta - \beta^2) < 0$ , а значит, имеет строгий максимум в точке  $\theta = 0$ . Используя разложения

$$S(\theta) = \ln \frac{\cos \theta - \beta}{\cos \theta + \beta} = \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \theta^2 + o(\theta^2),$$

а также

$$f(\theta) = (\cos \theta + \beta)^2 \cos^s \theta \sin^{1-s} \theta = (1 + \beta)^2 \theta^{1-s} + o(1),$$

справедливые при  $\theta \rightarrow 0$ , находим, что при произвольно малом  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$

$$J_3(\beta, n) \sim \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{n+2} (1 + \beta)^2 \int_0^\varepsilon \theta^{1-s} \exp \left[ -\frac{(n+2)\beta\theta^2}{1 - \beta^2} \right] d\theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменного  $\theta^2 \sim (n+2)\beta\theta^2 / (1 - \beta^2)$ , находим, что

$$J_3(\beta, n) \sim \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{n+2} (1 + \beta)^2 \left( \frac{1 - \beta^2}{(n+2)\beta} \right)^{1-s/2} \int_0^{\varphi(n, \varepsilon)} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta,$$

где  $\varphi(n, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(n+2)\beta / (1 - \beta^2)} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \theta^{1-s} e^{-\theta^2} d\theta = -\frac{s}{4} \Gamma \left( -\frac{s}{2} \right),$$

находим теперь главный член асимптотики интеграла  $J_3(\beta, n)$  в рассматриваемом случае

$$J_3(\beta, n) \sim -\frac{s}{4} \Gamma \left( -\frac{s}{2} \right) \frac{(1 - \beta^2)^{2-s/2}}{(\beta(n+2))^{1-s/2}} \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{n+1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Займёмся интегралом  $J_4(\beta, n)$ . Рассуждая аналогичным образом, находим, что

$$J_4(\beta, n) \sim -\frac{s}{4} \Gamma \left( -\frac{s}{2} \right) \frac{(1 - \beta^2)^{2-s/2}}{(\beta(2n+3))^{1-s/2}} \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{2n+2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Учитывая теперь очевидное асимптотическое тождество

$$\left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{n+1} \sim e^{-2\beta(n+1)}, \quad 0 < \beta < 1, n \rightarrow \infty,$$

и подставив (16) и (17) в (15), получим асимптотику интеграла  $I_2(\alpha, n)$  при  $s \neq 1$ . Чтобы из найденных асимптотических соотношений прийти к

случаю  $s = 1$ , достаточно воспользоваться предельным переходом при  $s \rightarrow 1$ . Лемма 3 доказана.

Теперь для доказательства теоремы 5 осталось подставить оценки (13) и (14) в соотношение (10), что завершает доказательство теоремы 5.

**Следствие 1.** Положив в теореме 5  $\beta = 1$ , получим оценку погрешности приближения функции  $|x|^s$ ,  $s \in (0, 2)$  сингулярным интегралом Джексона ассоциированным с рядом Фурье – Чебышёва в полиномиальном случае. Тогда:

$$\left\| |x|^s - U_{4n}^{(0)}(|x|^s, x) \right\|_{C[-1,1]} = \begin{cases} \frac{3}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{4\Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{2^s(n+1)^s(1-s)(2-s)(3-s)} + O\left(\frac{1}{n+1}\right), & s \neq 1, \\ \frac{3 \ln 2}{\pi(n+1)} + O\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\right), & s = 1, \quad n \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Этот результат содержится в [23].

Представляет интерес минимизировать правую часть в соотношениях (11) и (12) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра  $\beta = \beta^*$ . С этой целью положим

$$\delta_{4n} = \inf_{0 < \alpha < 1} \delta_{4n}(\alpha),$$

где величина  $\delta_{4n}(\alpha)$  из (9). Имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.** Для равномерной оценки приближения функции  $|x|^s$ ,  $s \in (0, 2)$  на отрезке  $[-1, 1]$  сингулярным интегралом Джексона (3) справедливы асимптотические соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{4s}{s+2}} \delta_{4n} \leq \begin{cases} \left( \frac{4^{1-s} \Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{\pi(1-s)(2-s)(3-s)} \sin \frac{\pi s}{2} \right)^{\frac{2}{s+2}} \frac{3(s+2)}{2}, & s \in (0, 1) \cup (1, 2), \\ \frac{9}{2} \left( \frac{\ln 2}{2\pi} \right)^{2/3}, & s = 1. \end{cases} \quad (18)$$

При этом оптимальным значением параметра будет  $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$ , где

$$\beta^* = \sqrt[s+2]{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi s}{2}} (2(n+1))^{\frac{s-2}{s+2}}}, \quad \gamma(s) = \begin{cases} \frac{4\Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{(1-s)(2-s)(3-s)}, & s \in (0, 1) \cup (1, 2), \\ 2 \ln 2, & s = 1. \end{cases} \quad (19)$$

**Доказательство.** Исследуем подробно соотношение (11). Из следствия 4 очевидно, что при фиксированном  $0 < \beta \leq 1$  порядок в указанных соотношениях не отличается от полиномиального. Причём полиномиальный случай соответствует значению  $\beta = 1$ . Пусть в соотношении (11)  $\beta = \beta(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$\mu(t, s) = \int_0^{\arccos \beta} \cos^{s+1} \theta \sin^{1-s} \theta d\theta \sim \int_0^{\pi/2} \cos^{s+1} \theta \sin^{1-s} \theta d\theta = \frac{\pi s}{4 \sin \pi s / 2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и выражение в квадратных скобках в (11) примет вид

$$f(\beta) = \frac{\beta^s}{(2(n+1))^s} \gamma(s) + \frac{\pi s}{8\beta^2(n+1)^2 \sin \pi s/2}, \quad \gamma(s) = \frac{4\Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{(1-s)(2-s)(3-s)}. \quad (20)$$

Функция  $f(\beta)$  имеет строгий минимум при  $0 < \beta \leq 1$ . Найдём его. Имеем

$$[f(\beta)]'_\beta = \frac{s\beta^{s-1}\gamma(s)}{(2(n+1))^s} - \frac{2\pi s}{8\sin \frac{\pi s}{2}(n+1)^2 \beta^3} = 0.$$

Разрешая последнее соотношение относительно  $\beta$ , находим, что минимальное значение правой части выражения (11) будет доставлять  $\beta^*$  из (19) при  $s \in (0,1) \cup (1,2)$ . Отсюда в (11) находим, что при достаточно больших  $n$

$$\delta_{4n}(\alpha^*) \sim \frac{3(s+2)}{2} \left( \frac{4^{1-s}\Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{\pi(1-s)(2-s)(3-s)} \sin \frac{\pi s}{2} \right)^{\frac{2}{s+2}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{4s}{s+2}}}, \quad s \in (0,1) \cup (1,2).$$

Из последнего асимптотического соотношения с учётом (9) и (10) следует первое соотношение в (18). Для того, чтобы получить второе соотношение, достаточно в выражении (20) перейти к пределу при  $s \rightarrow 1$ . Теорема 6 доказана.

**Следствие 2.** При достаточно больших значениях  $n$  существует такой параметр  $\alpha^*$ ,  $\alpha^* = \sqrt{(1-\beta^*)/(1+\beta^*)}$ , что при  $s \in (0,1) \cup (1,2)$ , справедливо неравенство

$$\| |x|^s - U_{4n}(|x|^s, x) \|_{C[-1,1]} \leq \left( \frac{4^{1-s}\Gamma(s)(2^{1-s} - 1)}{\pi(1-s)(2-s)(3-s)} \sin \frac{\pi s}{2} \right)^{\frac{2}{s+2}} \frac{3(s+2)}{2(n+1)^{\frac{4s}{s+2}}},$$

а при  $s=1$  справедливо неравенство

$$\| |x| - U_{4n}(|x|, x) \|_{C[-1,1]} \leq \frac{9}{2} \left( \frac{\ln 2}{2\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{(n+1)^{4/3}}.$$

Последние соотношения показывают, что при подходящем выборе параметра в приближении функции  $|x|^s$ ,  $s \in (0,2)$  на отрезке  $[-1,1]$  сингулярным интегралом (3) можно достичь более высокой скорости стремления к нулю погрешности приближения в сравнении с приближением тем же типом оператора в полиномиальном случае.

**Замечание 4.** Интересно сравнить скорости убывания погрешности приближения  $\delta_{4n}^*(\alpha)$ , если в качестве параметров задавать значения, оптимальные для других способов приближения исследуемой функции. Например, исследуя приближение функции  $|x|$  на отрезке  $[-1,1]$  посредством частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных функций Чебышёва – Маркова [23] оптимальным было значение параметра  $\beta^* = \ln n/n$ . Подставив данное значение в (12), находим, что при  $n \rightarrow \infty$  эти значения параметра обеспечивают скорость убывания



порядка  $O(1/\ln^2(n+1))$ , и являются неподходящими с точки зрения приближений интегралом Джексона.

**Заключение.** В работе исследовано приближение функции  $|x|^s, 0 < s < 2$  на отрезке  $[-1,1]$  посредством сингулярного интеграла Джексона, ассоциированного с системой рациональных дробей Чебышёва – Маркова. Показано, что при определенном выборе параметра в ряде случаев достигается увеличение скорости приближения в сравнении с полиномиальным случаем.

### Литература

1. Jackson D. The theory of approximation // American Mathematical Society Colloquium Publications. 1930. Vol. XI. P.184.
2. Schurer F., Steutel F.W. On the Degree of Approximation of Functions in with Operators of the Jackson Type // Journal of approximation theory. 1979. Vol. 27. P. 153–178.
3. Wafi A. Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type // Indian J. pure appl. Math. 1980. Vol. 11(9). P. 1194–1201.
4. Сафронова Г.П. О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона // Доклады АН СССР. 1950. Т.73, № 2. С. 277–278.
5. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations // Japanese Journal of Mathematics. 1925. Vol. 2. P. 129–145.
6. Malmquist F. Sur la determination d'une classe fonctions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points // Compte Rendus Six. Cong. math. scand. Kopenhagen, Denmark. 1925. P. 253–259.
7. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, Изд-во БГУ, 1979. 178 с.
8. Ровба Е.А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Докл. АН Беларуси. 1996. Т.40, №3. С. 42–46.
9. Смотрицкий К.А. О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 64–70.
10. Никольский С.М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т.4. №6. С. 501–508.
11. Bernstein S. Sur meilleure approximation de  $|x|$  par des polynomes de degres donnes // Acta Math. 1913. Vol. 37. P. 1–57.
12. Newman D.J. Rational approximation to  $|x|$  // Mich. Math. J. 1964. Vol. 11, Is. 1. P. 11–14.
13. Буланов А.П. Асимптотика для наименьших уклонений  $|x|$  от рациональных функций // Матем. сб. 1968. Т. 76(118), вып. 2. С. 288–303.
14. Вячеславов Н.С. О приближении функции  $|x|$  рациональными функциями // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 1. С. 163–171.
15. Шталь Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации  $|x|$  на  $[-1,1]$  // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 85–118.
16. Bernstein S. Sur la meilleure approximation de  $|x|^p$  par des polynomes de degres tres eleves // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1938. Vol. 2, Is. 2. P. 169–190.
17. Freud G., Szabados J. Rational approximation to  $x^a$  // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. Т. 18 (3 – 4). P. 393–399.

18. Гончар А.А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями // Матем. сб. 1967. Т. 73, № 4. С.630–638.
19. Вячеславов Н.С. Об аппроксимации  $x^a$  рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 92–109.
20. Stahl H. Best uniform rational approximation of  $x^a$  on  $[0,1]$  // Am. math. Society. 1993. Vol. 28, No 1. P.116–122.
21. Revers M. On the asymptotics of polynomial interpolation to  $x^a$  at the Chebyshev nodes // Journal of Approximation Theory. 2013. Vol. 165. P. 70–82.
22. Райцин Р.А. Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье–Чебышева // Изв. вузов. Матем. 1980. №3. С. 45–49.
23. Поцейко П.Г. Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции  $|x|^s$  на отрезке  $[-1,1]$  // Вестник ГрГУ. 2019 (в печати).
24. Ровба Е.А., Поцейко П.Г. Об одной системе рациональных дробей Чебышёва-Маркова // Доклады НАН Беларуси. 2017. Т. 61, № 1. С. 24–29.
25. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev - Markov fractions // Analysis Math. 2018. Vol. 44, №1. P. 115–140.
26. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 480 с.
27. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1989. 544 с.

**E.A. Rovba, P.G. Potsejko**

Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus)

## **ON ONE REPRESENTATION SINGULAR INTEGRAL OF JACKSON AND APPROXIMATION OF FUNCTIONS $|X|^S$ ON THE INTERVAL**

**Keywords:** *Fourier-Chebyshev series, partial sums, Fejer means, Jackson singular integral, asymptotic estimates, asymptotic behavior, exact constants.*

**Abstract.** *This paper is devoted to the study of the approximation of the function  $|x|^s$ ,  $s > 0$  on the interval  $[-1,1]$  by the singular Jackson integral associated with the Chebyshev – Markov rational fraction system. In the introduction, the authors give the main results related to the research of the approximative properties of the singular Jackson integral in polynomial and rational cases, and cite previously known works on the approximation of the function  $|x|^s$ ,  $s > 0$  on the interval  $[-1,1]$ . Next is introduced one system of rational Chebyshev – Markov fractions, its basic properties are specified and the relationship between the rational singular Jackson integral and partial sums of the Fourier series in the system under study is established. In the main part of this paper we solve the problem of approximation of the function  $|x|^s$ ,  $s \in (0,2)$  by a rational singular Jackson integral. In particular, the evaluation of the deviations depending on the position of the point on the segment  $[-1,1]$ , the uniform estimate of evasion on the interval  $[-1,1]$  and its asymptotic expression, when the final part of the article is the optimal value*

*of the parameter, which provides the greatest velocity of approach in the study of rational functions of the singular integral of Jackson. As a consequence, the best estimate of the error of the approximation of the function  $|x|$  on the interval  $[-1,1]$  in the approximation by the singular Jackson integral is given.*

**М.Р. Тихонов**

*Московский институт электронной техники*

УДК 330.131.7:004.4

## **АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ РИСКОВ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ РИСКАМИ KUROT RISKS**

*Ключевые слова: оценка эффективности, риски, управление рисками, автоматизированная система, автоматизация, показатели эффективности, процесс управления.*

*В статье рассматривается модель расчёта эффективности методов оценки рисков, описанных в стандарте ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010: 2011 и автоматизированных в системе управления рисками KuroT Risks. Приведена формула расчёта эффективности как для отдельного метода оценки рисков, так и для его комбинированного варианта, а также для автоматизированной системы управления рисками в целом. В основе расчётов лежит общая формула эффективности как отношение достигнутых результатов к затраченным ресурсам, при этом учитываются все показатели, используемые в системе управления рисками KuroT Risks. Выработанная модель была обоснована модульной структурой автоматизированной системы, а также практикой применения методов оценки рисков.*

**Управление рисками и автоматизированная система KuroT Risks.** Организации и предприятия подвергаются влиянию неопределённости как внешней среды, так и внутренних процессов и объектов, что, в свою очередь, приводит к возникновению и увеличению variability процессов, а следовательно, к уменьшению их управляемости и увеличению возможного брака продукции.

Под управлением рисками понимается совокупность инструментов, методов и средств, направленных на уменьшение такой

неопределённости посредством анализа и оценки факторов рисков, влияющих на их возникновение. Для различных целей и организаций применимы различные методы оценки рисков. В общей сложности таких методов более 31, однако именно методы, описанные в стандарте ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010: 2011 [1], являются общепринятыми и распространёнными.

Автоматизированная система управления рисками KuroT Risks [2] позволяет оператору (ответственному за управление рисками) в понятной форме проводить процесс управления рисками не только любым из предложенных стандартом методом, но и их комбинациями, что, в свою очередь, повышает точность выявления, анализа и оценки рисков, а следовательно, позволяет выбрать оптимальные пути решения проблем, вызванных возникновением рискованных ситуаций.

Также автоматизация процесса управления рисками уменьшила долю влияния человеческого фактора посредством переноса части операций на машинное выполнение.

Для более точной оценки результирующего влияния автоматизации процесса управления рисками с использованием системы KuroT Risks следует проанализировать эффективность данной системы и методов, реализованных в ней.

**Анализ эффективности методов оценки рисков в системе KuroT Risks.** В системе KuroT Risks [3–4] для возможности комбинирования и выявления оптимальных методов оценки рисков в условиях конкретной организации или предприятия реализован набор параметров для каждого метода на двух этапах управления рисками: идентификация рисков и анализ рисков.

Такие параметры разделены на две группы:

1) параметры абсолютной группы – параметр имеет всего два значения: применим/не применим, требует/не требует, показывает/не показывает и т.д.:

1.1) люди – метод применим для оценки рисков, связанных с людьми, человеческим фактором;

1.2) материалы – метод применим для оценки рисков, связанных с материалами, ресурсами, сырьем;

1.3) машины – метод применим для оценки рисков, связанных с машинами, станками, оборудованием;

1.4) методы – метод применим для оценки рисков, связанных с выбранными процедурами, процессами;

1.5) среда – метод применим для оценки рисков, связанных с внешней по отношению к объекту оценки средой;

1.6) система – метод применим для оценки рисков уже существующей системы, объекта;

- 1.7) проект – метод применим для оценки рисков проекта системы, разрабатываемого объекта;
- 1.8) наблюдение – метод в своей процедуре опирается на наблюдение за объектом или связанными с ним объектами;
- 1.9) опрос – метод в своей процедуре основан на опросе заинтересованных лиц, участников процесса;
- 1.10) статистика – метод в своей процедуре опирается на статистические данные об объекте;
- 1.11) сценарии – метод применим для оценки рисков, связанных с возможными сценариями поведения объекта;
- 1.12) функции – метод применим для оценки рисков, связанных с функциями объекта;
- 1.13) вспомогательный – метод является вспомогательным, общим для других методов;
- 1.14) диаграмма – в результате проведения процедуры метода получается диаграмма, графическое представление;
- 1.15) опыт – для выполнения процедуры метода необходимы опытные данные, данные прошлых периодов;
- 1.16) эксперты - метод основан на экспертной оценке;
- 1.17) документы – в результате проведения процедуры метода получается набор документов;

2) параметры относительной группы – параметр имеет более двух значений: дорогой/средней дороговизны/дешёвый, быстрый/средней долготы/долгий, сложный/средней сложности/лёгкий и т.д.:

- 2.1) быстродействие – значение затрачиваемого на проведение процедуры метода времени;
- 2.2) затраты – значение затрачиваемого на проведение процедуры метода капитала;
- 2.3) сложность – значение количества элементов метода и связей между ними;
- 2.4) неопределённость – значение требуемой для проведения процедуры метода определённости состояний объекта;
- 2.5) жёсткость – значение доли обязательных операций метода.

В системе управления рисками KuroT Risks параметры абсолютной группы используются для фильтрации и выбора методов оценки риска, а параметры относительной группы направлены на ранжирование и сортировку методов. Из этого следует, что в большей степени на эффективность методов оценки рисков и эффективность всей системы управления рисками влияют именно параметры относительной группы.

Шкалы соответствия и правила расчёта параметров относительной группы приведены в таблице 1.

Таблица 1

## Шкалы соответствия относительных параметров

Параметр	Формула	Шкала соответствия		
		0	1	2
Быстродействие	$K = \sum_{i=1}^n T(O_i)$ <p>К – время выполнения операций метода (рабочие дни), n – количество операций, T(O<sub>i</sub>) – время выполнения операции i (рабочие дни)</p>	K ≤ 5	5 < K < 20	K ≥ 20
Затраты	$L = \sum_{i=1}^n Z(O_i)$ <p>L – затраты на выполнение операций метода (тысячи рублей за час), n – количество операций, Z(O<sub>i</sub>) – затраты на выполнение операции i (тысячи рублей за час)</p>	1 ≤ L	1 < L < 5	L ≥ 5
Сложность	$M = E - N + 2P$ <p>M – цикломатическая сложность, E – количество связей элементов, N – количество элементов, P – количество компонент связности</p>	M ≤ 5	5 < M < 10	M ≥ 10
Неопределённость	$N = \frac{\left(\frac{S_n}{S} + \frac{X_n}{X}\right)}{2}$ <p>N – неопределённость системы, S<sub>n</sub> – количество неизвестных элементов системы и их связей, S – количество элементов системы и их связей, X<sub>n</sub> – количество неизвестных параметров системы, X – количество параметров системы</p>	N ≤ 0.3	0.3 < N < 0.7	N ≥ 0.7
Жёсткость	$J = \frac{O_o}{O}$ <p>J – жёсткость метода, O<sub>o</sub> – количество обязательных операций, O – количество операций</p>	J ≤ 0.3	0.3 < J < 0.7	J ≥ 0.7

Анализируя правила расчёта параметров и сопоставляя их с общей формулой эффективности:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{P}{Z} \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_P = \frac{P}{\Phi},$$

где  $\mathcal{E}_3$  и  $\mathcal{E}_P$  – затратная и ресурсная формы эффективности соответственно, P – результат, Z – затраты, Φ – ресурсы [5], можно

вывести формулу расчёта эффективности метода оценки рисков в автоматизированной системе управления рисками KuroT Risks:

$$\mathcal{E}_m = \frac{N + 1}{K + L + M + J + 3}$$

где N, K, L, M, J – значения относительных показателей в соответствии с таблицей 1; 1 и 3 введены в связи с необходимостью нормирования эффективности в системе KuroT Risks.

Данная формула обусловлена тем, что основной целью управления рисками является уменьшение влияния неопределённости объекта управления. Такой неопределённостью в формуле выступает N.

Однако, учитывая тот факт, что в системе реализована возможность комбинирования методов оценки рисков, а также используются показатели абсолютной группы, следует выразить формулы, связанные с ними. В системе KuroT Risks такие показатели используются при расчёте полноты и согласованности комбинаций методов оценки рисков:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{A}_{1i} + \vec{A}_{2i})}{n * m} * 100\% , \quad S = \frac{|i|(\vec{A}_{1i} = \vec{A}_{2i})|}{n} * 100\% ,$$

где P – полнота комбинации, S – согласованность комбинации, n – количество абсолютных параметров, m – максимальное значение абсолютного параметра комбинации, A<sub>1i</sub> – значение i-го абсолютного параметра первого метода (идентификация), A<sub>2i</sub> – значение i-го абсолютного параметра второго метода (анализ), i изменяется от 1 до n.

Исходя из описанных выше формул, можно сформировать формулу эффективности метода оценки рисков с учётом комбинации в системе KuroT Risks:

$$\mathcal{E}_{km} = \frac{(N_1 + 1) + (N_2 + 1)}{(K_1 + L_1 + M_1 + J_1 + 3) + (K_2 + L_2 + M_2 + J_2 + 3)} * P * S ,$$

где индексами у параметров являются индексы метода, используемого на этапе идентификации рисков, и индексы метода, используемого на этапе анализа рисков (комбинирование методов в системе реализовано на данных этапах).

**Анализ эффективности автоматизированной системы KuroT Risks.** В большей части эффективность автоматизированной системы управления рисками зависит от степени точности выдаваемого управляющего воздействия, основанного на анализе и оценке рисков. При этом точность такой системы обусловлена количеством реализованных в ней методов.

Общую эффективность автоматизированной системы управления рисками без учёта эффективности методов оценки рисков можно представить в виде:

$$\mathcal{E} = \frac{x_1^{(1+x_2+x_3)}(x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)}{x_9 + x_{10}}$$

где  $x_1$  – количество реализованных методов оценки рисков;  $x_2$  – наличие вертикального (последовательного) комбинирования методов на этапах идентификации и анализа рисков;  $x_3$  – наличие горизонтального (параллельного) комбинирования методов на этапах идентификации и анализа рисков;  $x_4$  – наличие реализованных процедур процесса «подготовка»;  $x_5$  – наличие реализованных процедур процесса «идентификация рисков»;  $x_6$  – наличие реализованных процедур процесса «анализ рисков»;  $x_7$  – наличие реализованных процедур процесса «сравнительная оценка рисков»;  $x_8$  – наличие реализованных процедур процесса «обработка рисков»;  $x_9$  – затраты на внедрение системы (1 – низкие, 2 – средние, 3 – высокие);  $x_{10}$  – затраты на поддержание системы (1 – низкие, 2 – средние, 3 – высокие).

Однако при учёте эффективности методов оценки рисков и учёте возможности их комбинирования данная формула приобретает вид:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{y=1}^u (\mathcal{E}_{xy}) (x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)}{x_9 + x_{10}} = \frac{\sum_{y=1}^u \left( \frac{x_9 + x_{10}}{(N_{y1}+1) + (N_{y2}+1)} \cdot P_y \cdot S_y \right)}{(K_{y1} + L_{y1} + M_{y1} + J_{y1} + a) + (K_{y2} + L_{y2} + M_{y2} + J_{y2} + a)} * (x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

где  $u$  – количество комбинаций методов оценки рисков;  $y$  – номер комбинации методов оценки рисков.

#### **Подведем итоги.**

Расчёт эффективности методов оценки рисков в системе управления рисками KuroT Risks, а также её общая эффективность основаны на математической модели, приведённой в данной статье и выведенной из общих принципов расчёта эффективности. Большое число методов оценки рисков, реализованных в системе KuroT Risks, а также возможности их комбинирования (пусть и на двух этапах управления рисками) обеспечивают высокую эффективность данной системы по сравнению с другими системами управления рисками как на российском, так и на зарубежном рынке.

В целом приведённый математический аппарат использует только параметры, которыми оперирует система KuroT Risks, однако при незначительных корректировках может быть применен и в других системах управления рисками.

#### **Литература**

1. ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010: 2011. Менеджмент риска. Методы оценки риска.
2. Свид. 2017618827 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. KuroT Risks / М.Р. Тихонов; заявитель и правообладатель М.Р. Тихонов (RU). №2017614368; заявл. 12.05.17; опубл. 10.08.2017. Реестр программ для ЭВМ. 1 с.
3. Тихонов М.Р. Проектирование информационной системы оценки рисков комбинированными методами // XX Международная научно-техническая



конференция «Информационно-вычислительные технологии и их приложения». Пенза, 2016. С. 68-71.

4. Тихонов М.Р. Модульная структура информационной системы KuroT Risks // сборник тезисов 24-й Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика - 2017». М., 2017. С. 176.

5. Акуленок М.В., Никифорова-Денисова С.Н. Управление экономикой качества. М.: МИЭТ, 2012.

**M.R. Tikhonov**

*National Research University of Electronic Technology*

## **ANALYSIS OF RISK ASSESSMENT METHODS EFFICIENCY IN THE AUTOMATED RISK MANAGEMENT SYSTEM KUROT RISKS**

**Keywords:** *assessment of efficiency; risks; Management of risks; automated system; automation; indicators of efficiency; management process.*

**Abstract.** *The article discusses a model of calculating the effectiveness of risk assessment methods described in the standard GOST R ISO / IEC 31010: 2011 and automated in the KuroT Risks risk management system. The formula for calculating the effectiveness of a separate method for risk assessment, and for its combined option, as well as for an automated risk management system as a whole are described. The calculation is based on the general efficiency formula as a ratio of the results achieved to the resources expended, while taking into account all the indicators used in the KuroT Risks risk management system. The developed model was justified by the modular structure of the automated system, as well as the practice of applying risk assessment methods.*

**Н.А. Шерстнёва**

*Смоленский государственный университет*

УДК 517.518.36

## **МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ**

**Ключевые слова:** *приближение непрерывной функции многочленом; ортогонализация; линейно независимая система функций.*

*Теория приближения функций сегодня является одним из интенсивно разрабатываемых направлений в науке. Можно выделить несколько типов задач, актуальных для данного направления и отличающихся друг от друга типами приближаемых функций, типами*

функций, используемых для приближения, и методами построения приближающей функции. Мы остановимся на решении следующей задачи: имеется линейно независимая в евклидовом пространстве  $C^2_{[a;b]}$  система элементов  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  и функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a;b]$ ; требуется построить обобщённый многочлен  $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$  фиксированной степени  $n$ , дающий наилучшее приближение для данной функции (в смысле метрики пространства  $C^2_{[a;b]}$ ).

*Приближение функций* – нахождение для данной функции  $f$  функции  $g$  из некоторого определённого класса, в том или ином смысле близкой к  $f$ , дающей её приближённое представление.

Можно выделить несколько типов задач, актуальных для теории приближения функций и отличающихся друг от друга типами приближаемых функций, типами функций, используемых для приближения, и методами построения приближающей функции. Распространённой является задача о приближении функций

обобщёнными полиномами  $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ , где  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  – заданные

функции,  $a_0, \dots, a_n$  – произвольные числа. Обычно это алгебраические

многочлены  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ . При этом можно рассмотреть вопрос о

равномерном приближении непрерывной функции алгебраическими и тригонометрическими многочленами и вопрос о приближении такой функции в среднем.

В статье в качестве *проблемы научного исследования* рассмотрена следующая: дано пространство  $C^2_{[a;b]}$ ; в нём задана линейно независимая система функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  и функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a;b]$ ; требуется построить обобщённый многочлен  $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$  фиксированной степени  $n$ , дающий наилучшее приближение в среднем для данной функции.

Опираясь на результаты проведённого исследования [1; 2], можно предложить следующий *алгоритм решения* заявленной проблемы: 1) построить по найденной линейно независимой системе элементов ортогональную (ортонормированную) систему, используя процесс ортогонализации системы функций в евклидовом пространстве; 2) составить ряд Фурье данной непрерывной функции  $f(x)$  по ортогональной (ортонормированной) системе; 3) рассмотреть  $n$ -ю

частичную сумму ряда Фурье; 4) перейти от ортогональной (ортонормированной) системы к линейно независимой системе, используя тот факт, что каждый элемент ортогональной (ортонормированной) системы представляет собой линейную комбинацию элементов линейно независимой системы. Полученный таким образом полином и будет давать наилучшее приближение для данной непрерывной функции.

Рассмотрим для примера функцию  $f(x)$ , непрерывную на отрезке  $[-1;1]$ . Пусть требуется найти наилучшее приближение этой функции алгебраическими многочленами.

*Решение*

1. Убедимся, что система функций  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  является линейно независимой в пространстве  $C_{[-1;1]}^2$ .

Пусть  $1, x, x^2, \dots, x^n$  – произвольная конечная подсистема данной системы, и пусть  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$  для  $x \in [-1;1]$ , то есть  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0 + 0x + \dots + 0x^n$ . Из равенства двух многочленов вытекает равенство их соответствующих коэффициентов:  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ . А это и означает линейную независимость системы  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Так как мы выбирали эту систему произвольным образом, то по определению линейной независимости бесконечной системы элементов данная система  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  также является линейно независимой на  $[-1;1]$ .

2. Преобразуем систему функций  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  так, чтобы она стала ортогональной на  $[-1;1]$ . Воспользуемся доказанными ранее формулами [2].

$$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, \dots, f_{n+1} = x^n, \dots$$

$$1) \Psi_1 = f_1 = 1.$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} \cdot f_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 dx}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Итак, } \Phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2) \Psi_2 = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & f_2 \end{vmatrix}.$$

$$(f_1, \Psi_1) = (1, 1) = 2, (f_2, \Psi_1) = (x, 1) = \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 2x.$$

$$\sqrt{(\Psi_2, \Psi_2)} = \sqrt{\int_{-1}^1 4x^2 dx} = \sqrt{4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\Phi_2 = \frac{\Psi_2}{\sqrt{(\Psi_2, \Psi_2)}}, \Phi_2 = \frac{2x\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

$$\text{Итак, } \Phi_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

$$3) \Psi_3 = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & f_2 \\ (f_3, \Psi_1) & (f_3, \Psi_2) & f_3 \end{vmatrix}.$$

$$(f_1, \Psi_2) = (1, 2x) = \int_{-1}^1 2x dx = 0,$$

$$(f_2, \Psi_2) = (x, 2x) = \int_{-1}^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3},$$

$$(f_3, \Psi_1) = (x^2, 1) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

$$(f_3, \Psi_2) = (x^2, 2x) = \int_{-1}^1 2x^3 dx = \frac{2}{4}x^4 \Big|_{-1}^1 = 0.$$

$$\Psi_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{8}{9}(3x^2 - 1).$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\Psi_3, \Psi_3)} &= \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{64}{9} \left( x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx} = \sqrt{\frac{64}{9} * \left( \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{1}{9}x \right) \Big|_{-1}^1} = \\ &= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

$$\Phi_3 = \frac{\Psi_3}{\sqrt{(\Psi_3, \Psi_3)}}, \Phi_3 = \frac{8}{9}(3x^2 - 1) * \frac{9\sqrt{5}}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

$$\text{Итак, } \Phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

$$4) \Psi_4 = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & (f_1, \Psi_3) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & (f_2, \Psi_3) & f_2 \\ (f_3, \Psi_1) & (f_3, \Psi_2) & (f_3, \Psi_3) & f_3 \\ (f_4, \Psi_1) & (f_4, \Psi_2) & (f_4, \Psi_3) & f_4 \end{vmatrix}.$$

$$(f_1, \Psi_1) = 2, (f_1, \Psi_2) = 0,$$

$$(f_1, \Psi_3) = \left(1, \frac{8}{3} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \int_{-1}^1 \frac{8}{3} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{8}{9} (x^3 - x) \Big|_{-1}^1 = 0,$$

$$(f_2, \Psi_1) = 0, (f_2, \Psi_2) = \frac{4}{3},$$

$$(f_2, \Psi_3) = \left(x, \frac{8}{3} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \int_{-1}^1 \frac{8}{3} \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right) dx = 0,$$

$$(f_3, \Psi_1) = \frac{2}{3}, (f_3, \Psi_2) = 0, (f_3, \Psi_3) = \left(x^2, \frac{8}{3} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \frac{8}{3} (x^4 - \frac{1}{3}x^2) dx = \frac{8}{3} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{64}{135}, (f_4, \Psi_1) = (x^3, 1) = \\
&= \int_{-1}^1 x^3 dx = 0, (f_4, \Psi_2) = (x^3, 2x) = \int_{-1}^1 2x^4 dx = \frac{2}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5}, \\
&(f_4, \Psi_3) = (x^3, \frac{8}{3} (x^2 - \frac{1}{3})) = \int_{-1}^1 \frac{8}{3} (x^5 - \frac{1}{3}x^3) dx = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{64}{135} & x^2 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & x^3 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 & x \\ 0 & \frac{64}{135} & x^2 \\ \frac{4}{5} & 0 & x^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{64}{135} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 2 \left( \frac{256}{405} x^3 - \frac{256}{675} x \right) = \frac{512}{135} \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x \right) = \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x).
\end{aligned}$$

$$\sqrt{(\Psi_4, \Psi_4)} = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{512 * 512}{2025 * 2025} (25x^6 - 30x^4 + 9x^2) dx} = \frac{512}{2025} * 2 * \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

$$\Phi_4 = \frac{\Psi_4}{\sqrt{(\Psi_4, \Psi_4)}}.$$

$$\text{Итак, } \Phi_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x).$$

$$5) \Psi_5 = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & (f_1, \Psi_3) & (f_1, \Psi_4) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & (f_2, \Psi_3) & (f_2, \Psi_4) & f_2 \\ (f_3, \Psi_1) & (f_3, \Psi_2) & (f_3, \Psi_3) & (f_3, \Psi_4) & f_3 \\ (f_4, \Psi_1) & (f_4, \Psi_2) & (f_4, \Psi_3) & (f_4, \Psi_4) & f_4 \\ (f_5, \Psi_1) & (f_5, \Psi_2) & (f_5, \Psi_3) & (f_5, \Psi_4) & f_5 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&(f_1, \Psi_1) = 2, (f_1, \Psi_2) = 0, (f_1, \Psi_3) = 0, (f_1, \Psi_4) = (1, \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x)) = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x) dx = 0, (f_2, \Psi_1) = 0, (f_2, \Psi_2) = \frac{4}{3}, (f_2, \Psi_3) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(f_2, \Psi_4) = (x, \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x)) = \int_{-1}^1 \frac{512}{2025} (5x^4 - 3x^2) dx = \\
&= \frac{512}{2025} (x^5 - x^3) \Big|_{-1}^1 = 0, (f_3, \Psi_1) = \frac{2}{3}, (f_3, \Psi_2) = 0, (f_3, \Psi_3) = \frac{64}{135},
\end{aligned}$$

$$(f_3, \Psi_4) = (x^2, \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x)) = \int_{-1}^1 \frac{512}{2025} (5x^5 - 3x^3) dx = 0,$$

$$(f_4, \Psi_1) = 0, (f_4, \Psi_2) = \frac{4}{5}, (f_4, \Psi_3) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&(f_4, \Psi_4) = (x^3, \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x)) = \int_{-1}^1 \frac{512}{2025} (5x^6 - 3x^4) dx = \frac{512}{2025} \left( \frac{5}{7} x^7 - \right. \\
&\left. - \frac{3}{5} x^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4096}{70875}
\end{aligned}$$

$$(f_5, \Psi_1) = (x^4, 1) = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5},$$

$$(f_5, \Psi_2) = (x^4, 2x) = \int_{-1}^1 2x^5 dx = 0, (f_5, \Psi_3) = (x^4, \frac{8}{3} (x^2 - \frac{1}{3})) =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{8}{3} (x^6 - \frac{1}{3}x^4) dx = \frac{8}{3} (\frac{x^7}{7} - 15) \Big|_{-1}^1 = \frac{128}{315},$$

$$(f_5, \Psi_4) = (x^4, \frac{512}{2025} (5x^3 - 3x)) = 0.$$

$$\Psi_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & x \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{64}{135} & 0 & x^2 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{4096}{70875} & x^3 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{128}{315} & 0 & x^4 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель в системе Wolfram Mathematica 10:

$$\text{Det} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4/3 & 0 & 0 & x \\ 2/3 & 0 & 64/135 & 0 & x^2 \\ 0 & 4/5 & 0 & 4096/70875 & x^3 \\ 2/5 & 0 & 128/315 & 0 & x^4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\frac{2097152}{334884375} - \frac{4194304x^2}{66976875} + \frac{2097152x^4}{28704375}$$

$$\text{FullSimplify} \left[ \frac{2097152}{334884375} - \frac{4194304x^2}{66976875} + \frac{2097152x^4}{28704375} \right]$$

$$\frac{2097152(3 - 30x^2 + 35x^4)}{1004653125}$$

$$\sqrt{(\Psi_5, \Psi_5)} =$$

$$= \frac{2097152}{1004653125} \sqrt{\int_{-1}^1 (35x^8 + 30^2x^4 + 9 - 2100x^6 + 210x^4 - 180x^2) dx}.$$

С помощью математической программы получаем:

$$\int_{-1}^1 (35^2 * x^8 + 900 * x^4 + 9 - 2100 * x^6 + 210 * x^4 - 180 * x^2) dx$$

$$\frac{128}{9}$$

$$\sqrt{(\Psi_5, \Psi_5)} = \frac{2097152}{1004653125} \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{2^{24}\sqrt{2}}{3^9 * 5^5 * 7^2}.$$

$$\Phi_5 = \frac{\Psi_5}{\sqrt{(\Psi_5, \Psi_5)}}.$$

$$\text{Итак, } \Phi_5 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35x^4 - 30x^2 + 3).$$

И так далее. Получим ортонормированную систему функций:

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Phi_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \Phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1), \Phi_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x), \Phi_5 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

В соответствии со стилистикой предыдущего изложения материала начнём нумерацию с нуля, то есть ортонормированная система имеет вид:

$$\Phi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Phi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \Phi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1), \Phi_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x), \Phi_4 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35x^4 - 30x^2 + 3), \dots$$

Можно доказать, что если  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  - ортогональная система, полученная из системы функций  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ , то каждый из многочленов  $\varphi_n(x)$  совпадает с многочленом Лежандра

$$r_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \dots, r_0(x) = 1). \text{ При этом явное}$$

выражение для многочленов Лежандра имеет вид:

$$r_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k c_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

$$\text{Итак, } \varphi_0(x) = 1; \varphi_1(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x;$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \sum_{k=0}^1 (-1)^k c_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \frac{1}{8} (12x^2 - 4) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1);$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2^3 3!} \sum_{k=0}^1 (-1)^k c_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \frac{1}{48} (120x^3 - 72x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x);$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{2^4 4!} \sum_{k=0}^2 (-1)^k c_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \frac{1}{384} (1680x^4 - 1440x^2 + 144) =$$

$$= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$\dots; \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k c_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}; \dots - \text{ ортогональная система,}$$

полученная путем ортогонализации линейно независимой системы функций  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ .

Тогда полученная ранее ортонормированная система имеет вид:

$$\Phi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Phi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \Phi_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1), \Phi_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x),$$

$$\Phi_4(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35x^4 - 30x^2 + 3), \dots,$$

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} * \frac{1}{2^{n+n!}} * \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, \dots$$

3. Составим ряд Фурье данной непрерывной функции  $f(x)$  по системе  $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ . Он имеет вид:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(x)$ , где  $a_k = \frac{1}{\int_{-1}^1 \Phi_k^2(x) dx} \int_{-1}^1 f(x) \Phi_k(x) dx$ .

$$\text{Так как } \int_{-1}^1 \Phi_k^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} \cdot \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} \frac{2k+1}{2} dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} u = \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} \quad dv = \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} dx \\ du = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k dx \quad v = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 \left\{ \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k dx \right\} =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(x^2-1)^k dx \right\} =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}(x^2-1)^k \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(x^2-1)^k dx \right\} = \dots =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (-1)^k \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2-1)^k \right] (x^2-1)^k dx = \frac{2k+1}{2}.$$

$$\left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! (-1)^k (-1)^k \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx = (2k+1)/2 * \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! \int_{-1}^1 (1-x)^k (1+x)^k dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} u = (1-x)^k \quad dv = (1+x)^k dx \\ du = -k(1-x)^{k-1} dx \quad v = \frac{(1+x)^{k+1}}{k+1} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! \frac{k}{k+1} \int_{-1}^1 (1-x)^{k-1} (1+x)^{k+1} dx = \dots =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! \frac{k(k-1)\dots 1}{(k+1)(k+2)\dots 2k} \int_{-1}^1 (1+x)^{2k} dx =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 (2k)! \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{(1+x)^{2k+1}}{2k+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2k+1}{2 * 2^{2k}} \cdot \frac{2^{2k+1}}{2k+1} = 1,$$



$$\text{то } a_k = \int_{-1}^1 f(x)\Phi_k(x)dx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 f(x)\Phi_k(x)dx \right\} \Phi_k(x).$$

4. Итак,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \Phi_k(x) \int_{-1}^1 f(x)\Phi_k(x)dx$ , где

$$\Phi_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \frac{1}{2^k k!} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^i c_n^i \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!} x^{n-2i}, \quad f(x) - \text{данная непрерывная на отрезке } [-1;1] \text{ функция, } - \text{многочлен степени } n, \text{ дающий наилучшее приближение для } f(x) \text{ (в смысле метрики пространства } C_{[-1;1]}^2).$$

Далее полученные результаты можно использовать для построения многочленов наилучшего приближения конкретных непрерывных функций.

### Литература

1. Шерстнёва Н.А. Построение ортонормированной системы функций по данной линейно независимой системе функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 231-236.

2. Шерстнёва Н.А. Ортогонализация линейно независимой системы функций евклидова пространства // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 227-232.

**N.A. Sherstneva**

*Smolensk State University*

### METHOD OF BUILDING THE MULTIPLE OF THE BEST APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTION

**Keywords:** *approximation of a continuous function by a polynomial, orthogonalization, linearly independent system of functions.*

**Abstract.** *The theory of approximation of functions today is one of the intensively developed directions in science. It is possible to distinguish several types of problems that are relevant for this direction and differ from each other in the types of approximal functions; types of functions used for approximation and methods of constructing an approximating function. We shall dwell on the solution of the following problem: there is a system of elements that is linearly independent  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  in Euclidean space  $C_{[a;b]}^2$  and a function  $f(x)$  that is continuous on the  $[a, b]$ ; it is required to construct a generalized polynomial  $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$  of fixed degree  $n$ , which gives the best approximation for a given function (in the sense of the metric of space  $C_{[a;b]}^2$ ).*

## СЕКЦИЯ 4

### Новые информационные и педагогические технологии в образовании

Н.Н. Богданова

Смоленский государственный университет

УДК 519.283

#### О ВЫЧИСЛЕНИИ ОБЪЕМОВ

Ключевые слова: *объем тела, тело вращения, определенный интеграл, тройной интеграл.*

*В сообщении рассматриваются возможности применения системы Mathematica для решения ряда задач, связанных с вычислением объемов тел.*

Рассмотрим некоторое тело  $V$ , содержащееся между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  и сечения этого тела плоскостями, перпендикулярными оси  $OX$ . Пусть все сечения квадратуемы и площадь сечения  $P(x)$ , соответствующего абсциссе  $x$ , является непрерывной функцией от  $x$  (для  $a \leq x \leq b$ ). Допустим также, что любые два сечения при проектировании на плоскость, перпендикулярную к оси  $OX$ , оказываются всегда содержащимися одно в другом. Тогда тело  $V$  имеет объем, который выражается определенным интегралом  $\int_a^b P(x) dx$ .

*Пример 1.* Найти объем трехостного эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Плоскость, перпендикулярная к оси  $OX$  и проходящая через точку  $M(x;0;0)$ , пересечет эллипсоид по эллипсу. Построим эллипсоид с полуосями

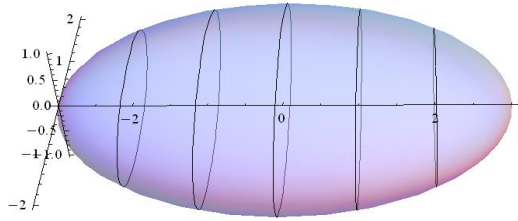
$$a = 3; b = 2; c = 1;$$

$$x[u, v] = a \cos[u] \cos[v]; \quad x[u, v] = a \cos[u] \cos[v];$$

$$y[u, v] = b \cos[u] \sin[v];$$

$$z[u, v] = c \sin[u];$$

ParametricPlot3D[{x[u, v], y[u, v], z[u, v]}, {u, -π/2, π/2}, {v, 0, 2π}, Boxed  
 → False, AxesOrigin → {-a, 0, 0}, PlotStyle → Opacity[0.5], MeshFunctions  
 → {#1&}, Mesh → 5]



Составим уравнение проекции этого эллипса на плоскость YOZ:

$$\frac{y^2}{b^2(1-x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1-x^2/a^2)} = 1 \quad (x = \text{const}).$$

Clear[a, b, c]

$$P[x_] = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2);$$

$$V = \int_{-a}^a P[x] dx$$

$$\frac{4}{3} abc\pi$$

Пример 2. Определить объем тела, полученного вращением ветви ЦИКЛОИДЫ  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) вокруг оси OX.

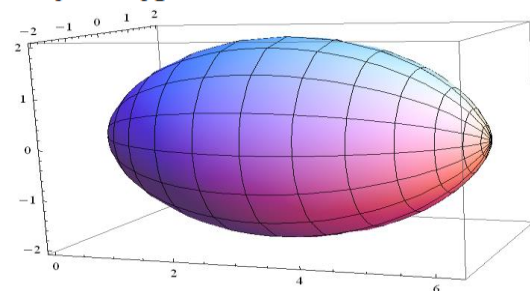
$$a = 1; \text{xc}[t_] = a(t - \text{Sin}[t]); \text{yc}[t_] = a(1 - \text{Cos}[t]);$$

RevolutionPlot3D[{xc[u], yc[u]}, {u, 0, 2π}, RevolutionAxis

→ {1, 0, 0}] RevolutionPlot3D[{xc[u], yc[u]}, {u, 0, 2π}, RevolutionAxis

→ {1, 0, 0}] RevolutionPlot3D[{xc[u], yc[u]}, {u, 0, 2π}, RevolutionAxis

→ {1, 0, 0}]



$$a = .; \text{x}[t_] = a(t - \text{Sin}[t]); a = .; \text{x}[t_] = a(t - \text{Sin}[t]);$$

$$\text{y}[t_] = a(1 - \text{Cos}[t]); \text{y}[t_] = a(1 - \text{Cos}[t]);$$

$$V = \pi \text{Integrate}[\text{y}[t]^2 D[\text{x}[t], t], \{t, 0, 2\pi\}]$$

$$a^3 \pi^2$$

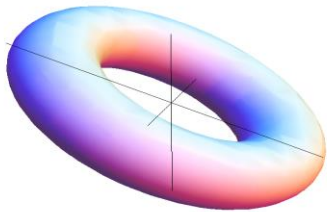
Пример 3. Найти объем тора

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(y^2 + z^2) = 0.$$

Изобразим тор, положив для определенности  $R = 3; r = 1$ .

$R = 3; r = 1;$

```
RegionPlot3D[(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(y^2 + z^2)
  ≤ 0, {x, -r, r}, {y, -(R + r), R + r}, {z, -(R + r), R
  + r}, BoxRatios → {2r, 2(R + r), 2(R + r)}, Mesh
  → None, Boxed → False, AxesOrigin → {0,0,0}, Ticks → None]
```



Объем тора вычислим как разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси ОХ верхней и нижней полуокружностей  $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ , представляющих сечение тора плоскостью ХОУ.

`Clear[R, r]`

```
V = π Integrate[(R + √(r^2 - x^2))^2
  - (R - √(r^2 - x^2))^2, {x, -r, r}, Assumptions → R > r > 0] V
= π Integrate[(R + √(r^2 - x^2))^2
  - (R - √(r^2 - x^2))^2, {x, -r, r}, Assumptions → R > r > 0]
```

$2\pi^2 r^2 R$

*Пример 4.* Вычислить объем 3D области, ограниченной полусферой единичного радиуса.

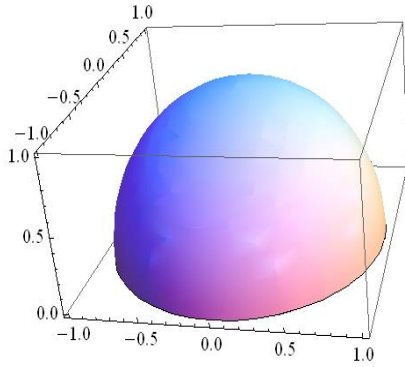
Для нахождения объема тела используется тройной интеграл.

```
Integrate[Boole[0 ≤ z ≤ 1 && x^2 + y^2 + z^2
  ≤ 1], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, -∞, ∞}]
```

$\frac{2\pi}{3}$

Изобразим полушар.

```
RegionPlot3D[0 ≤ z ≤ 1 && x^2 + y^2 + z^2
  ≤ 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1}, Mesh → None, BoxRatios
  → {1, 1, 0.5}]
```



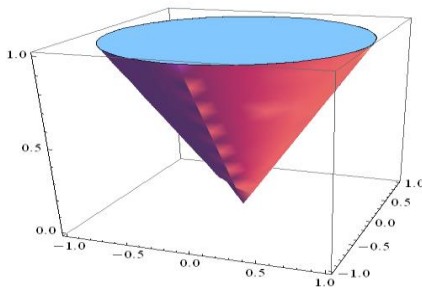
*Пример 5.* Вычислить объем конуса.

`Integrate[(x2 + y2)Boole[0 ≤ z ≤ 1&& x2 + y2 ≤ z2], {x, -∞, ∞}, {y, -∞, ∞}, {z, -∞, ∞}]`

$$\frac{\pi}{10}$$

Изобразим конус.

`RegionPlot3D[0 ≤ z ≤ 1&& x2 + y2 ≤ z2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, 0, 1}, Mesh → None]`



*Пример 6.* Вычислить объем 5-мерного шара радиуса R.

$n = 5$ ; (\*размерность пространства\*)

`Integrate[Boole[Sum[x[i]2, {i, n}] < R2], Apply[Sequence, Table[{x[i], -∞, ∞}, {i, n}]], Assumptions → R > 0]`

$$\frac{8\pi^2 R^5}{15}$$

*Пример 7.* Вычислить объем тетраэдра, заданного координатами своих вершин A<sub>1</sub>(12;-7;4), A<sub>2</sub>(5;4;-3), A<sub>3</sub>(-6;3;1), A<sub>4</sub>(3;9;5).

(\*Введём координаты вершин тетраэдра\*)

`A1 = {12, -7, 4}; A2 = {5, 4, -3}; A3 = {-6, 3, 1}; A4 = {3, 9, 5};`

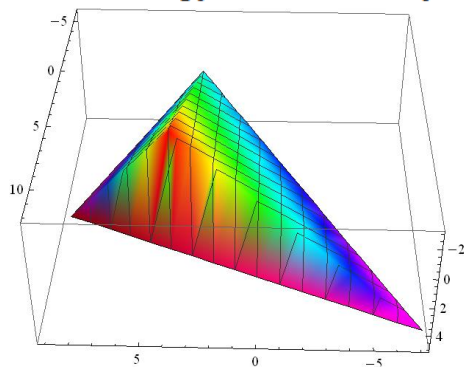
`R = Tetrahedron[{A1, A2, A3, A4}]; V = RegionMeasure[R]`

$$1475$$

6

Изобразим тетраэдр.

ListPlot3D[{A1, A2, A3, A4}, ColorFunction → Hue]



### Литература

1. Корбунов А.И., Дорогобед А.Н. Практическое руководство по изучению пакета Wolfram Mathematica (на примере решения некорректных задач). Ухта: УГТУ, 2015.

**N.N. Bogdanova**  
Smolensk state University

### ABOUT CALCULATION OF VOLUMES

**Keywords:** *solid volume, rotation solid, certain integral, triple integral.*

**Abstract.** *In the report the possibilities of application of the Mathematica system for the solution of a number of the tasks connected with calculation of volumes of solids are considered.*

**Д.А. Бояринов**  
Смоленский государственный университет

УДК 37.01:004

### ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В КОНТЕКСТЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВОСПИТАНИЯ

**Ключевые слова:** *непрерывное воспитание, гражданско-патриотическое воспитание, социальные медиа, электронное портфолио.*

*В статье рассматривается проблема обеспечения непрерывности процесса воспитания на примере гражданско-патриотического воспитания. В качестве ведущего инструмента обеспечения непрерывности предлагается единая система информационного обмена. Рассматривается система принципов – основа теоретической модели единой системы информационного обмена. Анализируется*

*специфика социальных медиа в контексте гражданско-патриотического воспитания. В качестве ведущей педагогической технологии в данном контексте выступает технология электронного портфолио, описываются её соответствующие особенности.*

Проблема воспитания весьма актуальна для современной отечественной педагогики. Одним из существенных аспектов данной проблемы является положение о необходимости непрерывного воздействия среды воспитания на субъекта.

Особую значимость в последнее время приобретают вопросы гражданско-патриотического воспитания. В настоящее время распространенным и эффективным средством гражданско-патриотического воспитания являются профильные лагеря для детей и юношества [2]. Однако им присуща специфическая черта, создающая существенные препятствия для обеспечения непрерывности воспитательного воздействия, – сезонный, периодический характер. По сути дела, имеет место дискретное воздействие в противоположность непрерывному. Естественно ставить вопрос о поиске инструментов преодоления отмеченного противоречия. Опыт, полученный нами в процессе педагогического проектирования информационного образовательного пространства [1], позволяет выдвинуть положение о ведущей роли современных информационно-коммуникационных технологий как инструмента обеспечения непрерывности воспитательного воздействия, то есть как основы проектирования непрерывной воспитательной системы.

После принятия положения о ведущей роли современных информационно-коммуникационных технологий в создании системы непрерывного воспитания встает вопрос о возможных формах применения этих технологий в рассматриваемом контексте. Мы полагаем, что качественное изменение содержания и методов гражданско-патриотического воспитания с акцентом на обеспечении непрерывности процесса и погружения субъекта в среду патриотического воспитания возможно за счет существенного повышения масштаба и эффективности использования ресурсов неформального и информального образования в целях гражданско-патриотического воспитания.

В качестве основы, обеспечивающей непрерывность процесса гражданско-патриотического воспитания, мы предлагаем рассматривать методы информатики. Ведущим инструментом обеспечения непрерывности является единая система информационного обмена. Новые информационные технологии позволят обеспечить равенство вовлеченности в процесс гражданско-патриотического воспитания, его непрерывность и возможность постоянного мониторинга его хода. В

рамках такого подхода единая система информационного обмена служит элементом инфраструктуры неформального образования и социализации для формирования у обучающихся социальных компетенций, гражданско-патриотических установок, культуры здорового образа жизни, функциональной грамотности.

Единая система информационного обмена это совокупность инструментов, обеспечивающих взаимодействие между основными субъектами системы гражданско-патриотического воспитания, доступ к информации о параметрах системы. Под доступом к информации мы понимаем возможность ее получения, сбора, размещения, хранения и обработки, ограниченную соответствующими политиками прав доступа.

В основу теоретической модели единой системы информационного обмена мы предлагаем положить систему следующих принципов:

- принцип системности;
- принцип комплексности;
- принцип непрерывности;
- принцип индивидуальности;
- принцип личностной ориентированности;
- принцип гуманистичности.

Заметим, что предлагаемые подходы позволяют не только обеспечить непрерывность процесса гражданско-патриотического воспитания, но и расширить число субъектов этого процесса. Одна из форм интеграции в социум детей, имеющих ограниченные возможности, подразумевает организацию дистанционных форм взаимодействия обучения для таких субъектов. При некоторых видах ограничений (в первую очередь, связанных с опорно-двигательным аппаратом и нарушениями слуха) дистанционное обучение на основе новых информационно-коммуникационных технологий становится доминирующей формой обучения и интеграции в социум. Аналогично появляется возможность дистанционного вовлечения обучающихся в систему гражданско-патриотического воспитания. В рамках единой системы информационного обмена, реализованной на основе новых информационно-коммуникационных технологий, будет обеспечена эффективная дистанционная компьютерная поддержка гражданско-патриотического воспитания детей с ограниченными возможностями.

Мы полагаем, что существенную роль в рамках рассматриваемой системы непрерывного гражданско-патриотического воспитания должны играть социальные медиа. Д. Бойд и Н. Эллисон (D. Boyd, N. Ellison) [3] в своем исследовании отметили особую черту социальных сетей, состоящую в том, что они позволяют своим субъектам визуализировать и делать предметом рефлексии системы своих социальных взаимодействий. Соответственно, социальные медиа могут выступать и как инструмент развития и модерации социальных



взаимодействий, и как инструмент конструирования новых взаимодействий. Социальные медиа предоставляют субъектам системы непрерывного воспитания информационную площадку для реализации определённых видов социальной активности, взаимодействия с референтными социальными группами, самоактуализации. Если рассматривать вопрос с педагогической точки зрения, то при этом создаются условия для реализации как модели неформального, так и модели информального образования [1].

Применительно к специфике процесса гражданско-патриотического воспитания необходимы определенные изменения акцентов в соответствующих социальных медиа. В результате анализа дидактических возможностей отдельных структурных компонентов социального программного обеспечения можно сделать вывод, что основными должны быть такие компоненты, как «группы», «блог» и «моя страница».

Эффективность групп как инструмента поддержки гражданско-патриотического воспитания обусловлена следующими факторами:

- дискуссионные группы являются оптимальными средствами организации взаимодействия субъектов пространства воспитания;
- группы позволяют осуществлять мониторинг личностной направленности и интересов субъекта пространства воспитания.

Эффективность блогов в контексте гражданско-патриотического воспитания обусловлена следующими факторами:

- блоги представляют собой наиболее удобный формат для публикации субъектами пространства воспитания практических результатов своей деятельности;
- блоги дают возможность оценивать как собственно течение практической деятельности субъекта пространства, так и интенсивность и динамику социального взаимодействия и общения;
- комментарии в блоге представляют собой естественный и удобный инструмент обратной связи, что упрощает как организацию социального взаимодействия, так и контроль за ходом процесса;
- доступ к блогам других субъектов пространства воспитания может быть организован максимально удобным образом;
- блоги также представляют собой эффективный инструмент индивидуализации пространства воспитания.

Связь между компонентами «группы» и «блоги» должна обеспечиваться посредством инструмента «моя страница».

После выбора социальных медиа в качестве основной среды информатизации гражданско-патриотического воспитания возникает проблема определения ведущей педагогической технологии для реализации в рамках этой среды. Мы полагаем, что в качестве такой технологии необходимо использовать электронное портфолио.

Под электронным портфолио мы понимаем, в соответствии с определением Ш. Гао, Дж. Колдвелл-Нельсона и А. Госинского (S. Gao, J. Coldwell-Neilson, A. Goscinski), «целенаправленно созданное объединение цифровых элементов – идей, доказательств, рефлексий, обратной связи и т.д., которое предоставляет избранной аудитории доказательства обучения и/или способностей субъекта процесса обучения» [4].

Мы полагаем, что электронное портфолио в рамках системы непрерывного гражданско-патриотического воспитания должно выступать в следующих ролях:

- инструмент формирования позитивной мотивации субъекта системы;
- инструмент демонстрации субъектом результатов практической деятельности в рамках системы;
- инструмент контроля за течением процесса гражданско-патриотического воспитания в рамках системы.

Необходимые требования к среде воспитания, в рамках которой должны быть созданы условия для реализации технологии электронного портфолио, выглядят следующим образом [1]:

- наличие программного инструментария для разработки электронного портфолио;
- наличие информационной среды для обмена информацией между авторами портфолио (при использовании групповых форм работы);
- наличие инструментов для планирования совместных действий, обсуждения и обратной связи;
- наличие информационной среды для публикации портфолио;
- наличие инструментов, обеспечивающих хранение электронных документов, созданных в ходе работы над портфолио;
- наличие возможностей обмена информацией с другими информационными системами, в которых расположены данные, имеющие значение для субъекта среды воспитания.

Все отмеченные требования должны быть реализованы в рамках единой системы информационного обмена и соответствующих социальных медиа. Отметим, что наличие единой информационной среды, необходимой для реализации технологии электронного портфолио, способствует интенсивному обмену жизненным опытом среди субъектов системы воспитания. Ещё один положительный эффект от наличия такой среды – создание условий для построения информационной картографической системы, содержащей информацию о географической привязке акторов и субъектов воспитательного процесса [5, 6].

Наряду с информационно-технологическими аспектами, функционирование системы непрерывного гражданско-патриотического

воспитания должно обеспечиваться наличием точек роста, основанных на социальном взаимодействии специально подготовленных и мотивированных социальных акторов. Их подготовка требует выработки соответствующих форм и методов. Как показывает опыт, наиболее эффективным является проведение региональных сборов патриотической молодежи [2]. При этом учащиеся, преподаватели, комиссары и родители в процессе сборов будут находиться в условиях как неформального обучения, так и информального. После завершения сборов выстроенное социальное взаимодействие участников продолжится в рамках специально спроектированных социальных медиа. Процедуры непрерывного мониторинга осуществляются в рамках системы информационного обмена. Это, в свою очередь, позволяет контролировать процесс гражданско-патриотического воспитания в режиме непрерывного времени и при необходимости корректировать его ход.

Таким образом, мы предлагаем модель, обеспечивающую включение в единое воспитательное пространство современной инфраструктуры непрерывного гражданско-патриотического воспитания, обеспечивающего погружение субъекта в среду гражданско-патриотического воспитания за счет сочетания сезонных школ патриотической молодежи (с присущей им дискретностью, периодичностью воздействия на субъекта) и специально спроектированных социальных медиа (обеспечивающих непрерывность процесса). Развитие предлагаемой модели позволяет создать систему непрерывного педагогического мониторинга процесса гражданско-патриотического воспитания, базирующуюся на получении своевременной и содержательной информации для принятия управленческих решений на основе анализа информационного контента социальных медиа.

### Литература

1. Бояринов Д.А. Адаптивное сетевое образовательное пространство: модели, технологии, принципы построения: монография. Смоленск: СмолГУ, 2018. 200 с.
2. Сенченков Н.П. Личностно ориентированное воспитание старшеклассников в условиях профильного лагеря // Проблемы современного образования. 2018. №3. С.125-132.
3. Boyd D., & Ellison N. Social network sites: Definition, history and scholarship // Journal of Computer-Mediated Communication. 2007. No. 13(1). P. 210-230.
4. Gao Shang, Coldwell-Neilson. Jo and Goscinski, Andrzej Managing learning evidence using portfolio // Creative Education. 2014. – Vol. 5, No. 17. P. 1585-1590.
5. Miller R. Educational Alternatives: A Map of the Territory // Paths of Learning. # 20 (Spring, 2004). – The Foundation for Educational Renewal. Brandon, VT, 2004. 10 p.
6. Schwendimann B.A. Making Sense of Knowledge Integration Maps // Digital Knowledge Maps in Education. Technology-Enhanced Support for Teachers and Learners, Editors: Ifenthaler, Dirk, Hanewald, Ria, Springer-Verlag New York, 2014. P. 17-40.

**D.A. Boyrinov**  
Smolensk State University

## **INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN THE CONTEXT OF CONTINUOUS EDUCATION**

**Keywords:** *continuous education, civil-patriotic education, social media, electronic portfolio.*

**Abstract.** *The article deals with the problem of ensuring the continuity of the process of education on the material of civil-patriotic education. A unified information exchange system is proposed as a leading tool for ensuring continuity. The system of principles is considered as the basis of the theoretical model of a unified system of information exchange. The specificity of social media is analyzed in the context of civil-patriotic education. An electronic portfolio technology is proposed as a leading educational technology in this context. The relevant features of electronic portfolio technology are considered.*

**Р.С. Горщар, В.Н. Таран,**  
*Гуманитарно-педагогическая академия (филиал) Крымского  
федерального университета им. В.И. Вернадского в г. Ялте*

УДК 004.9

## **АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ДЛЯ СРЕДСТВ АНАЛИТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Ключевые слова:** *дистанционное образование; анализ результатов обучения; алгоритмические методы; тестирование; информационно-коммуникационные технологии.*

*В статье рассмотрена одна из наиболее популярных систем дистанционного обучения Moodle 3+, которая находится в свободном доступе и в которой имеется возможность экспортировать данные о прохождении различных тестов обучающимися для осуществления их анализа. Рассмотрены алгоритмические подходы для средств*

*аналитики, ключевым фактором в которых является время, потраченное студентом на прохождение теста, а также выполнена сортировка данных по возрастанию затраченного времени и построены соответствующие графики. Определена степень отклонения от среднего времени прохождения теста студентом*

**Постановка задачи.** Модернизация и стремительное развитие высшего образования в России в последнее время вызвали к жизни два значимых тренда: возникновение и глубокое внедрение в учебные процессы электронно-библиотечных систем и широкое использование информационных ресурсов дистанционного обучения [1], что становится одной из неотъемлемых частей функционирования учебного заведения. Качественное образование возможно только в условиях новой образовательной среды, ориентированной на применение информационных и коммуникационных технологий [2].

Информационно-коммуникационные технологии значительно повышают уровень и качество обучающего процесса и способствуют ускорению освоения навыков в той или иной сфере [3]. На современном этапе развития цифрового общества в Российской Федерации можно с уверенностью сказать, что обойтись без использования информационных технологий не может ни одна организация [4]. Информационные технологии развиваются настолько быстро в современном мире, что отставание на один шаг грозит отбросить как пользователя, так и специалиста назад, вызвать отставание на целую эпоху освоения новых знаний, возможностей, средств и программно-технических реализаций [5].

**Методы анализа результатов обучения.** Одной из наиболее популярных систем дистанционного обучения, которые находятся в свободном доступе является Moodle 3+. В данной системе имеется возможность экспортировать данные о прохождении различных тестов обучающимися, что делает возможным осуществление их анализа.

Система дистанционного обучения Крымского федерального университета также разрабатывается с помощью Moodle3. Эта система предоставляет библиотеку шаблонов внешних видов будущего образовательного ресурса, с возможностью настроить расположение кнопок, язык, прочие параметры интерфейса. Система позволяет создавать разделы по институтам, кафедрам и курсам, что очень удобно для поиска необходимой информации [6].

Рассмотрим алгоритмические подходы для средств аналитики, ключевым фактором в которых является время, потраченное студентом на прохождение теста. Можно выделить следующие подходы:

1. Среднее время прохождения теста. Определяется путем деления суммарного количества затраченного времени на количество результатов.

2. Выделение критических точек по времени прохождения теста.

2.1. Минимальное затраченное время.

2.2. Максимальное затраченное время.

2.3. Наиболее частый диапазон времени. Учитывается максимум три результата в одном диапазоне. Выбирается тот диапазон, в котором разница во времени прохождения теста между тремя результатами минимальная. Минимальное количество результатов для вычисления диапазона равняется десяти.

3. Построение графика зависимости результатов тестирования от затраченного времени. Необходимо использовать критические точки минимума и максимума времени прохождения теста как начало и конец всего диапазона времени, а критические точки минимума и максимума результатов тестирования как начало и конец всего диапазона оценок. К примеру, возьмем набор данных, включающий в себя 10 результатов тестирования по русскому языку и культуре речи, как это показано в таблице 1.

Таблица 1

Результаты тестирования

Время	13 мин. 20 с	15 мин. 40 с	21 мин. 12 с	21 мин. 51 с	24 мин. 35 с	30 мин. 01 с	31 мин. 40 с	32 мин. 00 с	33 мин. 23 с	35 мин. 20 с
Баллы	18	24	20,67	30,89	32	24	23	28	27	20

Важно выполнить сортировку данных по возрастанию затраченного времени. После этого становится возможным построение графика, как показано на рисунке 1.

4. Определение оптимального диапазона времени на прохождение тестирования. Для использования данного подхода необходимым является вычисление среднего балла по всем результатам тестирования. Целесообразно использование графика зависимости результатов тестирования от затраченного времени для определения точек экстремума, отображения уровня среднего балла и нахождения точек пересечения графиков (рис. 2).

Линия, которая указывает на среднюю оценку, находится на уровне 24,8 балла. Она отсекает два диапазона времени: от 21 мин. 30 с до 30 мин. и от 32 мин. до 33 мин. 40 с. Далее необходимо определить диапазон времени, который включает в себя максимальное значение баллов за прохождение теста. Таким образом, диапазон времени от 21 мин. 30 с до 30 мин. является наиболее благоприятным для получения хороших баллов за прохождение теста.

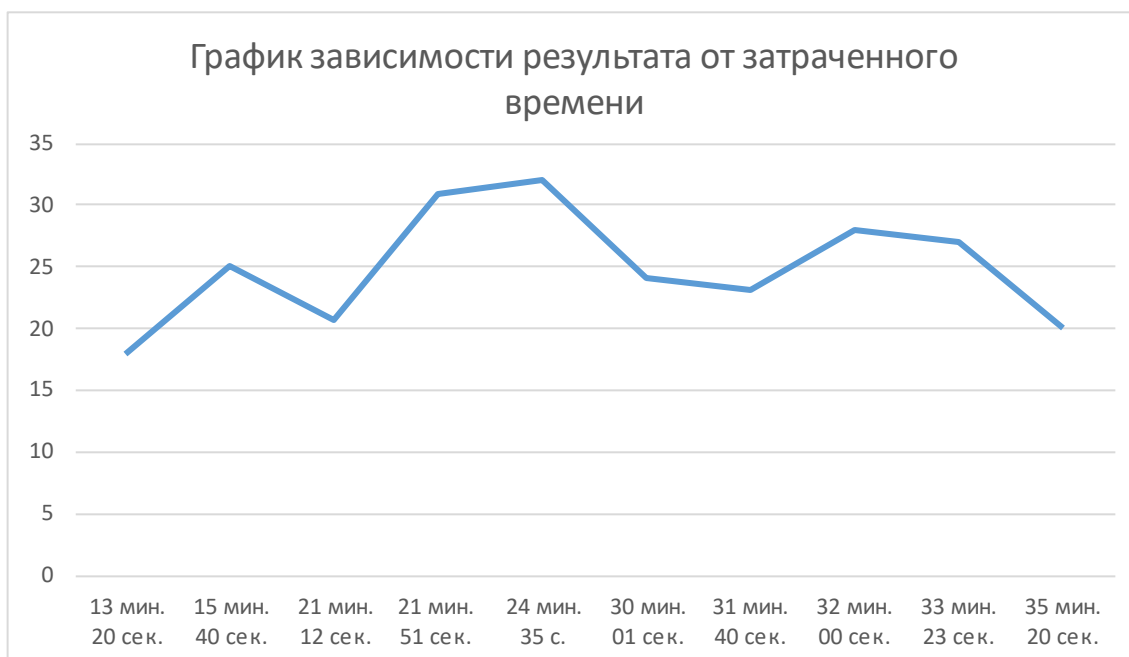


Рис. 1. График зависимости результата от затраченного времени

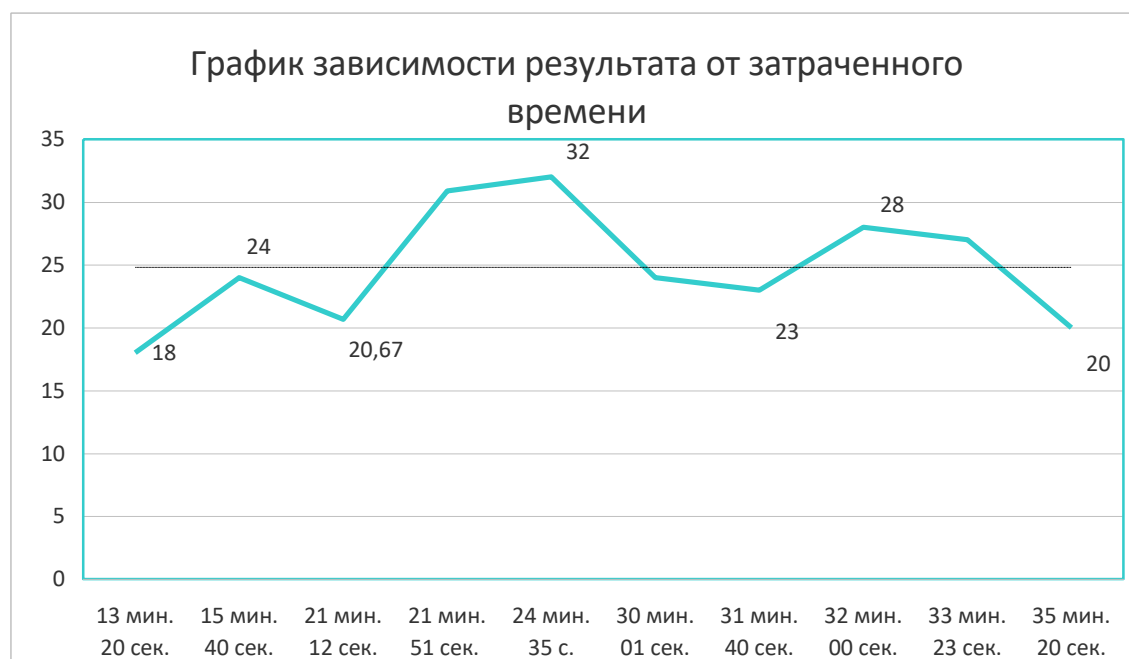


Рис. 2. График зависимости результата от затраченного времени с точками экстремума и уровнем среднего балла

5. Определение степени отклонения от среднего времени прохождения теста студентом. Для реализации данного подхода необходимо использование критических точек времени прохождения теста как начала и конца диапазона времени. Нужно вычислить разницу между максимальным и минимальным временем и разделить на 6. Это

связано с тем, что отклонение от среднего времени прохождения теста находится примерно посередине диапазона времени. Так как градация степени отклонения включает в себя три значения (низкое, среднее, высокое), имеет смысл определение ее как по одну, так и по вторую сторону от среднего значения. Таким образом, используя данные, которые были приведены в таблице 1, имеем среднее значение по времени 25 мин. 54 с. К примеру, выберем данные студента, который выполнил тест за 15 мин. 40 сек. Так как его время меньше, чем среднее, определим нижний диапазон градации. Для начала вычислим шестую часть от основного диапазона времени, которая равняется 4 мин. 19 с. Диапазон нижней градации отображен в таблице 2.

Таблица 2

Степень отклонения	Диапазон времени	
	От	До
Низкое отклонение	25:54	21:35
Среднее отклонение	21:35	17:16
Высокое отклонение	17:16	12:57

Данный студент по результатам тестирования имеет высокую степень отклонения, так как попадает в нижний диапазон градации от 17 : 16 до 12 : 57.

Таким образом, применение данных алгоритмических подходов для средств аналитики результатов тестирования систем дистанционного обучения поможет определить, какие параметры времени лучше всего выбрать для теста, какие студенты спешат побыстрее закончить тестирование, а какие больше вдумываются в содержание вопроса и как это влияет на их результаты. Это позволит сделать процесс тестирования более сбалансированным и объективным, а также учитывать реальные возможности студентов.

### Литература

1. Осыка В.Е., Горщар Р.С., Таран В.Н. ЭБС И LMS как единое целое дистанционного образования // Дистанционные образовательные технологии: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. 2018. С. 116-120.
2. Таран В.Н. Применение дополненной реальности в обучении // Проблемы современного педагогического образования. 2018. № 60-2. С. 333-337.
3. Таран В.Н., Туманов Е.В. Информационно-коммуникационные технологии в образовательном процессе вуза // Дистанционные образовательные технологии: материалы III Всероссийской научно-практической конференции / отв. ред. В.Н. Таран. 2018. С. 176-179.
4. Таран В.Н. Критерии качества профессиональной подготовки высококвалифицированных кадров в IT-сфере // Планирование и обеспечение подготовки кадров для промышленно-экономического комплекса региона. 2018. Т. 1. С. 49-53.
5. Таран В.Н. Анализ компетенций профессорско-преподавательского состава при подготовке IT-специалистов // Современные информационные технологии и ИТ-образование: международный научный журнал. 2016. Т. 12, №4. С. 20-24.



6. Таран В.Н., Остапович М.В., Щербина Б.С. Анализ наиболее популярных электронных образовательных ресурсов // Дистанционные образовательные технологии: Материалы II Всероссийской научно-практической интернет-конференции. 2017. С. 298-306.

**R.S. Gorschar, V.N. Taran**

*Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V.I. Vernadsky  
Crimean Federal University in Yalta*

## **ALGORITHMIC APPROACHES FOR MEANS OF ANALYTICS OF TESTING RESULTS OF DISTANCE LEARNING SYSTEMS**

**Keywords:** *distance education; analysis of learning outcomes; algorithmic methods; testing; information and communication technology.*

**Annotation.** *The article describes one of the most popular distance learning systems Moodle 3+, which are freely available. It is possible to export data on the passage of various tests by students for the implementation of their analysis. Algorithmic approaches for analytics tools are considered, the key factor in which is the time that the student spent on passing the test. The data were sorted by ascending time and the corresponding graphs were plotted. Determined the degree of deviation from the average time of the test by a student*

**А.В. Дюндин**

*Смоленский государственный университет*

УДК 374.31

## **ОРГАНИЗАЦИЯ ДИСТАНЦИОННОЙ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ**

Ключевые слова: *дистанционное обучение, ЕГЭ, организация обучения физике.*

*В работе рассматриваются вопросы организации дистанционной подготовки к ЕГЭ по физике на базе центра подготовки при вузе. Описаны структура центра, необходимый набор сервисов, условия организации эффективного функционирования.*

Согласно Закону Российской Федерации «Об образовании» [8], освоение образовательных программ среднего (полного) общего образования завершается обязательной итоговой аттестацией выпускников общеобразовательных учреждений независимо от формы получения образования.

С 2009 года на основании [3] единственной формой проведения ГИА практически для всех учащихся 11-х классов является ЕГЭ. То, какие результаты будут получены выпускниками на экзаменах, во многом зависит от их предварительной подготовки, которая осуществляется как в школе, так и за ее пределами. Более подробно процедура аттестации раскрыта в [2].

Среди предметов по выбору наибольшей популярностью (по итогам 2018 года) у абитуриентов пользуются обществознание и физика, которые сдавали 62% и 29% от общего количества выпускников [6]. Более подробно мы остановимся на процессе подготовки к ЕГЭ по физике.

В процессе организации подготовки к ЕГЭ по физике в школе встает целый ряд проблем совершенно разного характера: сложности с составлением расписания, так как часто на занятия записываются ученики из разных классов одной параллели; нехватка учебных кабинетов при наличии второй смены; отсутствие учителей необходимой квалификации; санитарные требования по ограничению количества уроков в день и др.

Так как экзамен по физике не является обязательным, часть школ не организует подготовку к нему, и заинтересованные ученики обращаются в различные центры, которые занимаются подготовкой к ЕГЭ или олимпиадам различного уровня. Все эти центры можно разделить на несколько групп.

1. Традиционные сложившиеся центры подготовки, например, всем известная школа Физтеха – ЗФТШ.
2. Узкопрофильные дистанционные школы («Фоксфорд» и др.)
3. Дистанционные центры крупных образовательных ресурсов (МастерВУЗ, Яндекс ЕГЭ и др.).
4. Центры подготовки к ЕГЭ при вузах.
5. Репетиторские центры.

Первые два пункта – вариации традиционных школ, вторая из которых является развитием первой. Основное их преимущество – многолетняя практика и отработанные методические материалы, а недостаток – узкая ориентированность на отдельные олимпиады. ЗФТШ до сих пор функционирует на основе пересылаемых почтой материалов, а «Фоксфорд» организует индивидуальные занятия с репетиторами, то есть в некоторых аспектах может быть отнесен и к пятой из выделенных нами групп.

К недостаткам третьего пункта мы отнесем необходимость самостоятельной организации работы абитуриента, на что способны не все выпускники современной школы.

В центрах, отнесенных к пятой группе, занятия ведут несколько опытных преподавателей, но большая часть занятий закреплена за их

менее опытными коллегами, и в результате не все ученики получают достаточно внимания для качественного обучения.

Центры подготовки при вузах также не лишены недостатков, одним из которых является некоторая «оторванность» их преподавателей от содержания школьного курса предметов и, как следствие, частые выходы за пределы школьной программы. Абитуриенты, посещающие курсы подготовки при вузе более мотивированы, имеют четкие цели и запросы.

На основе даже данного поверхностного анализа можно сделать вывод об отсутствии идеального центра, способного удовлетворить запросы широкой группы выпускников, однако мы склоняемся к выбору центров подготовки при вузах. Эти центры работают по проверенным авторским программам, часть преподавателей являются экспертами по проверке ЕГЭ, квалификация лекторов обычно выше средней по региону, но при всем этом они часто менее популярны.

В завершение анализа отметим, что крайне редко центры подготовки предлагают услуги из следующего перечня:

- расширенная диагностика знаний и умений с целью оптимизации процесса обучения;
- создание индивидуальной траектории изучения материала;
- тематические промежуточные тестирования;
- итоговые рекомендации по оптимизации процесса повторения;
- психологические тренинги.

В настоящее время работа всех без исключения центров подготовки так или иначе связана с работой с сетевыми ресурсами, от отдельных страниц до автоматизированных систем тестирования, от видеолекций до узкопрофильных чатов.

Многие авторы рекомендуют в качестве основы для организации работы по подготовке по той или иной дисциплине учебную платформу Moodle, в рамках специфики нашей работы основные положения по организации подготовки к ЕГЭ можно взять из [7; 10] Методологической основой организации работы по дистанционному обучению по-прежнему остаются работы Е.С. Полат, например [5].

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что дистанционное обучение физике и подготовка учащихся к ЕГЭ по данному предмету должна базироваться на ресурсах вуза, причем под ресурсами мы понимаем в первую очередь кадры, и только во вторую – материально-техническое обеспечение. Организация дистанционного обучения регламентируется положениями, приведенными в [4].

При разработке основных элементов, необходимых для эффективного центра дистанционной подготовки, мы опирались на работы Н.А. Максимовой, например, [1] в которых подробно изложены

требования к основным элементам образовательных порталов, к которым мы отнесем и рассматриваемую нами структуру.

Работу центра целесообразно организовать на основе сочетания традиционных форм занятий и широкого применения сетевых ресурсов, разработанных преподавателями курсов или под их руководством. Данный центр может стать еще и серьезным подспорьем для внедрения и апробации учебных ресурсов, разрабатываемых студентами старших курсов вуза (особенно при наличии педагогических направлений подготовки).

За основу структуры учебного материала центра по подготовке к ЕГЭ по физике мы предлагаем взять структуру уроков по Р.Г. Хазанкину [9]:

- урок-лекция;
- урок решения ключевых задач;
- урок-консультация;
- урок-зачет.

В качестве дополнений к материалу обычных занятий учащиеся получают возможность ознакомиться с записями лекций, которые можно снимать во время занятий; просматривать решения задач преподавателем (записанные как с доски, так и с графического планшета); консультироваться с преподавателем удаленно и даже сдавать промежуточную аттестацию в тестовой форме. Отметим, что размещение и реализация работы с указанными выше материалами, а также контроль доступа к ним прекрасно организуются на основе платформы Moodle.

Для организации работы центра по дистанционной подготовке к ЕГЭ необходимо следующее:

- группа преподавателей физики, желательно с опытом работы в школе и навыками создания электронных ресурсов;
- развернутая на сетевых ресурсах ВУЗа учебная платформа Moodle;
- инициативная группа студентов для организации непрерывной консультативной поддержки работы курсов и их сетевой рекламы;
- группа технической поддержки, которая занимается записью, редактированием и размещением электронных ресурсов;
- юрист;
- администратор или координатор.

Стоит отметить, что в первоначальном варианте имеет смысл запускать данный проект как учебный, в том числе и ориентированный на развитие студентов вуза.

Отдельно обратим внимание на юридический аспект использования сторонних ресурсов в работе центра дистанционной подготовки, так как

свободное их использование невозможно без разрешения правообладателя. Именно по этой причине мы пока не рассматриваем возможность реализации виртуального лабораторного практикума в работе центра, а также обсуждаем варианты окончательной его структуры. Данные вопросы планируем рассматривать в следующих публикациях.

### Литература

1. Максимова Н.А. Проблемы проектирования региональных образовательных порталов // *Фундаментальные исследования. Педагогические науки*. 2014. № 9. С. 1343-1346.
2. Организация подготовки к государственной (итоговой) аттестации в форме ЕГЭ всех участников образовательного процесса. URL: <https://открытыйурок.рф/статьи/565554/> (дата обращения: 14.03.2019).
3. Приказ Министерства образования и науки РФ от 28.11 2008 г. № 362 «Положения о формах и порядке проведения ГИА обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы среднего (полного) общего образования» URL: <https://normativ.kontur.ru/document?moduleId=1&documentId=133561> (дата обращения: 14.03.2019).
4. Приказ Министерства образования и науки от 9 января 2014 г. N 2 Об утверждении Порядка применения организациями, осуществляющими образовательную деятельность, электронного обучения, дистанционных образовательных технологий при реализации образовательных программ. URL: <https://www.vedu.ru/article/id/order-on-use-distance-educational-technologies-2014/> (дата обращения: 14.03.2019).
5. Полат Е.С. Дистанционное обучение // *Педагогические и информационные технологии в образовании*. 2001. № 4. URL: <http://journals.susu.ru/pit-edu/article/view/318> (дата обращения: 14.03.2019).
6. Популярные предметы ЕГЭ-2018. URL: [https://moeobrazovanie.ru/populyarnye\\_predmety\\_ege\\_2018.html](https://moeobrazovanie.ru/populyarnye_predmety_ege_2018.html) (дата обращения: 14.03.2019).
7. Ущeko В.П. Методические аспекты создания курсов дистанционного обучения физике в школе // *Вестник Псковского государственного университета. Серия «Естественные и физико-математические науки»*. 2018. № 12. С. 119-131.
8. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2018 года. URL: <http://zakon-ob-obrazovanii.ru>. (дата обращения: 14.03.2019).
9. Халомайзер А. Я. Об опыте работы учителя Р.Г. Хазанкина // *Математика в школе*. 1987 № 4. С. 16-21.
10. Цаплин А.И., Баяндин Д.В. Дистанционное обучение физике в техническом университете // *Высшее образование в России*. 2011. №7. С. 98-103.

**A.V. Dyundin**  
Smolensk State University

**THE ORGANIZATION OF DISTANCE STUDY FOR THE  
PHYSICS USE (UNIFIED STATE EXAM)**

**Key words:** *online training, use (unified state exam), organization of teaching physics.*

**Abstract:** *The article is dedicated to the problem of distance management of preparations for physics use based on training centre at the university. The structure of the centre, necessary set of services, the conditions for the organization of effective performance are described in this paper.*

**О.М. Киселева**

*Смоленский государственный университет*

**А.А. Быков**

*Национальный исследовательский университет МЭИ,*

*Филиал в г. Смоленске*

УДК 37.01

## **ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ПОЖИЛЫХ ЛЮДЕЙ ИНФОРМАЦИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ**

*Ключевые слова: образовательный процесс, информационные технологии, компьютерная грамотность.*

*Информационные технологии сегодня являются неотъемлемой частью жизни общества. Их использование в различных сферах жизни и деятельности дает неоспоримые преимущества. Исходя из этого каждый должен владеть хотя бы их основами, включая и людей пожилого возраста.*

*Обучение лиц пожилого возраста компьютерной грамотности должно быть ориентировано на получение навыков практического использования информационных технологий в повседневной жизни. Это обращения в государственные организации, использование поисковых систем, работа с электронными кабинетами, видеозвонки, обмен сообщениями, доступ к удаленным объектам культуры и т.д.*

*Еще одной задачей обучения информационным технологиям пенсионеров становится формирование личной направленности на самостоятельное обучение и использование компьютерной техники.*

В современном обществе знание основ информационных технологий и умение их использовать может значительно облегчить повседневную жизнь. Скорость, качество и объем получения и переработки информации, а также вопросы, связанные с этикой и безопасностью нахождения в информационном пространстве, сегодня являются актуальными для всех членов общества.

Таким образом, очевидной становится потребность в совершенно новых, ранее не вырабатываемых информационных знаниях и умениях, которые должны быть сформированы буквально у каждого члена современного общества, не исключая пожилых людей.

Расширение возможностей информационного пространства в связи с активным внедрением в повседневную жизнь информации из глобальных информационных сетей (в частности, Интернета), позволяет сделать решение многих бытовых информационных вопросов для пенсионеров простым и удобным [1]. Так, сегодня гораздо эффективнее обрести необходимые сведения о работе того или иного учреждения, списки необходимых документов, записаться на прием к нужному сотруднику, а иногда и получить консультацию намного удобнее дистанционно, нежели по телефону или при личном посещении организации [2].

Наличие электронных приемных у каждой ветви из вертикали власти делает рассмотрение проблем и нужд населения, реализованных с помощью информационных технологий, более адресным и быстрым, особенно с учетом обязательной регистрации всех электронных обращений.

Современную денежно-финансовую область жизни общества также не обошли стороной информационные технологии [3]: безналичные расчеты с помощью банковских карт, в том числе и удаленные, электронные кабинеты, позволяющие дистанционно управлять счетами и оплачивать квитанции.

Особенно актуальными, на наш взгляд, являются возможности расширения общения. Социальные сети, голосовые и видеозвонки, обмен сообщениями в чате и множество других функций различных приложений дают возможность поддерживать существующие, возобновить утерянные и наладить новые контакты, что становится особенно значимо с возрастом.

Информационные технологии позволяют пожилым людям быть в курсе событий, происходящих в мире, стране, городе, пользоваться

электронными библиотеками, ходить на виртуальные экскурсии [4] и т.д.

Таким образом, именно использование в повседневной жизни современных информационных технологий, таких как Интернет, безусловно, предоставляет новые возможности старшему поколению. Однако для полного использования всех вышеперечисленных средств пожилым людям необходимо обучиться прикладной части информационных технологий. При этом, как только обучаемый постигнет начальную компьютерную грамотность, он получит возможность к самосовершенствованию посредством различных дистанционных курсов и самоучителей.

Для пожилых людей проводится большое число курсов по развитию основных умений работы с компьютером различных уровней сложности. Так, например, оказание помощи в социальной адаптации лиц пожилого возраста, в том числе в освоении начал компьютерной грамотности, – цель социального отделения «Мудрость» (Института третьего возраста) Социально-психологического центра города Смоленска.

В рамках приобщения старшего поколения к информационным технологиям, на наш взгляд, необходимо дать теоретические знания, помочь освоить практические навыки и сформировать соответствующую мотивацию [5].

К теоретическим знаниям, необходимым для овладения основами информационных технологий людьми пожилого возраста, на наш взгляд, относятся:

- знание основ архитектуры персонального компьютера.;
- знание основ работы с операционной системой;
- знание базовых алгоритмов и способов работы с текстовой информацией;
- знание базовых алгоритмов и способов работы в программах создания и демонстрации презентаций;
- знание способов использования внешних носителей;
- знание возможностей сети Интернет (поисковых систем, электронной почты, социальных сетей, Skype, сайта «Госуслуги» и т.д.) [6].

К практическим умениям, необходимым для овладения основами информационных технологий людьми пожилого возраста, на наш взгляд, относятся:

- умение выполнять элементарные операции с файлами и папками;
- умение набирать, редактировать и форматировать тексты;
- умение создавать и просматривать простейшие презентации в соответствующих программах;



- умение производить запись и считывание информации с внешних носителей;

- умение использовать возможности сети Интернет, включающие: умение производить поисковые запросы и скачивать информацию; умение отправлять и получать электронные письма; умение настраивать свой аккаунт и реализовывать поиск в социальных сетях; умение выполнять видеозвонки и обмениваться сообщениями.

Отдельным пунктом, чтобы подчеркнуть его значимость, выделим умение использовать возможности сайта «Госуслуги».

Формирование высокой мотивации к овладению основами информационных технологий для пожилых людей зачастую является даже более важным нежели получение конкретных теоретических знаний и практических навыков. Вера в свои силы и наличие свободного времени дают лицам пожилого возраста возможности в освоении не только основ компьютерной грамотности.

К формированию личной направленности на овладение основами информационных технологий следует отнести:

- понимание информационных технологий как важной части современной картины мира;

- потребность в повышении своей компьютерной грамотности;

- установку на приобретение знаний в области применения информационных технологий в различных областях деятельности;

- оценку современных возможностей компьютерной техники с точки зрения их значимости для повышения качества удовлетворения информационных потребностей;

- приоритетную ориентацию на максимальное использование возможностей компьютера [7].

Таким образом, к основным особенностям обучения пожилых людей информационным технологиям относятся практическая ориентированность получаемых в процессе обучения теоретических сведений и навыков. Обучение должно строиться с учетом личных интересов и потребностей лиц пожилого возраста. Кроме того, получение знаний в данном случае не является самой целью, основной задачей становится формирование стойкого интереса, раскрытие основных возможностей компьютера в реальной жизни и построение фундамента для дальнейшего самостоятельного изучения и использования информационных технологий.

## **Литература**

1. Киселева О.М. Проблема адаптации пожилого населения к современной информационной среде // Психология, социология и педагогика. 2014. № 4(31). С. 4.

2. Козлов С.В. Использование возможностей интеллектуальных информационных систем при организации дистанционного обучения // NovaInfo.Ru. 2017. Т. 2, № 63. С. 1-6.

3. Козлов С.В. Актуальные вопросы использования адаптивных информационно-образовательных систем в профильной школе // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции (30 сентября 2013 г.): в 34 ч. Ч. 21. Тамбов: Бизнес-Наука-Общество, 2013. С. 48-51.

4. Самарина А.Е., Киселева М.П., Тимофеева Н.М. Использование информационных сетевых технологий в проекте изучения культуры родного края // Учитель и время. Смоленск, 2016. Вып. 11. С. 210-213.

5. Киселева О.М. Место конкурсной деятельности в решении проблемы адаптации пожилого населения к современной информационной среде // Психология, социология и педагогика. 2015. № 4 (43). С. 68-69.

6. Киселева М.П. Информатика и новые информационные технологии в системе подготовки будущего учителя // Педагогическая информатика. 2008. № 2. С. 36-40.

7. Киселева О.М., Быков А.А. Модель формирования готовности пожилого населения к деятельности в современной информационной среде // Мир науки. 2017. Т. 5, № 3. С. 13.

**O.M. Kiseleva**

Smolensk state University

**A.A. Bykov**

National Research University, Smolensk branch

## **FEATURES OF TRAINING OF OLDER PEOPLE INFORMATION TECHNOLOGY**

**Key words:** *educational process, information technologies, computer literacy.*

**Abstract.** *Information technology is now an integral part of society. Their use in various spheres of life and activity give indisputable advantages. Based on this, everyone should know at least their basics, including the elderly.*

*The training of older persons in computer literacy should focus on the practical use of information technology in everyday life. These are appeals to state organizations, the use of search capabilities, work with electronic offices, video calls, messaging, access to remote cultural objects, etc.*

*Another task of teaching information technology to pensioners is the formation of a personal focus on self-study and the use of computer technology.*

## О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К РЕШЕНИЮ «ОЛИМПИАДНЫХ» НЕРАВЕНСТВ

Ключевые слова: *неравенство Йенсена, выпуклая функция, неравенство Коши, среднее арифметическое, среднее геометрическое, неравенство Коши - Буняковского, неравенство Гельдера, неравенство Минковского.*

*В статье представлены различные способы решения неравенств, встречающихся в школьных математических олимпиадах. Даются классические неравенства, а именно неравенство Йенсена и его следствия. Приводятся примеры заданий, которые решаются с помощью этих «замечательных» неравенств.*

**Неравенство Йенсена.** Пусть  $y = f(x)$  – функция, выпуклая на некотором интервале,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – произвольные числа из этого интервала,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда  $f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + \dots + a_nf(x_n)$ .

*Пример 1.* Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 4abc - 1,$$

где  $a, b, c$  – действительные числа.

*Доказательство*

Это доказательство можно записать в одну строчку:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 4abc + 1 = (a^2 - 1)^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2(bc - a)^2 \geq 0.$$

Что и требовалось доказать.

**Неравенство Коши** гласит о том, что среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n}.$$

*Пример 2.* Пусть  $a, b, c > 0$ . Докажите, что имеет место следующее

неравенство:  $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$

*Доказательство*

По неравенству Коши получаем

$$\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}bc} = 3a,$$

$$\frac{b^3}{ac} + a + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}ac} = 3b,$$

$$\frac{c^3}{ab} + b + a \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}ab} = 3c.$$

Складываем получившиеся неравенства, получаем

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} + 2(a + b + c) \geq 3(a + b + c)$$

Что и требовалось доказать.

**Неравенство Коши – Буняковского** иногда называют неравенством Шварца и неравенством Коши – Буняковского – Шварца, хотя работы немецкого математика Шварца на эту тему появились только спустя 25 лет после работ русского математика Буняковского. Конечномерный случай этого неравенства был доказан Коши в 1821 году и называется неравенством Коши.

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  — произвольные положительные числа.

*Пример 3.* Пусть  $a + b + c = 1$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .

*Доказательство*

По неравенству Коши-Буняковского получаем

$$1 = a \times 1 + b \times 1 + c \times 1 \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Отсюда  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .

Что и требовалось доказать.

**Неравенство Гельдера.** Немецкий математик Гельдер обобщил неравенство Коши – Буняковского, в результате имеем следующее. Пусть  $p, q$  – положительные числа, причем

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Тогда

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**Неравенство Минковского.** Немецкий математик Герман Минковский, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырехмерную модель теории относительности, вывел следующее неравенство:

$$\sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n} + \sqrt[n]{b_1 \times \dots \times b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \times \dots \times (a_n + b_n)}$$

Рассмотрим еще несколько решений неравенств.

*Пример 4.* Докажите, что для любых  $a, b, c > 0$  выполнено неравенство

$$a + b + c \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

*Доказательство*

$$\begin{aligned} a + b + c &= \sqrt{b} \times \frac{a}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \times \frac{b}{\sqrt{c}} + \sqrt{a} \times \frac{c}{\sqrt{a}} \leq \\ &\sqrt{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2} \times \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^2}, \\ a + b + c &\leq \sqrt{a + b + c} \times \sqrt{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}}, \\ a + b + c &\leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

*Пример 5.* Докажите неравенство  $\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta + \cos \gamma \leq 2$ .

*Доказательство*

Используя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} &\sin \beta \sin \gamma + 1 \times \cos \beta + 1 \times \cos \gamma \leq \\ &\leq \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta + 1^2} + \sqrt{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma + 1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

*Пример 6.* Докажите неравенство  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 14$ , если  $x + 2y + 3z \geq 14$ .

*Доказательство*

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geq (x + 2y + 3z)^2 \geq 14^2,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 14.$$

Что и требовалось доказать.

*Пример 7.* Докажите неравенство:  $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$

*Доказательство*

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &\geq 2x^2 y^2, \\ y^4 + z^4 &\geq 2y^2 z^2, \\ x^4 + z^4 &\geq 2x^2 z^2. \end{aligned}$$

Складывая данные неравенства, получим

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 + z^4 &\geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 \\
x^2 y^2 + y^2 z^2 &\geq 2xy^2z \\
y^2 z^2 + x^2 z^2 &\geq 2xyz^2 \\
x^2 y^2 + x^2 z^2 &\geq 2x^2yz.
\end{aligned}$$

Складываем неравенства, получим

$$\begin{aligned}
x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 &\geq xyz(x + y + z), \\
x^4 + y^4 + z^4 &\geq xyz(x + y + z).
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

*Пример 8.* Докажите неравенство:  $2(x^4 + y^4) + 17 > 16xy$ .

*Доказательство*

$$\begin{aligned}
x^4 + y^4 &\geq 2x^2y^2, \\
2(x^2 + y^2) + 17 &\geq 4x^2y^2 + 17 > 4(x^2y^2 + 4) \geq 16xy.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

### Литература

1. Конюшков А. Неравенство Коши-Буняковского // Научно-популярный математический журнал «Квант». 1987. №18. С. 40.
2. Коровкин П.П. Неравенства. М: Наука, 1965.
3. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. М.: Наука, 1967.
4. Соловьёв Ю.П. Неравенства. М: МЦНМО, 2005. 16 с.
5. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. / Р.М. Федоров [и др.]. М.: МЦНМО, 2006.
6. Chetkovski Z. Inequalities. Theorems, techniques and Problems. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2012.

**A.V. Konashenko, N.N. Nikifortseva**

Smolensk State University

Smolensk Physics and Mathematics Lyceum

### SOME APPROACHES TO SOLVING «OLYMPIAD» INEQUALITIES

**Keywords:** *Jensen inequality, convex function, Cauchy inequality, arithmetic mean, geometric mean, Cauchy - Bunyakovsky inequality, Hölder inequality, Minkowski inequality.*

**Abstract.** *An article presents various ways of solving inequalities encountered in school mathematical olympiads. Classical inequalities are given, namely, Jensen's inequality and its consequences. The article examples of tasks that are solved with the help of these «remarkable» inequalities are given.*

**Р.Е. Кристаллинский**  
*ВА ВПВО ВС РФ*  
**В.Р. Кристаллинский**  
*Смоленский государственный университет*

УДК 519.688

## **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ MATHEMATICA**

Ключевые слова: *оптимизация, система Mathematica.*

*В статье предполагается рассмотреть реализацию некоторых из наиболее эффективных методов оптимизации средствами системы Wolfram Mathematica.*

Задачи оптимизации встречаются в различных сферах человеческой деятельности. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, ибо оно, как правило, выбирается после сравнения с другими вариантами. Интерес к задачам наилучшего выбора был высоким всегда, но особенно возрос в последние годы в связи с интенсивным развитием науки и техники. С одной стороны, людям все чаще приходится заниматься процессами, для осуществления которых требуется максимально эффективное использование имеющихся средств и ресурсов, с другой – с развитием вычислительной техники резко увеличились возможности воздействия человека на изучаемые процессы. В связи со сложностью современных прикладных задач оптимизация принятия решений в них все меньше стала основываться лишь на «здравом смысле», интуиции и опыте человека. Стало неизбежным использование научного подхода, базирующегося на математическом моделировании исследуемых задач.

Первые задачи по изучению экстремальных свойств геометрических фигур (круг, квадрат) были решены еще в древности. Мощным толчком к развитию методов оптимизации послужило создание дифференциального и интегрального исчисления. В связи с современной научно-технической революцией теория и практика оптимизации стали развиваться особенно интенсивно. В течение короткого промежутка времени были созданы новые разделы теории (линейное программирование, нелинейное программирование, теория оптимального управления и др.). Разработан ряд эффективных численных методов решения задач, возникающих на практике. Эти методы успешно реализованы в современных системах компьютерной математики. Одной из наиболее совершенных систем такого рода является Mathematica.

Пусть  $f(x)$  – непрерывная функция, определенная на ограниченном замкнутом множестве, не содержащем изолированных точек. Тогда этому множеству принадлежит точка  $x_1$ , в которой рассматриваемая функция принимает наименьшее значение, и точка  $x_2$ , в которой рассматриваемая функция принимает наибольшее значение. Рассмотрим несколько примеров нахождение указанных точек.

**Пример 1.** На отрезке  $[-4; 6]$  задана функция

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1} + \sin^3 x}$$

Найти наибольшее значение заданной функции на рассматриваемом отрезке.

**Решение**

$$f[x_] = (x+1) / (\sqrt{x^2+1} + \text{Sin}[x]^3);$$

$$\text{FindMaximum}[\{f[x], x >= -6 \wedge x <= 4\}, x]$$

$$\{1.232239, \{x \rightarrow 0.408054\}\}$$

$$\text{FindMinimum}[\{f[x], x >= -6 \wedge x <= 4\}, x]$$

$$\{0.894036, \{x \rightarrow 1.47263\}\}.$$

**Пример 2.** На отрезке  $[-4; 4]$  задана функция

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt[4]{|\cos x - 3|}}{|x| + |x - 3| + |x - 5|}$$

**Решение**

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке  $[-4; 4]$ .

$$f[x_] = (x^2 + \sqrt[4]{\text{Abs}[\text{Cos}[x] - 3]}) / (\text{Abs}[x] + \text{Abs}[x - 3] + \text{Abs}[x - 5]);$$

$$\text{FindMaximum}[\{f[x], x >= -4 \wedge x <= 4\}, x]$$

$$\{2.89709, \{x \rightarrow 4.\}\}$$

$$\text{FindMinimum}[\{f[x], x >= -4 \wedge x <= 4\}, x]$$

$$\{0.143274, \{x \rightarrow 0.200238\}\}.$$

**Пример 3.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 - |x - \sin 3x| - \cos x - 2$$

на множестве, определяемом соотношением

$$x^4 - 3x - |e^{-x^2} - 4| - 5 \leq 0$$

**Решение**

$$f[x_] = x^2 - \text{Abs}[x - \text{Sin}[3x]] - \text{Cos}[x] - 2;$$

$$\text{NMinimize}[\{f[x], x^4 - 3x - \text{Abs}[\text{Exp}[-x^2] - 4] - 5 <= 0\}, x]$$

$$\{-3.34871, \{x \rightarrow -0.296925\}\}$$

$$\text{NMaximize}[\{f[x], x^4 - 3x - \text{Abs}[\text{Exp}[-x^2] - 4] - 5 <= 0\}, x]$$



$\{-0.106752, \{x \rightarrow 1.96371\}\}$ .

**Пример 4.** Дана функция

$$f(x) = x^2 - |x - \sin 3x| - \cos x - 2$$

и функции

$$f1(x) = x^4 - |x^3 + |\sin x + 3|| - x^2 + x - 1$$

$$f2(x) = x^2 + |\cos 4x + x - 3| - 6x + 2$$

Требуется найти наибольшее и наименьшее значение заданной функции на объединении множеств  $f1(x) \leq 0$  и  $f1(x) \geq 0$ .

**Решение**

$$f[x_] = x^2 - \text{Abs}[x - \text{Sin}[3x]] - \text{Cos}[x] - 2;$$

$$f1[x_] = x^4 - \text{Abs}[\text{Sin}[x] + 3] - x^2 + 1;$$

$$f2[x_] = x^2 + \text{Abs}[\text{Cos}[4x] + x - 3] - 6x + 2;$$

$$\text{NMinimize}[\{f[x], f1[x] \leq 0 \vee f2[x] \leq 0\}, x]$$

$$\{-2.57439, \{x \rightarrow 1.2517\}\}$$

$$\text{NMaximize}[\{f[x], f1[x] \leq 0 \vee f2[x] \leq 0\}, x]$$

$$\{-0.307709, \{x \rightarrow 1.93299\}\}.$$

**Пример 5.** Дана функция

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^4 + 3x^2 + x + 7} - \sin(\cos(x))}{\sqrt{x^2 + 7x + 11}}$$

Найти 11 членов частной суммы ряда Маклорена указанной функции и оценить погрешность при замене заданной функции этой частной суммой.

**Решение**

$$f[x_] = \left( \sqrt[4]{x^4 + 3x^2 + x + 7} - \text{Sin}[\text{Cos}[x]] \right) / \sqrt{x^2 + 7x + 11};$$

$$f1[x_] = \text{N}[\text{Normal}[\text{Series}[f[x], \{x, 0, 10\}]]];$$

$$f1[x_] = \text{Rationalize}[f1[x], 10^{-10}]$$

$$23486/99215 - (5293x)/91568 + (2741x^2)/17953 -$$

$$(3387x^3)/61786 + (10214x^4)/192189 - (1757x^5)/101127 -$$

$$(363x^6)/59116 + (283x^7)/121400 + (49x^8)/130932 - (11$$

$$x^9)/28613 + (89x^{10})/216507$$

$$\text{NMaximize}[\{\text{Abs}[f[x] - f1[x]], x \geq -1 \wedge x \leq 1\}, x]$$

$$\{0.000154911, \{x \rightarrow 1.\}\}.$$

**Пример 6.** Рассматривается решение дифференциального уравнения

$$y'(x) = y(x) \cos(x + y(x))$$

на промежутке  $[0,10]$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0)=1$ .  
Найти наибольшее и наименьшее значение этого решения на промежутке  $[1,5]$ .

**Решение**

```
y1=NDSolveValue[{y'[x]==y[x]Cos[x+y[x]],y[0]==1},y,{x,0,10}];
NMaximize[{y1[x],x>=1 ^ x<=5},x]
{0.991387,{x->1.}}
NMinimize[{y1[x],x>=1 ^ x<=5},x]
{0.0724693,{x->4.63994}}.
```

**Пример 7.** Рассматривается решение дифференциального уравнения

$$y'''(x) = y''(x)\sin(x + y(x)) + y'(x)^2 \cos(x + y(x)) + y(x)e^{-x} + x^2$$

на промежутке  $[0,10]$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0)=1, y(3)=4, y(7)=8$ . Найти наибольшее и наименьшее значение этого решения на промежутке  $[1,5]$ .

**Решение**

```
y1=NDSolveValue[{y'''[x]==y''[x]Sin[x+y[x]]+y'[x]^2Cos[x+y[x]]+y[x]
Exp[-x]+x^2,y[0]==1,y[3]==4,y[7]==8},y,{x,0,10}];
NMaximize[{y1[x],x>=1 ^ x<=5},x]
{26.4895,{x->1.44128}}
NMinimize[{y1[x],x>=1 ^ x<=5},x]
{-47.3522,{x->5.}}.
```

**Пример 8.** Найти наибольшее и наименьшее значения первообразной функции

$$f(x) = -\sin(x + e^{-x}) + 5\sqrt[4]{x^3 + 1} + \cos x$$

на промежутке  $[1,6]$ .

**Решение**

```
f1[x_]=-Sin[x+Exp[-x]]+ 5\sqrt[4]{x^3 + 1} + Cos[x]
y1=NDSolveValue[{y'[x]==f[x],y[0]==0},y,{x,0,6}];
NMaximize[{y1[x],x>=1 ^ x<=6},x]
{69.1753,{x->6.}}
Nminimize[{y1[x],x>=1 ^ x<=6},x]
{5.11052,{x->1.}}.
```

**Пример 9.** Найти наибольшее значение функции

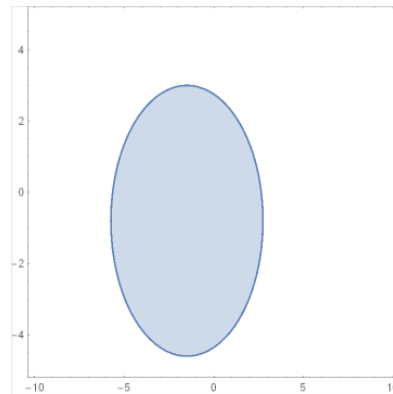
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$$

в области, заданной неравенством

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{5y^2}{4} + 3x + 2y \leq 15$$

**Решение**

```
f[x_,y_] = Sqrt[x^2+3*y^2]
R=ImplicitRegion[3x^2/3+5y^2/4+3*x+2*y<=15,{x,y}]
RegionPlot[3*x^2/3+5*y^2/4+3*x+2*y<=15,{x,-10,10},{y,-5,5}]
```



```
NMaximize[f[x,y],{x,y} ∈ R]
{5.64201,{x->-3.27804,y->2.65121}}
```

### Литература

1. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М.: ДМК-Пресс, 2010.–624 с.

**R.E. Kristalinskii**

Military Academy of the anti-aircraft defense systems of the Armed Forces of the Russian Federation

**V.R. Kristalinskii**

Smolensk State University

## METHODS OF OPTIMIZATION IN THE MATHEMATICA SYSTEM

**Keywords:** *optimization, Mathematica system.*

**Abstract.** *In this article we describe the realization of the most effective methods for optimization by means of Wolfram Mathematica system.*

**А.С. Кузнецова**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

УДК 159.9:331.101.3

## ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОФИЛАКТИКИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО СТРЕССА У ПЕДАГОГОВ

Ключевые слова: *напряженность труда педагогов, профессиональный стресс, профилактика стресса, психологическая саморегуляция, стресс-менеджмент.*

*В статье изложены результаты эмпирических исследований факторов напряженности трудовой деятельности педагогов, особенностей профессионального стресса и индивидуальных ресурсов саморегуляции состояния в труде. Рассматриваются возможности психопрофилактического подхода как направления предотвращения развития деструктивного профессионального стресса педагогов, работающих в системе среднего и среднего профессионального образования. Представлено описание психологических технологий развития навыков произвольной саморегуляции состояния, рекомендуемых в качестве основы построения программ эффективного стресс-менеджмента в динамичной образовательной среде.*

**Факторы напряженности труда в деятельности современных педагогов.** Способность эффективно преодолевать действие стрессогенных факторов образовательной среды относится к числу профессиональнозначимых компетенций современного педагога [7]. Психологические исследования, выполненные в период проведения инновационных реформ в образовательной сфере, позволили выявить и систематизировать главные факторы повышенной напряженности [4; 8; 9], которые относятся (1) к специфике содержания профессиональной деятельности педагогов, (2) к организационным особенностям их работы, (3) к факторам, характерным для инновационной среды образовательных учреждений.

Важно учесть, что стресс развивается тогда, когда объективные ситуативные обстоятельства воспринимаются и *понимаются* человеком как субъективно сложные и, одновременно, значимые. По этой причине источники развития профессионального стресса необходимо искать не только среди объективно существующих проблем содержания и условий выполнения труда, но и путем анализа субъективного образа текущей ситуации и особенностей ее интерпретации. Данные по контингенту учителей учебных заведений в системе среднего и среднего профессионального образования ( $n = 160$ ) показали, что основными субъективно значимыми источниками профессионального стресса для педагогов являются:

1) традиционные факторы содержания профессиональной деятельности:

- высокий уровень ответственности за результаты работы;
- необходимость распределения внимания между разными по содержанию трудовыми задачами и, как следствие, необходимость быстрых переключений между ними;
- постоянное общение с большим количеством людей (учеников, их родителей, коллег, представителей администрации) и учет их

индивидуальных особенностей; высокая вероятность возникновения конфликтных ситуаций;

- жесткие сроки выполнения работы;

2) организационные факторы:

- организационно заданные и обязательные к выполнению требования корректного и эмоционально сдержанного поведения при взаимодействии с учащимися, родителями, коллегами;
- ограниченность (иногда невозможность) карьерного роста;
- недостаток современного оборудования, при этом высокие требования к умениям работать с разными информационными и компьютерными средствами;

3) Инновационные факторы:

- рост объема информационной нагрузки и увеличение удельного веса отчетной работы;
- необходимость выполнения рабочих задач во вне рабочее время;
- требования к постоянному повышению квалификации учителя (посещение курсов, освоение компьютера).

Безусловно, работа по оптимизации труда педагога способствует минимизации стрессогенного эффекта явно негативных обстоятельств профессионального труда. Вместе с тем очевидно и то, что в любой профессиональной деятельности – в том числе и в труде педагогов – полное устранение источников стресса невозможно. Психопрофилактический подход ориентирован на использование психологических технологий, развивающих и совершенствующих индивидуальную систему средств преодоления профессионального стресса. Данное направление психологической поддержки специалистов, работающих в современных динамичных образовательных средах, формирует умение адекватно реагировать на стрессогенные факторы и развивает адаптационный потенциал личности педагога.

**Конструктивные и деструктивные виды стрессовых состояний как ответ на действие повышенной напряженности труда.** Прежде чем обратиться к анализу оптимизационных возможностей психологических технологий профилактики стресса, необходимо подчеркнуть, что виды стресса, развивающегося в субъективно сложных и значимых условиях, могут быть различны по характеру их влияния на результативность деятельности. Различают деструктивный (состояние, при котором выполнение поставленной задачи становится крайне затрудненным или невозможным) и конструктивный стресс (при котором человек успешно справляется с выполнением рабочей задачи). Общей для этих двух видов стресса является актуализация мотивации на преодоление напряженности, что с неизбежностью предполагает повышенную мобилизацию индивидуальных ресурсов [5].

Важно, что субъективная оценка рабочей ситуации как сложной и значимой, заставляющей человека активизировать дополнительные ресурсы для ее преодоления, сама по себе не определяет вид стрессового состояния. Важную роль в развитии конструктивного или деструктивного стресса играет и оценка человеком своих возможностей по преодолению напряженности. Если требования ситуации и решаемой в этой ситуации рабочей задачи соответствуют возможностям человека, более вероятно развитие конструктивного стресса. В противном случае стресс развивается как деструктивное состояние, при котором мобилизованные человеком ресурсы не соответствуют ситуативным требованиям и не способствуют выполнению работы. Именно поэтому одним из основных направлений создания психологических технологий стресс-менеджмента являются технологии развития психологических ресурсов, позволяющих профессионалу эффективно управлять своим состоянием и успешно преодолевать действия стрессоров.

Данные технологии эффективны не только в предотвращении действия ежедневных стрессоров. Они позволяют решать задачи профилактики развития деструктивных изменений личности и профессионального поведения, многие из которых являются следствием постоянного переживания стресса [1]. К числу особо опасных профессионально-личностных деформаций стрессовой этиологии педагогов относят синдром выгорания, специфика которого заключается в накоплении признаков эмоционального истощения, развитии упрощенных и «уплощенных» представлений об учениках в сочетании с обобщенно-негативным отношением к ним, потере уверенности в своей способности успешно выполнять работу учителя [2; 3]. Поэтому развитие психологических ресурсов успешной адаптации к напряженной среде способствует росту готовности учителя применять адекватные требованиям профессионального труда приемы саморегуляции, эффективные для преодоления стресса и повышения работоспособности.

**Комплексная программа обучения психологическим приемам саморегуляции состояния и профилактики профессионального стресса.** Цикл исследований специфики функционирования ресурсов саморегуляции состояния в условиях пролонгированной напряженности труда, вызванной действием факторов внедрения широкомасштабных отраслевых инноваций (n = 140) показал, что наиболее успешные педагоги используют эффективные приемы и средства саморегуляции состояния, основанные: (1) на применении соответствующих организационным и профессиональным нормам поведенческих моделей преодоления трудового стресса, базирующихся на конструктивном взаимодействии с коллегами и руководством, (2) на использовании приемов позитивно-окрашенного общения (коммуникативной «релаксации»), (3) на выборе активных способов саморегуляции

состояния, включающих приемы мысленного моделирования целевого (требуемого) состояния – в том числе и состояния конструктивного стресса [4].

Среди эффективных приемов купирования стресса особое место занимают психологические приемы целевой саморегуляции состояния. Собранные данные позволили установить, что не все педагоги владеют данными приемами в совершенстве и не всегда способны выбрать в конкретных напряженных ситуациях наиболее эффективные способы управления стрессом: из числа 140 обследованных педагогов только 15 наиболее успешных профессионалов отметили, что не испытывают трудностей в выборе способа саморегуляции в условиях высокой напряженности. На основании собранных данных была создана программа обучения педагогов новым приемам эффективного стресс-менеджмента, в основу которой положен модульный вариант технологии освоения навыков саморегуляции функционального состояния, разработанный профессором МГУ им. М.В. Ломоносова А.Б. Леоновой (см. рис 1).



Рис. 1. Модульный вариант компоновки программы обучения навыкам психологической саморегуляции состояния [6]

Модуль обучающей программы включает последовательное изучение приемов четырех техник психологической саморегуляции состояния. На начальном этапе обучения осваиваются *приемы* достижения нужной степени мышечной релаксации как средства достижения релаксации эмоциональной; на последующих этапах выполняется переход к обучению психологическим, внутренним приемам мысленного моделирования желаемых состояний и их целевой регуляции при помощи словесных самоприказов, фиксирующих

параметры желаемого состояния в конкретной ситуации. Сочетание в одной обучающей программе содержательно разных приемов саморегуляции позволяет ускорить процесс обучения и дает возможность обучающимся сравнивать эффективность приемов для того, чтобы в дальнейшем научиться применять наиболее предпочтительные для каждого человека способы управления профессиональным стрессом.

Внедрение программы обучения приемам саморегуляции, подготовленной для целевого контингента педагогов школ и профессиональных колледжей показало, ее эффективность. Установлен многоуровневый пролонгированный эффект управления состоянием: у прошедших курс обучения педагогов нормализовались показатели артериального давления ( $p < 0,01$ ), значимо снизилась выраженность ситуативной тревожности при выполнении работы в напряженных условиях ( $p < 0,01$ ), повысился уровень субъективного комфорта в работе ( $p < 0,01$ ), снизилось ощущение усталости ( $p < 0,05$ ).

Таким образом, психологические технологии развития навыков произвольной саморегуляции состояния в напряженных условиях и приемов управления стрессом могут быть рекомендованы для широкого использования в образовательных организациях с целью развития ресурсов стресс-менеджмента у педагогов. Целесообразность внедрения таких технологий подтверждена в исследованиях эффектов оптимизации состояния в напряженных условиях инновационных реформ. Для наиболее эффективного освоения приемов управления стрессом рекомендована адаптация данных обучающих технологий на основе учета специфических факторов напряженности труда педагогов, работающих с учениками разных возрастных групп.

### Литература

1. Барабанщикова В.В. Профессиональные деформации специалиста в инновационных видах деятельности М.: Когито-Центр, 2017. 235 с.
2. Качина А.А., Злоказова Т.А. Особенности совладающего поведения педагогов, работающих в условиях психо-эмоционального напряжения // Психология совладающего поведения. Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова Кострома, 2010. Т.2. С. 102–104.
3. Кузнецова А.С. Психологические предикторы успешности труда преподавателей в системе среднего образования // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX Международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ / под ред. К.М. Расулова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 372-378.
4. Кузнецова А.С., Титова М.А. Эффективная саморегуляция состояния в напряженных условиях как дифференцирующая компетенция // Организационная психология и психология труда. 2016. Т. 1, № 1. С. 87-113.
5. Леонова А.Б. Комплексная стратегия анализа профессионального стресса: от диагностики к профилактике и коррекции // Психологический журнал. 2004. Т. 25, № 2. С. 75–85.



6. Леонова А.Б., Кузнецова А.С. Психологические технологии управления состоянием человека. М.: Смысл, 2009. 311 с.

7. Титова, М.А. Саморегуляция функциональных состояний и профессиональная успешность преподавателей колледжа // Среднее профессиональное образование. № 6. 2012. С. 48–50.

8. Широкая М.Ю. Субъективная оценка времени в системе регуляции деятельности учителей средней школы в условиях внедрения организационных и инновационных изменений // Материалы Первой Всероссийской научно-практической конференции «Психология психических состояний: теория и практика». Казань: ЗАО Новое знание, 2008. Т. 2. С. 510–514.

9. The determinants of the development of professional distortions in medical personnel, teachers and psychologists working in an industrial-disaster zone / A.B. Leonova [et. al.] // Psychology in Russia. 2013. Vol. 6 (3). P. 132–149.

**A.S. Kuznetsova**

Lomonosov Moscow State University

## **PSYCHOLOGICAL TECHNOLOGIES OF OCCUPATIONAL STRESS PSYCHOPROPHYLACTICS IN TEACHERS**

**Keywords:** *strain in pedagogical work; occupational stress; stress prevention; psychological self-regulation of a state; stress-management.*

**Abstract.** *The paper presents the results of research targeted to reveal strain and stress factors in teachers work, occupational stress characteristics and the specificity of individual self-regulation resources. The possibilities of psychoprophylactic approach as a way of prevention of teachers' professional distortions in teacher's work are analyzed. The psychological technologies for the new self-regulation skills development are described. Such technologies are recommended as a base for elaboration of new effective stress-management programs for work conditions in dynamic educational environment.*

**Г.Е. Сенькина, А.А. Базылева**

*Смоленский государственный университет*

УДК 372.853

372.862

## **3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ: ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ СОПРОВОЖДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ**

**Ключевые слова:** *3D-моделирование и проектирование; проектная деятельность обучающихся; система сопровождения проектной деятельности.*

*В современных условиях быстро развивающихся информационно-коммуникационных технологий к числу инновационных образовательных технологий целесообразно отнести и технологии 3D-моделирования и проектирования. В качестве образовательных технологий 3D-моделирование можно применить в проектной деятельности обучающихся при изучении физики в общеобразовательной школе. Но возникает вопрос: готовы ли ученики использовать программы 3D-моделирования и проектирования в своей проектной деятельности по физике? В статье выявлена структура процесса сопровождения проектной деятельности обучающихся при изучении физики с использованием 3D-технологий. Она включает в развернутом виде подготовительный, основной и заключительный этапы.*

В современных условиях цифровизации практически всех областей деятельности человека особое место занимают технологии 3D-моделирования и проектирования, так называемые аддитивные технологии. В условиях обучения их целесообразно использовать в качестве инновационных образовательных технологий. Развитие проектных умений обучающихся предусмотрено нормативными документами в области образования [1; 2]. 3D-моделирование можно эффективно применить в проектной деятельности обучающихся при изучении физики в общеобразовательной школе [3; 5].

Применение технологий 3D-моделирования и проектирования в деятельности обучающихся способствует [3, 5]:

- развитию творческих способностей обучающихся;
- профориентации обучающихся на инженерные и технические специальности;
- развитию познавательного интереса у обучающихся;
- улучшению восприятия учебного материала обучающимися;
- концентрации внимания обучающихся на учебном материале.

Физика – наука экспериментальная, все темы курса физики сопровождаются демонстрационным экспериментом. Методика обучения физике всегда была сложнее методик преподавания других предметов. Использование 3D-моделирования и проектирования в деятельности обучающихся при изучении физики повысит эффективность обучения. Для этого нам необходимо иметь систему сопровождения проектной деятельности учащихся в процессе обучения физике с использованием 3D-технологий.

На основании анализа теории и практики проектной деятельности (в том числе, источников [3–7]) выделим следующие *этапы* процесса сопровождения проектной деятельности учащихся при изучении физики с использованием 3D-технологий:

## **I. Подготовительный этап.**

1. Разработка тематики проектов.
2. Подбор учителем технологий под тематику проектов.
3. Поиск методических рекомендаций по применению 3D-технологий.
4. Постановка проблемы, целей и задач проекта, возможного результата и способа его достижения, составление плана в форме беседы, обсуждения.

## **II. Основной этап.**

1. Подбор учеником технологий под тематику индивидуального проекта.
2. Изучение методических рекомендаций по применению 3D-технологий.
3. Консультации по овладению 3D-технологиями.
4. Консультации по самому итоговому проекту.

## **III. Заключительный этап.**

1. Индивидуальное сопровождение по оформлению и защите индивидуального проекта в форме консультаций.
2. Педагогическая поддержка обучающегося в ходе защиты проекта, обсуждение перспектив развития.

Так как выполнение индивидуального итогового проекта по физике предполагает исследовательскую деятельность обучающихся, то и тематика проектов должна соответствовать данному требованию. Поэтому нами были подобраны такие темы итоговых проектов, которые, во-первых, отвечают требованию выполнения исследовательской работы самим учеником, во-вторых, подходят для того, чтобы проекты можно было выполнить в программах 3D-моделирования и проектирования.

Приведем примеры подобных заданий:

1. Выполните компьютерное моделирование движения планет.
2. Выполните компьютерное моделирование движения тела, брошенного под углом к горизонту при различных значениях модуля начальной скорости и ее угла с горизонтом.
3. Выполните компьютерное моделирование измерения жесткости пружины.
4. Выполните компьютерное моделирование изучения закона Ома для полной цепи.

Все эти темы подходят для детей, обучающихся в 9 и 10 классах. По учебным программам и курс 9 класса, и курс 10 класса начинаются с изучения механики. Для этого раздела физики подходят две темы: «Выполните компьютерное моделирование изучения движения тела, брошенного под углом к горизонту, при различных значениях модуля начальной скорости и ее угла с горизонтом» и «Выполните компьютерное моделирование измерения жесткости пружины».

Последний раздел в курсе физики 9 класса посвящен строению и эволюции Вселенной. Для него подходит тема «Выполните компьютерное моделирование движения планет».

Таблица 1

Система сопровождения проектной деятельности учащихся в процессе обучения физике с использованием 3D технологий

№ п/п	Наименование этапа	Содержание	Цели	Методы	Формы	Результат
1.	Подготовительный	1. Разработка тематики проектов. 2. Подбор учителем технологий под тематику проектов. 3. Поиск методических рекомендаций по применению 3D-технологий. 4. Постановка проблемы, целей и задач проекта, возможного результата и способа его достижения, составление плана	Заинтересовать учащихся, подобрать тему в соответствии с его уровнем подготовки и развития	Анализ (тем, технологий, ресурсов интернета )	Беседа	Тематика проектов, база методических рекомендаций, выбор учащимися тем проектов и разработка индивидуального плана проектной деятельности
2.	Основной	1. Помощь в подборе учеником технологий под тематику индивидуального проекта. 2. Изучение методических рекомендаций по применению 3D технологий. 3. Индивидуальное сопровождение по овладению 3D-технологиями. 4. Индивидуальное сопровождение по выполнению итогового проекта	Стимулировать обучающихся к самостоятельному изучению рекомендаций по применению 3D-технологий и выполнению индивидуального проекта	Сравнение, анализ	Консультация, беседа	Оптимально подобранная 3D-технология и реализация плана
3.	Заключительный	1. Индивидуальное сопровождение по оформлению и защите индивидуального проекта. 2. Педагогическая поддержка обучающегося в ходе защиты проекта, обсуждение перспектив развития	Научить верному оформлению итогового проекта, подготовить к яркой и запоминающейся защите индивидуального проекта	Сравнение, анализ	Обсуждение, дискуссия, диалог	Успешная защита итогового проекта

На изучение физики на базовом уровне в 10–11 классах отводится 2

часа в неделю. Курс рассчитан на 134 часа: в 10 классе – 68 часов (34 учебные недели), в 11 – 66 часов (33 учебные недели).

В учебном плане школы, в которой проводится эксперимент (МОУ СОШ № 21 г. Смоленска), весь курс физики на базовом уровне всеми обучающимися изучается за один год при четырех часах в неделю (136 часов). Такое изменение в учебном плане вызвано тем, что десятиклассники обучаются по индивидуальным учебным планам. В индивидуальный учебный план входят предметы трех блоков: обязательные для изучения предметы на базовом или профильном уровне, предметы по выбору на базовом или профильном уровне и элективные предметы. В связи с этим уже в 10 классе обучающиеся проходят раздел «Электродинамика», к которому можно отнести тему итогового проекта «Выполните компьютерное моделирование изучения закона Ома для полной цепи».

На основе вышеизложенного и с учетом выявленных этапов и системы сопровождения проектной деятельности обучающихся предполагается построение модели формирования готовности обучающихся к проектной деятельности по физике с использованием 3D-моделирования.

### Литература

1. Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" № 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2018 года.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 17 декабря 2010 г. № 1897.
3. Елесева М.А. Проект «Использование 3D-моделирования на уроках физики для развития научно-технического творчества учащихся» URL: <http://docplayer.ru/33277664-Proekt-ispolzovanie-3d-modelirovaniya-na-urokah-fiziki-dlya-razvitiya-nauchno-tehnicheskogo-tvorchestva-uchashchih-sya.html> (дата обращения: 20.02.2019).
4. Камзеева Е.Е. Интернет - уроки по физике // Физика в школе. 2007. №3. С. 53–54.
5. Методические рекомендации по изучению технологии 3D–моделирования в общеобразовательных учреждениях Белгородской области / Е.А. Корнилова [и др.]. Белгород, 2016. 43 с.
6. Сидоров Н. А. Использование информационных технологий в процессе обучения физике. URL: <https://nsportal.ru/shkola/fizika/library/2014/11/14/ispolzovanie-informatsionnykh-tekhnologiy-v-protse-ssobucheniya> (дата обращения: 25.02.2019).
7. Филиппова И.Я. Информационные технологии на уроках физики в средней школе // Материалы VIII Международной конференции "Физика в системе современного образования" (ФССО-05). СПб., 2005. С. 623-625.

**G.E. Senkina, A.A. Bazyleva**  
Smolensk State University

**3D-MODELING IN PROJECT ACTIVITY OF STUDENTS:  
CONSTRUCTION OF SUPPORT SYSTEM IN THE PROCESS  
OF STUDYING PHYSICS IN SCHOOL EDUCATIONAL**

**Keywords:** *3D modeling and design, project activity of students, readiness of students, the system of support of project activity.*

**Abstract.** *In modern conditions of rapidly developing information and communication technologies among the innovative educational technologies it is advisable to include the technology of 3D modeling and design. For example, as an educational technology 3D – modeling can be used in the project activities of students in the study of physics in secondary school. But the question arises: are students ready to use 3D modeling and design programs in their project activities? In the article the structure of the process of supporting the project activities of students in the study of physics using 3D technologies is identified. It includes in expanded form the preparatory, main and final stages.*

**Н.М. Тимофеева**

*Смоленский государственный университет*

УДК 004.9

## **О СТРУКТУРИРОВАНИИ И НАГЛЯДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНФОРМАЦИИ В ВИДЕ ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТ СРЕДСТВАМИ ОНЛАЙН-СЕРВИСОВ**

Ключевые слова: *информация, интеллект-карта, онлайн сервис; инфографика, Cacoо; Mindmeister, Mindomo.*

*В статье рассматриваются вопросы структурирования и наглядного представления информации в виде интеллект-карт: определение интеллект-карты, требования к ее разработке, области применения, преимущества при использовании. Анализируются и сравниваются возможности разработки интеллект-карт средствами онлайн-сервисов Cacoо, Mindmeister и Mindomo.*

Структурирование информации, представление ее в сжатом наглядном виде дает возможность ее легкого восприятия и эффективной обработки. Одним из инструментов для подобной работы с информацией служат интеллект-карты или карты разума, карты памяти.

*Интеллект-карта* – это диаграмма, центральным элементом которой является основная идея, концепция. Этот центральный элемент соединяется с другими, поясняющими, детализирующими его и располагающимися вокруг на первом уровне. Элементы первого уровня поясняются и детализируются элементами второго и т.д. Такой подход предполагает выделение главного в содержании, выявление его

основных аспектов, установление взаимосвязей и визуальное представление информации.

Для наибольшего эффекта в восприятии и усвоении информации при построении интеллект-карт рекомендуется соблюдать иерархию мыслей; использовать максимальное число цветов; не перегружать диаграмму текстовой информацией, располагая на ее ветвях только ключевые слова и словосочетания; чаще использовать графические объекты, ассоциирующиеся с ключевыми словами (рисунки, пиктограммы, символы); варьировать размер букв и масштаб графики.

При работе с интеллект-картой задействуются оба полушария человеческого мозга: так, для правого полушария удобно представление информации в виде разноцветных графических образов, для левого – иерархическое представление, связи между элементами.

Автором данной техники работы с информацией является английский психолог Тони Бьюзен [1], который отмечал среди преимуществ интеллект-карт легкость в восприятии и усвоении информации, способствование развитию ассоциативного, системного и иерархического мышления при их использовании и составлении.

К областям применения интеллект-карт относят:

- обучение (создание ясных, сжатых конспектов при прослушивании лекции, прочтении книг, подготовке к экзаменам);
- принятие решений (четкое видение «за» и «против», отсюда более взвешенное и продуманное решение);
- мозговой штурм (генерация новых идей, коллективное решение задач);
- презентацию (при проведении деловых встреч, обучающих семинаров за меньшее время передается больше информации).

В настоящее время появилось достаточно много программных продуктов для разработки интеллект-карт, что облегчает работу по их созданию и использованию.

Рассмотрим некоторые сервисы, работа в которых по составлению интеллект-карт даже для начинающего пользователя не составляет особого труда из-за интуитивной ясности и понятности интерфейса и минимума функционала.

**Cacoо** (<https://cacoо.com/>) – онлайн сервис информационного дизайна (инфографики). Он позволяет строить изображения различных диаграмм, плакатов, блок-схем и др.

Для построения интеллект-карт сервис имеет следующие возможности:

- настраиваемый дизайн (использование готовых шаблонов и возможность построения интеллект-карт с нуля; вставка изображений);
- поддержка русского языка;

- совместная работа над изображением;
- публикация готовой карты;
- возможность ее сохранения в PNG и др.

К минусам Cacoo отнесем ограничение времени использования сервиса в бесплатном тарифе, отсутствие возможности вставки мультимедиа.

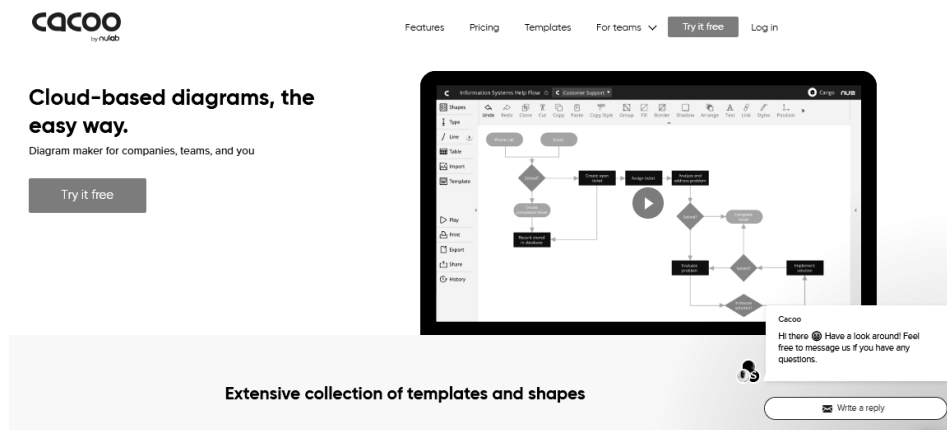


Рис. 1. Стартовая страница Cacoо.com

**Mindmeister** (<https://www.mindmeister.com/ru/>) – онлайн-инструмент для построения интеллект-карт.



Рис. 2. Стартовая страница Mindmeister.com

Его преимущества по сравнению с сервисом Cacoo в том, что помимо всех перечисленных Mindmeister имеет следующие возможности:

- вложение мультимедиа (возможность прикрепления документов, ссылок, изображений);
- встроенный режим презентации (возможность представить разработанную карту в виде динамичного слайд-шоу);
- мобильное приложение сервиса.



К недостаткам MindMeister отнесем ограничение количества разрабатываемых карт и невозможность совместной работы в бесплатном тарифе.

**Mindomo** (<https://www.mindomo.com/ru/>) – онлайн-сервис для создания и редактирования интеллект-карт, позиционирующий себя как программный продукт, разработанный в первую очередь для нужд образования.

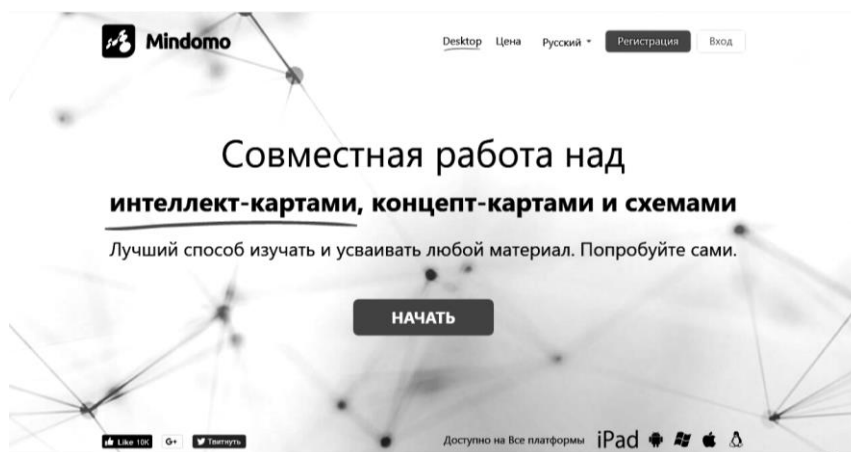


Рис. 3. Стартовая страница Mindomo.com

В отличие от описанных выше сервисов Mindomo:

- интегрирован с такими широко распространенными системами управления обучением, как Google Apps for Education, Moodle, Blackboard и др. (в платной версии);
- позволяет импортировать интеллект-карту из других приложений для редактирования;
- помимо возможности вложения мультимедиа позволяет записывать звуковое сопровождение к разрабатываемым материалам (в платной версии);
- имеет развернутый функционал для создания карт с гибкой структурой, пометками на линиях связей и несколькими связями между блоками.

При регистрации Mindomo предлагает выбрать тип пользователя: «бизнес», «студент», «преподаватель», последний позволяет организовывать совместную работу с группой учащихся.

К недостаткам сервиса в бесплатном тарифе отнесем возможность работы только с готовыми шаблонами и ограничение количества разрабатываемых карт.

Сравним функциональные возможности рассмотренных сервисов для бесплатного тарифа, результаты анализа представим в виде таблицы (таблица 1).

Таблица 1

*Сравнение функций онлайн сервисов в бесплатном тарифе*

Функции	Cacoo	MindMeister	Mindomo
Настраиваемый дизайн	+	+	-
Поддержка русского языка	+	+	+
Русскоязычный интерфейс	-	-	+
Совместная работа (размер команды)	>1	1	>1
Вложение мультимедиа	Вставка изображений	Прикрепление документов, ссылок, вставка изображений	Вставка изображений, видео и звуковых примечаний
Режим презентации	-	+	+
Мобильное приложение	-	+	+
Ограничения	временное (бесплатно 14 дней)	на количество карт (бесплатно 3)	на количество карт (бесплатно 3)

### Литература

1. Бьюзен Т. Интеллект-карты. Полное руководство по мощному инструменту мышления. М.: Изд-во Манн, Иванов и Фербер, 2018. 208 с.

**N.M. Timofeeva**  
Smolensk State University

### ON THE STRUCTURING AND VISUAL PRESENTATION OF INFORMATION IN THE FORM OF MIND MAPS BY MEANS OF ONLINE SERVICES

**Keywords:** *information, intelligence map, online service, infographics, Cacoo, Mindmeister, Mindomo.*

**Abstract.** *The article deals with the issues of structuring and visual presentation of information in the form of intelligence cards: the definition of intelligence cards, the requirements for its development, applications, advantages in use. Analyzes and compares the features of the development of intelligence cards by means of online services Cacoo, Mindmeister, Mindomo.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Базылева Анна Александровна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: anyuta11.01.1994@gmail.com.

**Банару Михаил Борисович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

**Банару Галина Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: mihail.banaru@yahoo.com.

**Бирюкова Татьяна Константиновна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: yukonta@mail.ru.

**Богданова Надежда Николаевна** – ассистент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: nadingioia@yandex.ru.

**Бояринов Дмитрий Анатольевич** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и информатики Смоленского государственного университета. E-mail: dmboyarinov@mail.ru.

**Быков Александр Александрович** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физики Национального исследовательского университета МЭИ, филиал в г. Смоленске. E-mail: alex1by@mail.ru.

**Вувуникян Юрий Микиртычевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. E-mail: vuv64@mail.ru.

**Гершкович Максим Михайлович** – старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального информационного центра «Информатика и управление» Российской академии наук. E-mail: makmg@mail.ru.

**Гомонов Сергей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: gomonov.serg@yandex.ru.

**Гончаров Евгений Игоревич** – студент Смоленского государственного университета. E-mail: drbenvey1996@mail.ru.

**Горшар Роман Сергеевич** – магистрант направления подготовки «Прикладная информатика» Гуманитарно-педагогической академии (филиал) Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского в г. Ялте. E-mail: horschar@mail.ru.

**Долгополова Ольга Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета. E-mail: dolgopolova@tut.by.

**Дюндин Андрей Викторович** – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и технических дисциплин Смоленского государственного университета. E-mail: avdyndin@yandex.ru.

**Евдокимова Галина Семёновна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: kaf-matem@smolgu.ru.

**Емельченков Евгений Петрович** – доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики Смоленского государственного университета. E-mail: ypy1101@gmail.com.

**Зверович Эдмунд Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета. E-mail: zverovich@bsu.by.

**Зуев Андрей Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Смоленского государственного университета. E-mail: zueandrej@yandex.ru.

**Карачик Валерий Валентинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Южно-Уральского государственного университета, karachik@susu.ru.

**Киреев Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Национального исследовательского технологического университета МИСиС. E-mail: Vladimir-Kireyev@mail.ru.

**Кирьяцкий Евгений Эдуардович** – кандидат физико-математических наук, доцент Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: jevgenijus.kirjackis@vgtu.lt.

**Кирьяцкий Эдуард Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса. E-mail: Eduard.kiriyatzkii@mail.ru.

**Киселева Ольга Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: foxy03@yandex.ru.

**Конашенко Андрей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: Andrey\_konashenko@mail.ru.

**Кристалинский Владимир Романович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики Смоленского государственного университета. E-mail: kristvr@rambler.ru.

**Кристалинский Роман Ефимович** – кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник научно-исследовательского центра Военной Академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации. E-mail: kristalinskiy-roman@rambler.ru.

**Кузнецова Алла Спартаковна** – кандидат психологических наук, доцент, доцент кафедры психологии труда и инженерной психологии факультета психологии Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. E-mail: kuznetsovamsu@rambler.ru.

**Нагорная Татьяна Романовна** – аспирант кафедры математического анализа физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tani7n@gmail.com.

**Никифорцева Надежда Николаевна** – ученица 10 класса ЧОУ СФМЛ при МИФИ. E-mail: nadya.nikifortseva@yandex.ru.

**Осипян Кристина Валентиновна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: osipyanchristina@inbox.ru

**Перельман Наталья Романовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Смоленского государственного университета, perelmannr@gmail.com.

**Поцейко Павел Геннадьевич** – аспирант кафедры теории функций, функционального анализа фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Я. Купалы. E-mail: pahamatby@gmail.com.

**Прудников Игорь Михайлович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательского

центра Смоленского государственного медицинского университета. E-mail: prudnik09@yandex.ru.

**Расулов Карим Магомедович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: kahriman@yandex.ru.

**Ровба Евгений Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций, функционального анализа фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Я. Купалы. E-mail: rovba.ea@gmail.com.

**Сенькина Гульжан Ержановна** – доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: gulzhan.senkina@gmail.com.

**Таран Виктория Николаевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и информационных технологий Гуманитарно-педагогической академии (филиал) Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского в г. Ялте. E-mail: victoriya\_yalta@ukr.net.

**Тимофеева Наталья Михайловна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры информационных и образовательных технологий Смоленского государственного университета. E-mail: nat.timopheeva@yandex.ru.

**Тимофеева Татьяна Игоревна** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: tat.timopheeva@yandex.ru.

**Тихонов Мартин Робертович** – ассистент института СПИИТех Московского института электронной техники, аспирант. E-mail: kurotenshi91@yandex.ru.

**Ханкишиева Шабнам Садыг кызы** – магистрант физико-математического факультета Смоленского государственного университета. E-mail: shabnam.khankishieva@mail.ru.

**Шерстнева Наталья Александровна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Смоленского государственного университета. E-mail: MathSmolgu@gmail.com.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СЕКЦИЯ 3. Математика и ее приложения</b>	<b>3</b>
<i>Банару М.Б., Банару Г.А.</i> Контактная геометрия гиперповерхностей эрмитовых многообразий (К юбилею Л.В. Степановой)	3
<i>Бирюкова Т.К., Киреев В.И., Гершкович М.М.</i> Теоремы о среднем значении и кинематические уравнения с точки зрения метода подобия аппроксимационных операторов	8
<i>Вувуникян Ю.М.</i> Обобщенные спектральные характеристики квазиобратных эволюционных операторов произвольной кратности	14
<i>Гомонов С.А.</i> Непредикативные определения и некоторые приемы исследования числовых последовательностей на сходимость методом сведения на себя и вычисления их пределов	19
<i>Долгополова О.Б., Зверович Э.И.</i> Обращение гиперсингулярного интеграла, взятого по конечному отрезку	43
<i>Евдокимова Г.С.</i> Об оценке среднего числа потерь для одноканальной системы обслуживания	48
<i>Емельченков Е.П.</i> Тернарные алгебры Холла. I	53
<i>Емельченков Е.П., Гончаров Е.И.</i> Тернарные алгебры Холла. II	59
<i>Зверович Э.И.</i> Дробно-линейные функции $h$ -комплексного аргумента	64
<i>Зуев А.М.</i> О некоторых свойствах суммы цифр натурального числа	71
<i>Карачик В.В.</i> О некоторых необходимых условиях разрешимости задач типа Неймана для полигармонического уравнения	75
<i>Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э.</i> Оценки модулей в одном из классов нормированных и аналитических в единичном круге функций	80
<i>Кирьяцкий Э.Г., Кирьяцкий Е.Э.</i> Об одной системе трех разностных уравнений	85
<i>Нагорная Т.Р., Расулов К.М.</i> О задаче Дирихле для одного дифференциального уравнения эллиптического типа	90
<i>Осипян К.В., Расулов К.М.</i> О задаче типа Карлемана для квазигармонических функций рода $n$	96
<i>Перельман Н.Р.</i> Об одном исключительном случае второй основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге	101
<i>Прудников И.М.</i> Новый подход к поиску точек равновесия в экономике и теории игр	107
<i>Расулов К.М.</i> Краевая задача типа задачи Дирихле для обобщенных	

аналитических функций первого порядка	119
<i>Расулов К.М., Тимофеева Т.И.</i> Неоднородная краевая задача типа Гильберта для квазигармонических функций второго рода	127
<i>Расулов К.М., Ханкишиева Ш.С.</i> О явном решении неоднородной краевой задачи типа Римана для квазигармонических функций в круговых областях	132
<i>Ровба Е.А., Поцейко П.Г.</i> Об одном представлении рационального сингулярного интеграла Джексона и его аппроксимативных свойствах	141
<i>Тихонов М.Р.</i> Анализ эффективности методов оценки рисков в автоматизированной системе управления рисками KuroT Risks	155
<i>Шерстнева Н.А.</i> Метод построения многочлена наилучшего приближения непрерывной функции	161
<b>СЕКЦИЯ 4. Новые информационные и педагогические технологии в образовании</b>	170
<i>Богданова Н.Н.</i> О вычислении объемов	170
<i>Бояринов Д.А.</i> Информационно-коммуникационные технологии в контексте непрерывного воспитания	174
<i>Горшар Р.С., Таран В.Н.</i> Алгоритмические подходы для средств аналитики результатов тестирования систем дистанционного обучения	180
<i>Дюндин А.В.</i> Организация дистанционной подготовки к ЕГЭ по физике	185
<i>Киселева О.М., Быков А.А.</i> Особенности обучения пожилых людей информационным технологиям	190
<i>Конашенко А.В., Никифорцева Н.Н.</i> О некоторых подходах к решению “олимпиадных” неравенств	195
<i>Кристалинский Р.Е., Кристалинский В.Р.</i> Методы оптимизации в системе Mathematica	199
<i>Кузнецова А.С.</i> Психологические технологии профилактики профессионального стресса у педагогов	203
<i>Сенькина Г.Е., Базылева А.А.</i> 3D моделирование в проектной деятельности обучающихся: построение системы сопровождения в процессе изучения физики в общеобразовательной школе	209
<i>Тимофеева Н.М.</i> О структурировании и наглядном представлении информации в виде интеллект-карт средствами онлайн-сервисов	214
<b>Сведения об авторах</b>	219



**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

## ДЛЯ ЗАМЕТОК

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

Системы компьютерной математики и их приложения

Выпуск 20

Часть 2

Издательство Смоленского государственного  
университета

Редакторы *Л.В. Бушуева, О.В. Папко*

---

Подписано к печати 15.04.2019. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать ризографическая.

Усл. п. л. 15,5. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 120 экз.

Заказ №

---

Отпечатано с оригинал-макета авторов в ИТЦ СмолГУ  
214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.